

基于空间域压缩采样和谱域 Karhunen-Loève 变换的光谱成像与重构

唐意东, 黄树彩, 黄达

空军工程大学防空反导学院, 陕西 西安 710051

摘要 光谱图像包含丰富的空间信息和光谱信息, 能够为天基预警探测任务提供重要的信息支撑, 但其庞大的数据量给硬件设备带来了极大的挑战。传统的基于奈奎斯特采样的“先采样后压缩”的处理方式不仅无法从根本上解决数据量庞大的问题, 还会造成资源浪费; 针对此问题, 利用单波段二维图像的稀疏性和空间编码数据的谱间冗余, 设计了一种基于空间域压缩采样和谱域 Karhunen-Loève (KL) 变换编码的光谱图像重构方法, 并建立基于 ℓ_1 范数和全变分约束的单波段二维图像复合正则重构模型, 同时结合投影梯度法和软阈值收缩算子设计 2D-CRPG 模型求解算法。结果表明: 基于空间域压缩采样和谱域 KL 变换编码的光谱图像重构方法能够有效降低数据采样成本, 有利于天基预警探测光谱成像; 2D-CRPG 重构算法能够有效保留光谱图像的结构信息, 从而在有限的采样率下较好地重构原始光谱图像。

关键词 光谱学; 压缩感知; 解码重构; Karhunen-Loève 变换; 稀疏表示

中图分类号 TP751.1

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201838.0530004

Spectral Imaging and Reconstruction Based on Spatial Compressive Sampling and Spectral Karhunen-Loève Transform

Tang Yidong, Huang Shucui, Huang Da

College of Air and Missile Defense, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China

Abstract Spectral images contain abundant space information and spectral information, which can provide important information support for space-based early warning detection. However, the huge amounts of data also brings great challenge for hardware. The traditional treatment of first sampling and then compressing based on Nyquist sampling not only can't solve the problem of mass-data fundamentally, but also causes wasting of sources. To solve this problem, we propose a spectral imaging and reconstruction method based on spatial compressive sampling and spectral Karhunen-Loève (KL) transform by using the sparsity of single-band images and the spectral redundant of spatial encoded data. A two-dimensional composite regular reconstruction model based on ℓ_1 -norm and total variation is constructed for single band images, and an inference algorithm named two-dimensional compound regularized projection gradient (2D-CRPG) is then proposed for the model by combining the projection gradient method with the soft-threshold operator. The results show that the spectral imaging and reconstruction method based on spatial compressive sampling and KL transform can effectively reduce the cost of data sampling, and thus can benefit the spectral imaging of space-based early warning detection. The 2D-CRPG reconstruction algorithm can effectively preserve structural information of spectral images, thus the original spectral image can be reconstructed at a limited sampling rate.

Key words spectroscopy; compressive sensing; decoding and reconstruction; Karhunen-Loève transform; sparse representation

OCIS codes 300.6170; 110.4234

收稿日期: 2017-11-20; **收到修改稿日期:** 2017-12-27

基金项目: 国家自然科学基金(61273275)

作者简介: 唐意东(1989—), 男, 博士研究生, 主要从事压缩感知、光谱图像处理方面的研究。

E-mail: 18109267859@163.com

导师简介: 黄树彩(1967—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事模式识别、智能信息处理方面的研究。

E-mail: hsc67118@126.com(通信联系人)

