

相位屏法模拟高斯阵列光束海洋湍流传输特性

牛超君, 卢芳, 韩香娥

西安电子科技大学物理与光电工程学院, 陕西 西安 710071

摘要 基于功率谱反演法产生海洋湍流相位屏, 对多次传输过程进行统计平均, 仿真分析不同海洋湍流参量下不同高斯阵列光束(矩形分布、径向分布及单束)长曝光光斑半径、光斑质心漂移特性及光强闪烁特性。结果表明: 光束长曝光光斑半径、光斑质心漂移标准差及轴上闪烁系数均随湍流效应(湍流强度或传输距离)的增强而增大; 同时, 阵列光束与单束高斯光的光斑半径趋于一致, 当传输距离继续增大时, 单束高斯光束长曝光光斑半径略大。相对于单束高斯光, 阵列光束在相同湍流条件下具有更小的漂移标准差, 但轴上闪烁系数较大。相对于大气湍流而言, 海洋湍流具有较强的闪烁效应。

关键词 海洋光学; 海洋湍流; 数值模拟; 阵列光束; 光束漂移; 闪烁系数

中图分类号 TN249

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201838.0601004

Propagation Properties of Gaussian Array Beams Transmitted in Oceanic Turbulence Simulated by Phase Screen Method

Niu Chaojun, Lu Fang, Han Xiang'e

School of Physics & Optoelectronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China

Abstract Based on the power spectrum inversion method to produce oceanic turbulence phase screen, the long-exposure beam radius, spot centroid wander features and irradiance scintillation features of different beam arrays (rectangle, radial, single beams) in different oceanic turbulence conditions are simulated and analyzed. Results show that long-exposure beam radius, standard deviation of spot centroid wander and on-axis scintillation index of array beams increase with increasing of turbulent effects. Simultaneously, the long-exposure beam radius of the beam array is tending to be equivalent with that of the single Gaussian beam. However, after a longer distance propagation, the radius of single beam is slightly larger than the array beam radius. Compared to a single beam, beam arrays have smaller wander standard deviation under the same turbulence conditions but larger scintillation index. The scintillation in oceanic turbulence is stronger than in the atmospheric turbulence.

Key words oceanic optics; oceanic turbulence; numerical simulation; array beams; beam wander; scintillation index

OCIS codes 010.4450; 010.4455; 010.7060

1 引 言

目前激光器的输出功率不高, 且激光在海水中传输时会受吸收、散射衰减及海洋湍流等影响, 故单束激光在海洋中的传输距离十分有限, 且很难保持较高的光束输出质量。阵列光束合成技术在获得较高激光输出功率以及保持较高光束质量方面具有很

好的应用潜力, 因此研究阵列光束在海洋湍流中的传输特性十分必要。目前, 对阵列光束在海洋湍流中的传输特性的研究成果均为解析结果。由于阵列光束结构较为复杂, 其在海洋湍流中传输的光束漂移、光强闪烁等特性的理论推导较为繁琐, 故需采用数值仿真的方法来获取湍流中阵列光束传输特性相关参数的规律特性。

收稿日期: 2017-12-12; 收到修改稿日期: 2018-01-19

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金(XJS17095)、高等学校学科创新引智计划(B17035)

作者简介: 牛超君(1991—), 女, 博士研究生, 主要从事大气传输特性及自适应光学方面的研究。

E-mail: niuchaojun123@163.com

导师简介: 韩香娥(1962—), 女, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事光传输、激光雷达和散射方面的研究。

E-mail: xehan@mail.xidian.edu.cn(通信联系人)

采用多相位屏法模拟大气湍流的方法已被广泛应用,并在大气湍流自身的时空随机分布分析以及基于相位屏法得到的激光大气湍流传输特性分析中均得到了验证^[1-3]。Lachinova 等^[4]提出,在大气湍流中,高斯光束一阶特性如平均光强分布等具有较好的一致性,而强闪烁条件下基于相位屏法得到的光强闪烁特性差距较大。海洋湍流与大气湍流具有一定的相似性,其数值模拟方法研究也开始受到关注。杨天星等^[5]采用功率谱反演法产生海洋湍流相位屏,验证了湍流介质相位结构函数以及轨道角动量光束传输特性。本文采用相位屏法模拟产生海洋湍流,仿真分析了 3×3 矩形分布高斯阵列光束、7 束径向分布高斯阵列光束以及单束高斯光在海洋湍流中的长曝光光斑半径、光强闪烁和光束漂移特性。

2 基本原理

2.1 海洋湍流相位屏数值模拟

多相位屏法的基本思想是光束的传输路径由真空和散布其间的若干薄相位屏所构成,光束每传输到一个相位屏时即把对应的相位扰动叠加到光波波前上,接着在真空中传输至下一个相位屏处,叠加下一个相位屏对应的相位扰动,再在真空中传输,直至终点,如图 1 所示。将光波传输距离 Z 分成若干段,在 z_j 处设置第 j 个相位屏, $\Delta z_{j+1} = z_{j+1} - z_j$ 为相位屏的间隔,前后两相邻相位屏处的光场满足^[6]

$$u(r, z_{j+1}) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left\{ u(r, z_j) \exp[i\varphi(x, y)] \right\} \times \exp \left(-i \frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{2k} \Delta z_{j+1} \right) \right\}, \quad (1)$$

式中: $\varphi(x, y)$ 为相位屏间湍流造成的相位扰动,即湍流相位屏; κ_x 和 κ_y 为相空间 x 和 y 方向的波数; k 为真空中的波数; \mathcal{F} 和 \mathcal{F}^{-1} 分别为傅里叶变换(FFT)和傅里叶逆变换(IFFT)。每个相位屏分为 $N \times N$ 个网格。 $\varphi(x, y)$ 由谱反演法获得,其原理是利用湍流功率谱对一个复高斯随机矩阵进行滤波,再通过 IFFT 获得湍流畸变相位,该过程可表示为^[6]

$$\varphi(x, y) = C \sum_{\kappa_x} \sum_{\kappa_y} a(\kappa_x, \kappa_y) \sqrt{\Phi_\theta(\kappa_x, \kappa_y)} \times \exp[i(\kappa_x x + \kappa_y y)], \quad (2)$$

式中: $\Delta x, \Delta y$ 为空域内取样间隔, $x = m \Delta x, y = n \Delta y, m, n$ 为整数; $\Delta \kappa_x, \Delta \kappa_y$ 为波数域内空间频域取样间隔, $\kappa_x = m' \Delta \kappa_x, \kappa_y = n' \Delta \kappa_y, m', n'$ 为整数;通过对均值为 0, 方差为 1 的高斯随机数进行

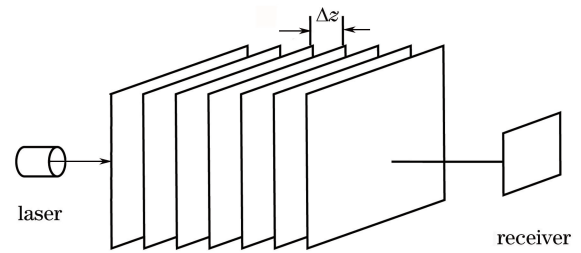


图 1 多层相位屏法示意图

Fig. 1 Sketch map of multi-layer phase screen method

FFT 可得到 $a(\kappa_x, \kappa_y)$; C 为常数,来源于标度因子 $\sqrt{\Delta \kappa_x \Delta \kappa_y}$; $\Phi_\theta(\kappa_x, \kappa_y)$ 为与传播方向垂直的任意薄层切片上的海洋湍流折射率变化引起的湍流相位功率谱,表达式为

$$\Phi_\theta(\kappa_x, \kappa_y) = 2\pi k^2 \int_z^{\Delta z} \Phi_n(\kappa_x, \kappa_y, \xi) d\xi, \quad (3)$$

式中: $\Phi_n(\kappa_x, \kappa_y, \xi)$ 为折射率谱。 $\Phi_n(\kappa)$ 根据 Nikishov 提出的海水折射率波动谱进行计算^[7],其表达式为

$$\Phi_n(\kappa) = 0.388 \times 10^{-8} \times \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \kappa^{-\frac{11}{3}} [1 + 2.35(\kappa\eta)^{\frac{2}{3}}] \times \frac{\chi_T}{\omega^2} [\omega^2 \exp(-A_T \delta_{TS}) + \exp(-A_S \delta_{TS}) - 2\omega \exp(-A_{TS} \delta_{TS})], \quad (4)$$