1 引 言

成像光谱能够获取监视场景的丰富的空间信息和光谱信息,为天基预警探测任务提供重要的信息支撑;然而,随着空间分辨率和光谱分辨率的不断提高,采用传统的奈奎斯特方式获取数据会使数据量急剧增长,对本来就昂贵且有限的星载硬件资源造成了巨大压力。不同于传统的对地遥感,预警探测的成像时间极其有限,传统的奈奎斯特采样无法实现数据的快速采集,难以满足天基预警探测任务的实时性要求。光谱图像的空间相关性和谱间相关性使光谱图像数据中存在大量冗余信息。利用光谱图像数据的冗余特征,传统的数据压缩方法能够解决数据存储和传输方面的困难,其通常的做法是先进进行奈奎斯特采样,然后将获得的数据进行压缩后存储和传输。显然,这种“先采样后压缩”的处理方式并没有从根本上解决数据量庞大的问题,还会造成资源浪费:一方面通过消耗大量硬件资源来获取大量数据,另一方面又通过数据压缩来舍弃大量冗余信息。为了缓解上述矛盾对成像光谱技术应用的限制,需要寻求新的、更加高效的数据采集和处理方法。一个朴素的出发点是,既然大部分冗余数据最终会被舍弃,那么为何还要花费大量资源去获取所有数据呢,是否可以获取其中不会被舍弃的那部分有用数据呢^[1]? 答案是肯定的。压缩感知(CS)理论^[2-4]为解决该问题提供了良好的途径。CS理论将传统的数据采集和数据压缩合二为一,在不损失信息量的前提下可从源头上减少数据采集量,降低采样成本,缓解硬件资源的压力,非常适合于数据获取端资源有限而后端数据处理资源相对充裕的应用场景。

为了实现光谱成像和解码重构,本文基于二维图像CS编码^[5],结合谱域自适应Karhunen-Loève(KL)变换,提出了基于空间域压缩采样和谱域KL变换编码的光谱图像重构方法,在空间图像解码重构时建立基于 ℓ_1 范数和全变分约束的二维图像复合正则重构模型,并结合投影梯度法和软阈值收缩算子设计二维复合正则投影(2D-CRPG)模型求解算法。

2 算 法

2.1 压缩采样编码

在CS领域,尽管构造性能更优的测量矩阵仍是一个开放性课题,但鉴于随机高斯矩阵已经得到

广泛使用并取得了良好效果,本研究仍采用随机高斯矩阵作为测量矩阵。根据CS理论,每一次观测均可以看作测量矩阵行向量与待测向量的内积,每个观测值均包含了待测数据的部分全局信息。此时,测量矩阵行向量之间的相关性越弱,各观测值之间的相关性也就越弱,观测数据包含的有效信息就越丰富,获得的重建质量就越高。采用施密特正交化法对测量矩阵进行预处理,在不影响测量矩阵随机性^[6]的同时弱化其相关性。

给定光谱图像数据 $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^L \in \mathbf{R}^{N \times N \times L}$,其中 L 为波段个数, \mathbf{X}_i 为波段 i 的二维图像, N 为图像尺寸。利用测量矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 对图像的行和列进行独立观测^[7],得到观测模型:

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{A}\mathbf{X}_i\mathbf{B}^T, \quad (1)$$

式中: $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{M \times N}$, M 为观测数量; $\mathbf{Y}_i \in \mathbf{R}^{M \times M}$ 为压缩采样数据。此时,测量矩阵需要 $2MN$ 的存储空间。定义空间采样率为

$$R_{\text{spa}} = M^2/N^2. \quad (2)$$

光谱信息是光谱图像探测信息后续应用的关键。为了保证光谱的重建精度,提高后续应用的精度,本研究采用不同的随机高斯矩阵作为每个波段的测量矩阵,即采用三维编码策略,以增强采样编码的谱间随机性,从而提高光谱的重建质量。

经过空间域三维编码压缩采样后,采用KL变换去除谱间冗余。谱间KL变换是一种基于图像统计特性的正交变换,沿着光谱维将数据映射到本征矢量空间,使编码数据的能量集中在少数主成分,其核心是零均值数据协方差矩阵的特征值分解。光谱图像空间域压缩采样数据 $\{\mathbf{Y}_i\}_{i=1}^L \in \mathbf{R}^{M \times M \times L}$ 的二维矩阵形式为 $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{y}_{M^2}]^T \in \mathbf{R}^{M^2 \times L}$,其中 $\mathbf{y}_j \in \mathbf{R}^L$ ($1 \leq j \leq M^2$)为第 j 个测量值, $\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{M^2} \sum_{j=1}^{M^2} \mathbf{y}_j$ 为空间域压缩采样数据的均值,则空间域采样数据的协方差矩阵为

$$\mathbf{C} = \frac{1}{M^2 - 1} \sum_{j=1}^{M^2} (\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}}). \quad (3)$$