式中: ε 为湍流动能耗散率,取值范围为 $10^{-1} \sim 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$; χ_T 为温度方差耗散率,取值范围为 $10^{-4} \sim 10^{-10} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; η 为 Kolmogorov 尺度,取值范围为 $6 \times 10^{-5} \sim 0.01 \text{ m}$; ω 为温度梯度与盐度梯度的比值,取值范围为 $-5 \sim 0$; ω 趋近于 0 时,表征盐度主导的湍流; ω 趋近于 -5 时,表征温度主导的湍流,负号表示随着海水深度的增加,温度下降而盐度上升;其他参数取值为 $A_{TS} = 9.41 \times 10^{-3}, \delta_{TS} = 8.284(\kappa\eta)^{\frac{4}{3}} + 12.987(\kappa\eta)^2, A_T = 1.863 \times 10^{-2}, A_S = 1.9 \times 10^{-4}$ 。

3 数值模拟结果

3.1 仿真条件设置

选取多个高斯光束相干合成的 3×3 矩形分布光束阵列、7 束径向分布阵列及单准直高斯光束进行研究,如图 2 所示。

对三种光束的传输过程各进行 1000 次数值仿真,参数设置为:光束间距 $d = 0.002 \text{ m}$,波长 $\lambda = 532 \text{ nm}$,相位屏分隔步长 $\Delta z = 2.5 \text{ m}$,相位屏宽 $D = 0.16 \text{ m}$,相位屏网格划分为 1024×1024 。相位屏参数的设置原理参考大气湍流仿真原则^[4,8]。

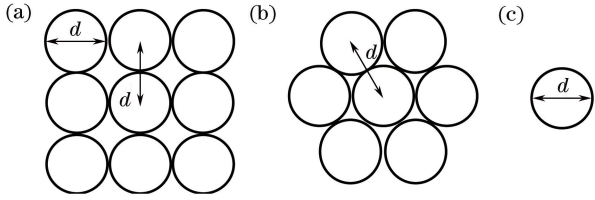


图 2 不同光束分布示意图。(a) 3×3 矩形分布阵列光束；(b) 7 束径向分布光束；(c) 单高斯光束

Fig. 2 Schematic of different beam arrangements. (a) 3×3 beam array with rectangle distribution; (b) 7 beam array with radial distribution; (c) single Gaussian beam

3.2 光强分布特性

假设长曝光轴向特性仍为高斯型,则长曝光光斑半径^[9]为

$$w_{LE} = \left[\frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} r^2 \langle I(\mathbf{r}, L) \rangle dr}{\int_{-\infty}^{\infty} \langle I(\mathbf{r}, L) \rangle dr} \right]^{-1/2}, \quad (5)$$

式中: $I(\mathbf{r}, L)$ 为 (\mathbf{r}, L) 点的光强; $\langle \cdot \rangle$ 表示系统平均。

图 3 为不同湍流条件下不同光束的平均半径。对应波长为 532 nm 的高斯阵列光束,经过 1000 次统计平均,由(5)式计算得出的长曝光平均半径。由图 3(a)和(b)可以看出,温度方差耗散率 χ_T 变大,

温度梯度与盐度梯度的比值 ω 变大,三种光束的长曝光光斑半径趋于一致。由图 3(c)可见,随着传输距离增加,三种光束的长曝光平均半径先趋于一致,此后两种阵列光束保持一致,单高斯光束半径略大。而由图 3(d)可见,随着湍流动能耗散率 ϵ 减小,三种光束的长曝光光斑半径缓慢增加,其差距也缓慢减小,这可由谱模型(4)式看出, ϵ 以 $-1/3$ 幂次对湍流强度贡献较小,故其变化较不明显。

3.3 光束漂移特性

当光束传播一段距离后,在垂直于其传播方向的平面内,由于湍流的干扰,光束中心位置将产生随机变化。漂移标准差反映了光束漂移的程度,对于如水下无线光通信系统的接收以及水下目标探测等实际工程应用,是非常重要的因素之一。

通常以光斑质心位置的变化来描述光斑漂移情况。光斑质心 (x_c, y_c) 定义为

$$\begin{cases} x_c = \frac{\iint x I(x, y) dx dy}{\iint I(x, y) dx dy} \\ y_c = \frac{\iint y I(x, y) dx dy}{\iint I(x, y) dx dy} \end{cases}, \quad (6)$$

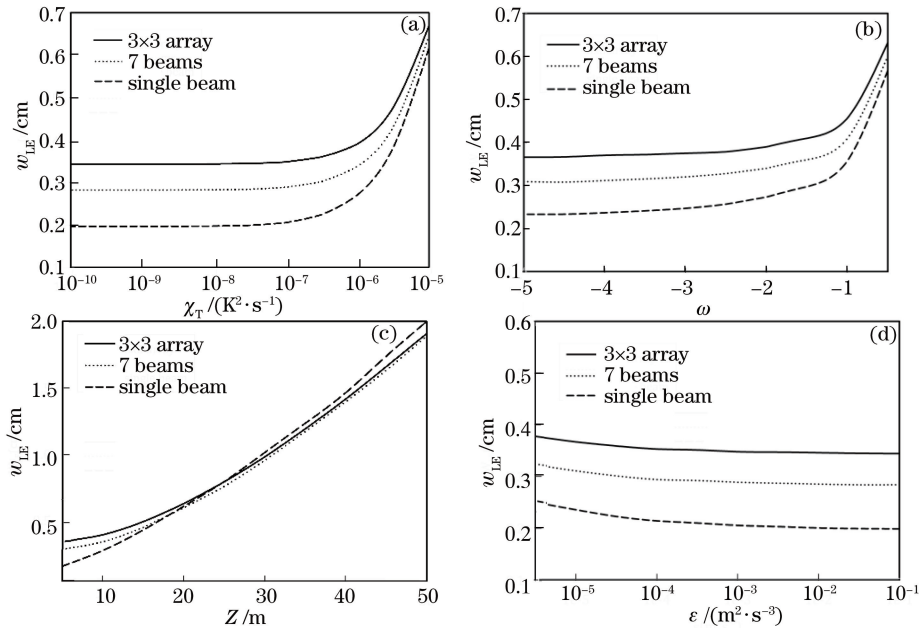


图 3 不同湍流条件下不同光束的平均半径。(a) $Z=10$ m, $\epsilon=10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001$ m, $\lambda=532$ nm; (b) $Z=10$ m, $\epsilon=10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, $\chi_T=10^{-6} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\eta=0.001$ m, $\lambda=532$ nm; (c) $\epsilon=10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, $\chi_T=10^{-6} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001$ m, $\lambda=532$ nm; (d) $Z=10$ m, $\chi_T=10^{-6} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001$ m, $\lambda=532$ nm

Fig. 3 Average radii of beams under different turbulence conditions. (a) $Z=10$ m, $\epsilon=10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001$ m, $\lambda=532$ nm; (b) $Z=10$ m, $\epsilon=10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, $\chi_T=10^{-6} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\eta=0.001$ m, $\lambda=532$ nm; (c) $\epsilon=10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, $\chi_T=10^{-6} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001$ m, $\lambda=532$ nm; (d) $Z=10$ m, $\chi_T=10^{-6} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001$ m, $\lambda=532$ nm

式中： $I(x, y)$ 为 (x, y) 点的光强。通过对仿真过程的多次重复可以模拟出光斑质心的坐标 (x_c, y_c) 的变化。质心分布如图4所示。

通过对质心变化进行统计平均即可获得质心漂移标准差^[9]

$$\sigma_c = \sqrt{2\langle r_c^2 \rangle}, \quad (7)$$

式中： $r_c^2 = x_c^2 + y_c^2$ 。

图5为质心漂移标准差。模拟中采用波长为532 nm的高斯阵列光束,进行1000次重复仿真,得到1000个光斑质心,再由(7)式得到光斑质心漂移标准差。由图5可以看出,随着距离增加,温度方差耗散率 χ_T 变大,湍流动能耗散率 ϵ 变小,温度梯度与盐度梯度的比值 ω 变大,质心的漂移逐渐严重。阵列光束的漂移明显弱于单束光,且 3×3 矩形阵列