对协方差矩阵 \mathbf{C} 进行特征值分解,得到特征值矩阵 \mathbf{D} 和特征向量矩阵 \mathbf{V} ,它们满足

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}, \quad (4)$$

式中 \mathbf{D} 的对角线元素为特征值。

特征值分解后,自适应地选取 K 个显著特征值对应的特征向量组成变换矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{L \times K}$,使其满足

$$c = \sum_{i=1}^K \lambda_i / \sum_{i=1}^L \lambda_i \geq 0.99, \quad 1 \leq K \leq L, \quad (5)$$

式中: λ_i 为特征值。此时, 由于空间域测量矩阵的随机性, 谱域 KL 变换的显著特征值个数并不固定。

谱域 KL 变换的具体形式为 $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}\mathbf{P}$, 此时需要传输的数据包括均值 $\bar{\mathbf{y}}$ 、KL 变换矩阵 \mathbf{P} 和保留的主成分 $\tilde{\mathbf{Y}}$, 则谱域 KL 变换的压缩率 R_{spe} 为

$$R_{\text{spe}} = \frac{M^2 K + LK + L}{M^2 L} \approx \frac{K}{L}。 \quad (6)$$

2.2 解码重构

完成空间域压缩采样、谱域 KL 变换编码和数据传输后, 接收端需要对编码数据进行解码重构。首先对接收数据进行谱域 KL 逆变换, 得到空间域压缩采样重构数据 $\hat{\mathbf{Y}}$, 即

$$\hat{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{P}^T + \bar{\mathbf{y}}, \quad (7)$$

然后重塑 $\hat{\mathbf{Y}}$ 的列向量, 得到各波段的空间域压缩采样数据 $\hat{\mathbf{Y}}_i$, 并设计重构算法求解(1)式, 得到各波段的二维重构图像 $\hat{\mathbf{X}}_i$, 最终恢复原始光谱图像。对于原始光谱图像波段 i 的图像 $\mathbf{X}_i \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 其在变换域 Ψ 内的稀疏表示为 $\mathbf{X}_i = \Psi\mathbf{W}_i\Psi^T$, 其中 \mathbf{W}_i 为稀疏信号, 因此(1)式可以表示为

$$\hat{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{A}\mathbf{X}_i\mathbf{B}^T = \Phi_1\mathbf{W}_i\Phi_2^T, \quad (8)$$

式中: $\Phi_1 = \mathbf{A}\Psi$; $\Phi_2 = \mathbf{B}\Psi$ 。利用 Kronecker 积将(8)式转化为向量形式^[8]

$$\hat{\mathbf{y}}_i = \Phi\mathbf{w}_i, \quad (9)$$

式中: $\hat{\mathbf{y}}_i = \text{vec}(\hat{\mathbf{Y}}_i) \in \mathbf{R}^{M^2}$ 和 $\mathbf{w}_i = \text{vec}(\mathbf{W}_i) \in \mathbf{R}^{N^2}$ 分别为由 $\hat{\mathbf{Y}}_i$ 和 \mathbf{W}_i 展成的向量; $\Phi = \Phi_2 \otimes \Phi_1 \in \mathbf{R}^{M^2 \times N^2}$, \otimes 为 Kronecker 积算子。根据 CS 理论, 可以通过求解以下最优化问题重构稀疏信号 \mathbf{w}_i , 即

$$\hat{\mathbf{w}}_i = \arg \min_{\mathbf{w}_i} \|\mathbf{w}_i\|_p, \quad \text{s.t.} \quad \hat{\mathbf{y}}_i = \Phi\mathbf{w}_i, \quad (10)$$