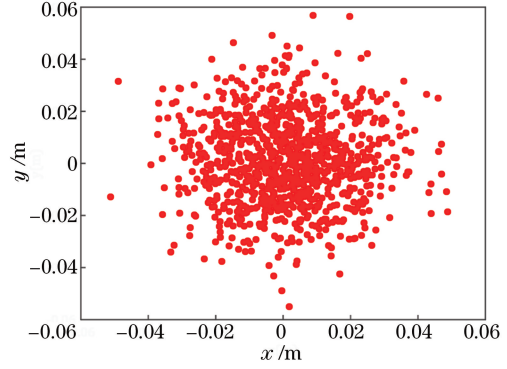


图4 质心分布图

Fig. 4 Distribution of spot centroid

光束与7束径向分布光束的漂移特性曲线较为接近, 3×3 矩形阵列光束的漂移标准差略小于径向分布光束的漂移标准差。

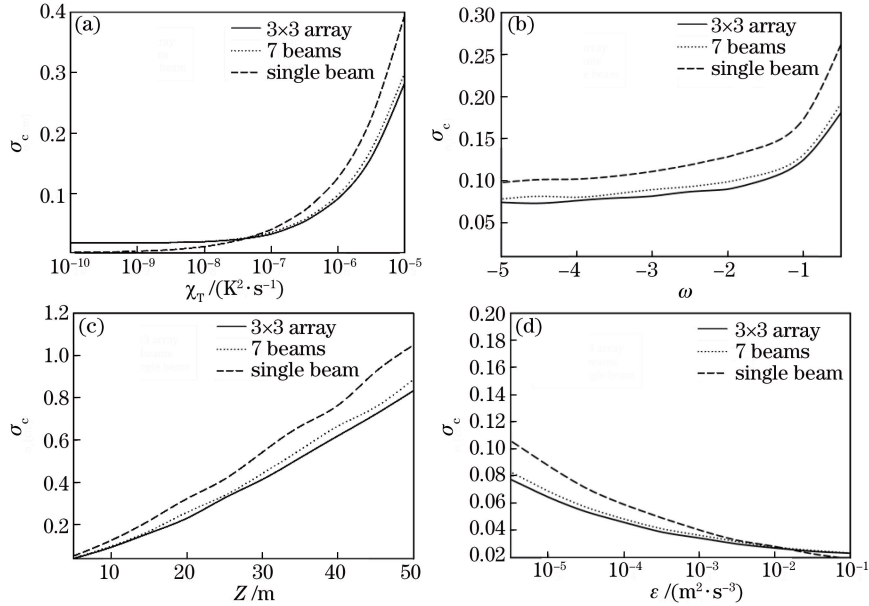


图5 质心漂移标准差。(a) $Z=10 \text{ m}$, $\epsilon=10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001 \text{ m}$, $\lambda=532 \text{ nm}$; (b) $Z=10 \text{ m}$, $\epsilon=10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, $\chi_T=10^{-6} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\eta=0.001 \text{ m}$, $\lambda=532 \text{ nm}$; (c) $\epsilon=10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, $\chi_T=10^{-6} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001 \text{ m}$, $\lambda=532 \text{ nm}$; (d) $Z=10 \text{ m}$, $\chi_T=10^{-6} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001 \text{ m}$, $\lambda=532 \text{ nm}$

Fig. 5 Standard deviation of spot centroid wander. (a) $Z=10 \text{ m}$, $\epsilon=10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001 \text{ m}$, $\lambda=532 \text{ nm}$; (b) $Z=10 \text{ m}$, $\epsilon=10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, $\chi_T=10^{-6} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\eta=0.001 \text{ m}$, $\lambda=532 \text{ nm}$; (c) $\epsilon=10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, $\chi_T=10^{-6} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001 \text{ m}$, $\lambda=532 \text{ nm}$; (d) $Z=10 \text{ m}$, $\chi_T=10^{-6} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001 \text{ m}$, $\lambda=532 \text{ nm}$

3.4 光强闪烁特性

光强起伏的研究一般集中分析闪烁系数^[9],暂不考虑口径平均效应,只讨论轴上闪烁系数,其表达式为

$$\sigma_I^2 = \frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} - 1, \quad (8)$$

式中： I 为中心光强。

图6为数值模拟所得的阵列光束轴上闪烁系数。利用多相位屏法,可以得到合成光束在接收面

上的光场分布情况,取样1000次并利用(8)式可进而得到光束的光强起伏方差。将文献[4]中高光大气湍流传输数值模拟方法和解析结果进行对比,结果表明,弱起伏及中起伏条件下相位屏法得到的光强闪烁较为准确,而强起伏条件下时,相位屏法统计获得的光强闪烁结果不准确。同时,文献[10-11]中采用截取轴上闪烁系数小于1的点描述弱起伏湍流状态下的闪烁系数,故这里采取类似的方法只保留闪烁系数小于1的点。

由图6可以看出,随着距离增加,温度方差耗散率 χ_T 变大,湍流动能耗散率 ϵ 变小,温度梯度与盐度梯度的比值 ω 变大,轴上闪烁系数均有所增大,阵列光束的轴上闪烁系数明显大于单束光,且 3×3 阵列光束的轴上闪烁系数与7束径向分布光束的轴上闪烁系数较为接近, 3×3 阵列光束略大。这是由于 3×3 阵列光束四个角上的光束到中心的距离相对较远,导致光强起伏增大。由此也可以发现,不同

的排列方式,不同的光束间距以及不同的光束半径会导致不同的闪烁特性,但由于篇幅所限,本文暂不讨论。与光束在大气湍流中传输数百米甚至上千米才会达到闪烁系数为1的情况不同,光束在海洋湍流中传输较短距离闪烁系数即可达到1,而无论是公式推导还是数值仿真,在强起伏情况下的研究方法均有所不同,故在海洋湍流的研究中,对强起伏条件下的光束传输特性进行研究很有意义。

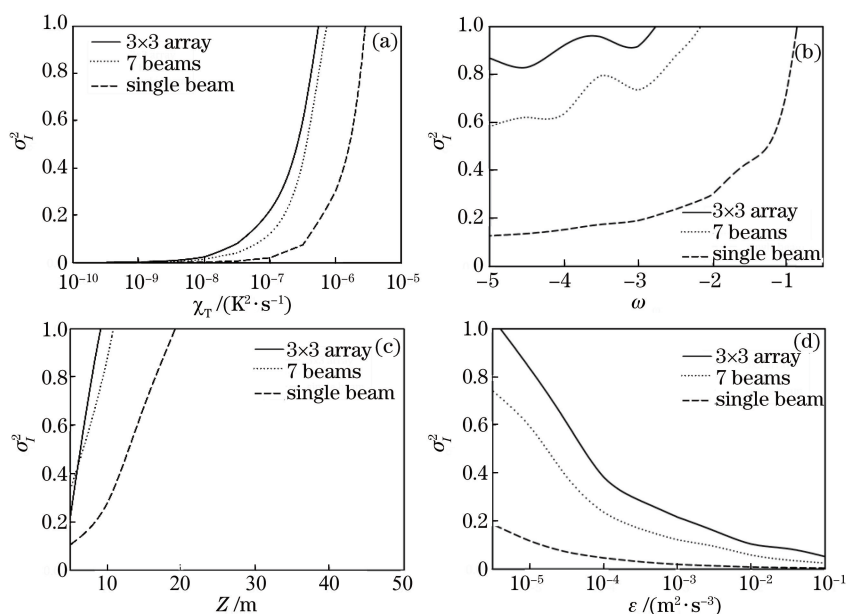


图6 数值模拟阵列光束轴上闪烁系数。(a) $Z=10\text{ m}$, $\epsilon=10^{-6}\text{ m}^2\cdot\text{s}^{-3}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001\text{ m}$, $\lambda=532\text{ nm}$; (b) $Z=10\text{ m}$, $\epsilon=10^{-6}\text{ m}^2\cdot\text{s}^{-3}$, $\chi_T=10^{-6}\text{ K}^2\cdot\text{s}^{-1}$, $\eta=0.001\text{ m}$, $\lambda=532\text{ nm}$; (c) $\epsilon=10^{-6}\text{ m}^2\cdot\text{s}^{-3}$, $\chi_T=10^{-6}\text{ K}^2\cdot\text{s}^{-1}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001\text{ m}$, $\lambda=532\text{ nm}$; (d) $Z=10\text{ m}$, $\chi_T=10^{-6}\text{ K}^2\cdot\text{s}^{-1}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001\text{ m}$, $\lambda=532\text{ nm}$