式中 $\|\cdot\|_p$ 为向量的 ℓ_p 范数。针对二维图像压缩采样重构问题, 最直接的方法是将二维图像展成一维向量进行压缩采样重构, 其重构模型如(10)式所示。该方法具有简单、直接和便于理解的优点, 但计算复杂度高, 所需的存储量极大; 另一种较为简单的方法是逐列压缩采样重构(CSC)^[9], 该方法将二维图像的每一列看作独立信号分别进行压缩采样重构; 基于分块压缩感知(BCS)的压缩采样重构方法^[10](简称 BCS 算法)则首先将二维图像分块向量化, 然后利用传统 CS 重构算法实现二维图像的重构, 能够在一定程度上节约存储量, 降低计算复杂度; 岑翼刚等^[11]提出了一种基于单层小波变换的 CS 图像算法, 在变换域内实现压缩采样重构, 再利用反变换得

到原始图像。上述方法的共同点是二维图像转换到一维向量空间, 然后基于经典 CS 理论实现二维图像重构, 具有结构简单的优点; 然而随着图像尺寸的增大, 这类方法的计算量以及需要的存储量都呈指数增长^[7], 在实际操作中, 通常需要对图像进行分块独立压缩采样重构; 不仅如此, 这种基于向量稀疏模型的图像处理方法还会破坏图像固有的空间结构, 不利于图像的精确重构。为此, 有学者提出在二维空间中直接以矩阵形式求解(8)式, 其重构模型为

$$\hat{\mathbf{W}}_i = \arg \min_{\mathbf{W}_i} \|\mathbf{W}_i\|_p, \quad \text{s.t.} \quad \hat{\mathbf{Y}}_i = \Phi_1\mathbf{W}_i\Phi_2^T。 \quad (11)$$

Fang 等^[12]将标准正交匹配追踪法(OMP)算法推广到二维空间, 在测量矩阵 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 时, 提出了采用矩阵形式直接求解模型(11)的 2D-OMP 算法^[13]。Wimalajeewa 等^[14]基于 ℓ_1 范数约束, 将快速迭代阈值收缩算法(FISTA)推广到二维空间, 提出了一种输入为矩阵的稀疏矩阵 2D-FISTA 重构算法, 并证明了 2D-FISTA 与一维 FISTA 算法的等效性, 及其在计算复杂度方面的优势^[15]。

根据 CS 理论, 图像的重建误差与稀疏逼近误差呈正比, 稀疏逼近误差可以描述为变换域内非显著系数的 ℓ_1 范数, 这表明更稀疏的线性表示可以减小重建误差, 因此合适的稀疏约束对提高重建质量十分关键。除变换域系数的稀疏性外, Candès 等^[2]指出大量自然图像的离散梯度都具有稀疏性, 光谱图像单波段二维图像可以看作是自然图像, 其离散梯度也具备稀疏性。同时, 天基预警探测这类应用场景中包含地球、大气、云层背景, 具有更平滑的纹理信息, 其离散梯度的稀疏性更明显。自然图像具备形态多样性, 为了更灵活地获取稀疏解, 本课题组在模型(11)的基础上加入全变分约束项, 构建二维图像复合正则重构模型, 并结合投影梯度法和软阈值收缩算子设计 2D-CRPG 图像重构算法。

定义二维图像 \mathbf{X}_i 在位置 (m, n) 处的元素为 $(\mathbf{X}_i)_{m,n}$, 则其列和行方向的离散梯度矩阵 \mathbf{X}_i^c 和 \mathbf{X}_i^r 在 (m, n) 处的元素分别为

$$(\mathbf{X}_i^c)_{m,n} = \begin{cases} (\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m-1,n}, & m > 1 \\ 0, & m = 1 \end{cases}, \quad (12)$$

$$(\mathbf{X}_i^r)_{m,n} = \begin{cases} (\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m,n-1}, & n > 1 \\ 0, & n = 1 \end{cases}。 \quad (13)$$

图像 \mathbf{X}_i 的全变分定义为

$$\text{TV}(\mathbf{X}_i) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \sqrt{(\mathbf{X}_i^r)_{m,n}^2 + (\mathbf{X}_i^c)_{m,n}^2}。 \quad (14)$$

\mathbf{X}_i 在变换域的系数矩阵为 $\mathbf{W}_i = \Psi^T \mathbf{X}_i \Psi$, 结合(14)式, 则新的代价函数为

$$G(\mathbf{X}_i) = \|\Psi^T \mathbf{X}_i \Psi\|_p + \alpha \text{TV}(\mathbf{X}_i), \quad (15)$$

式中: α 为权重因子, 用以平衡全变分约束与稀疏性约束。由此可以得到二维图像复合正则重构模型为

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \arg \min_{\mathbf{X}_i} G(\mathbf{X}_i), \quad \text{s.t.} \quad \hat{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{A} \mathbf{X}_i \mathbf{B}^T. \quad (16)$$

由于观测噪声在绝大多数情况下是不可避免的, 因此模型(16)可以修正为

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \arg \min_{\mathbf{X}_i} G(\mathbf{X}_i) \quad \text{s.t.} \quad \|\hat{\mathbf{Y}}_i - \mathbf{A} \mathbf{X}_i \mathbf{B}^T\|_F^2 \leq \epsilon, \quad (17)$$

式中: ϵ 为重构误差阈值; $\|\cdot\|_F$ 为 F 范数。

基于 ℓ_1 范数正则化, 利用拉格朗日乘子法将问题(17)转化为无约束最优化问题, 即

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \arg \min_{\mathbf{X}_i} f(\mathbf{X}_i) = \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{Y}}_i - \mathbf{A} \mathbf{X}_i \mathbf{B}^T\|_F^2 + \lambda G(\mathbf{X}_i) = f_1(\mathbf{X}_i) + \lambda [f_2(\mathbf{X}_i) + \alpha f_3(\mathbf{X}_i)], \quad (18)$$

式中: $f_1(\mathbf{X}_i) = \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{Y}}_i - \mathbf{A} \mathbf{X}_i \mathbf{B}^T\|_F^2$; $f_2(\mathbf{X}_i) = \|\Psi^T \mathbf{X}_i \Psi\|_1$, $\|\cdot\|_1$ 为 ℓ_1 范数; $f_3(\mathbf{X}_i) = \text{TV}(\mathbf{X}_i)$; λ 为拉格朗日乘子。利用梯度下降法求解(18)式, 其递推公式为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i^{k+1} &= \mathbf{X}_i^k - \mu \frac{\partial f(\mathbf{X}_i^k)}{\partial \mathbf{X}_i^k} = \mathbf{X}_i^k - \mu \left\{ \frac{\partial f_1(\mathbf{X}_i^k)}{\partial \mathbf{X}_i^k} + \lambda \left[\frac{\partial f_2(\mathbf{X}_i^k)}{\partial \mathbf{X}_i^k} + \alpha \frac{\partial f_3(\mathbf{X}_i^k)}{\partial \mathbf{X}_i^k} \right] \right\} = \\ & \mathbf{X}_i^k - \mu \frac{\partial f_1(\mathbf{X}_i^k)}{\partial \mathbf{X}_i^k} - \mu \lambda \frac{\partial f_2(\mathbf{X}_i^k)}{\partial \mathbf{X}_i^k} - \mu \lambda \alpha \frac{\partial f_3(\mathbf{X}_i^k)}{\partial \mathbf{X}_i^k} = \mathbf{X}_i^k - \mu g_1(\mathbf{X}_i^k) - \mu \lambda g_2(\mathbf{X}_i^k) - \mu \lambda \alpha g_3(\mathbf{X}_i^k), \quad (19) \end{aligned}$$