Fig. 6 Numerical simulation of on-axis scintillation index of beam array. (a) $Z=10\text{ m}$, $\epsilon=10^{-6}\text{ m}^2\cdot\text{s}^{-3}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001\text{ m}$, $\lambda=532\text{ nm}$; (b) $Z=10\text{ m}$, $\epsilon=10^{-6}\text{ m}^2\cdot\text{s}^{-3}$, $\chi_T=10^{-6}\text{ K}^2\cdot\text{s}^{-1}$, $\eta=0.001\text{ m}$, $\lambda=532\text{ nm}$; (c) $\epsilon=10^{-6}\text{ m}^2\cdot\text{s}^{-3}$, $\chi_T=10^{-6}\text{ K}^2\cdot\text{s}^{-1}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001\text{ m}$, $\lambda=532\text{ nm}$; (d) $Z=10\text{ m}$, $\chi_T=10^{-6}\text{ K}^2\cdot\text{s}^{-1}$, $\omega=-2$, $\eta=0.001\text{ m}$, $\lambda=532\text{ nm}$

4 结 论

采用多相位屏法,对海洋湍流中高斯型阵列光束的远场光斑进行数值模拟,主要针对 3×3 矩形阵列、7束径向分布阵列和单高斯光束3种光束的长曝光光斑半径、光束漂移和光强闪烁特性进行统计分析。结果表明,随着传输距离增加,温度方差耗散率 χ_T 变大,湍流动能耗散率 ϵ 变小,温度梯度与盐度梯度的比值 ω 变大,3种光束长曝光光斑半径趋于一致,其中 ϵ 影响较小。当距离继续增加时,单高斯光束平均半径略大于阵列光束平均半径。同时,质心漂移标准差和轴上闪烁系数均有所增加,阵列光束相比单束光具有更小的漂移标准差,但轴上闪烁系数较大。相比大气湍流,海洋湍流中的光束可在极短距离内达到强闪烁,这在一定程度上限制了

相位屏法的应用,需要进一步改进。

参 考 文 献

- [1] Xiao X, Voelz D G, Toselli I, *et al.* Gaussian beam propagation in anisotropic turbulence along horizontal links: theory, simulation, and laboratory implementation [J]. *Applied Optics*, 2016, 55(15): 4079-4084.
- [2] Qian X M, Zhu W Y, Huang Y B, *et al.* Selection of computing parameters in numerical simulation of laser beam propagation in turbulent atmosphere [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, 37(10): 1986-1992. 钱仙妹, 朱文越, 黄印博, 等. 激光湍流大气传输数值模拟中的计算参数选取 [J]. *光子学报*, 2008, 37(10): 1986-1992.
- [3] Xu G Y, Wu J, Yang C P, *et al.* Simulation and optical scintillation research of Gaussian beam in atmospheric turbulence [J]. *Laser Technology*, 2008,

- 32(5): 548-551.
徐光勇, 吴健, 杨春平, 等. 高斯光束在大气湍流中的数值模拟和光强起伏[J]. 激光技术, 2008, 32(5): 548-551.
- [4] Lachinova S L, Vorontsov M A. Giant irradiance spikes in laser beam propagation in volume turbulence: analysis and impact[J]. *Journal of Optics*, 2016, 18(2): 025608.
- [5] Yang T X, Zhao S M. Random phase screen model of ocean turbulence[J]. *Acta Optica Sinica*, 2017, 37(12): 1201001.
杨天星, 赵生妹. 海洋湍流随机相位屏模型[J]. 光学学报, 2017, 37(12): 1201001.
- [6] Rao R Z. Light propagation in the turbulent atmosphere[M]. Hefei: Anhui Science and Technology Press, 2005: 95-102.
饶瑞中. 光在湍流大气中的传播[M]. 合肥: 安徽科学技术出版社, 2005: 95-102.
- [7] Nikishov V V, Nikishov V I. Spectrum of turbulent fluctuations of the sea-water refraction index[J]. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 2000, 27(1): 82-98.
- [8] Voelz D G, Roggemann M C. Digital simulation of scalar optical diffraction: revisiting chirp function sampling criteria and consequences[J]. *Applied Optics*, 2009, 48(32): 6132-6142.
- [9] Andrews L C, Phillips R L. Laser beam propagation through random media[M]. Bellingham, WA: SPIE Press, 2005: 647-666.
- [10] Ata Y, Baykal Y. Scintillations of optical plane and spherical waves in underwater turbulence[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2014, 31(7): 1552-1556.
- [11] Wang Z Q, Zhang P F, Qiao C H, *et al.* Scintillation index of Gaussian waves in weak turbulent ocean[J]. *Optics Communications*, 2016, 380: 79-86.