式中: μ 为步长; \mathbf{X}_i^k 为第 k 步迭代值; k 为步数序号。

由于 $f_2(\mathbf{X}_i)$ 不可微, 因此直接求解(19)式非常困难, 可以采用迭代递推的方式求解。递推公式(19)式包含 $g_1(\mathbf{X}_i^k)$ 、 $g_2(\mathbf{X}_i^k)$ 和 $g_3(\mathbf{X}_i^k)$ 。其中: $g_1(\mathbf{X}_i^k)$ 用以确保 $\hat{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{A} \mathbf{X}_i^k \mathbf{B}^T$; $g_2(\mathbf{X}_i^k)$ 用以确保 \mathbf{X}_i^k 在变换域内的稀疏性; $g_3(\mathbf{X}_i^k)$ 用以确保 \mathbf{X}_i^k 具有较小的全变分; 沿着 $g_3(\mathbf{X}_i^k)$ 方向更新 \mathbf{X}_i^k 能够减小图像的全变分。在实际迭代过程中, 利用 $g_2(\mathbf{X}_i^k)$ 和 $g_3(\mathbf{X}_i^k)$ 完成 \mathbf{X}_i^k 更新后, 不必再沿着 $g_1(\mathbf{X}_i^k)$ 更新 \mathbf{X}_i^k , 而是直接在 $\hat{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{A} \mathbf{X}_i^k \mathbf{B}^T$ 的解空间中搜索最终

解, 保证每次迭代结束后得到的 \mathbf{X}_i^k 均满足 $\hat{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{A} \mathbf{X}_i^k \mathbf{B}^T$ 。结合 ℓ_1 范数和全变分最小化约束, 重构原始图像 \mathbf{X}_i 的迭代算法包括如下 4 个步骤。

1) 初始化。初始值 \mathbf{X}_i^0 为 $\hat{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{A} \mathbf{X}_i \mathbf{B}^T$ 的最小二乘最小范数解, 其表达式为

$$\mathbf{X}_i^0 = \mathbf{A}^\# \mathbf{Y} (\mathbf{B}^\#)^T, \quad (20)$$

式中 $\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$ 和 $\mathbf{B}^\# = \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{B}^T)^{-1}$ 分别为矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的右伪逆矩阵。

2) 全变分梯度下降。基于(14)式中的定义, 全变分 $\text{TV}(\mathbf{X}_i)$ 关于 \mathbf{X}_i 的偏导数为

$$\left. \frac{\partial \text{TV}(\mathbf{X}_i)}{\partial \mathbf{X}_i} \right|_{m,n} = \begin{cases} \text{sgn}[(\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m,n+1}] + \text{sgn}[(\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m+1,n}], & m = 1, n = 1 \\ \text{sgn}[(\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m,n+1}] + \text{sgn}[(\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m,n-1}] + tv_1, & m = 1, 2 \leq n \leq N-1 \\ \text{sgn}[(\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m,n-1}] + tv_1, & m = 1, n = N \\ \text{sgn}[(\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m+1,n}] + \text{sgn}[(\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m-1,n}] + tv_2, & 2 \leq m \leq N-1, n = 1 \\ \text{sgn}[(\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m-1,n}] + tv_2, & m = N, n = 1 \\ tv_1 + tv_2 + tv_3, & 2 \leq m \leq N, 2 \leq n \leq N \end{cases}, \quad (21)$$

式中: $\left. \frac{\partial \text{TV}(\mathbf{X}_i)}{\partial \mathbf{X}_i} \right|_{m,n}$ 为导数矩阵 m 行 n 列的元素; tv_1 、 tv_2 和 tv_3 的表达式分别为 $tv_1 = [(\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m+1,n}] / \{\sqrt{[(\mathbf{X}_i)_{m+1,n} - (\mathbf{X}_i)_{m,n}]^2 + [(\mathbf{X}_i)_{m+1,n} - (\mathbf{X}_i)_{m+1,n-1}]^2} + \delta\}$ 、 $tv_2 = [(\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m,n+1}] / \{\sqrt{[(\mathbf{X}_i)_{m,n+1} - (\mathbf{X}_i)_{m,n}]^2 + [(\mathbf{X}_i)_{m,n+1} - (\mathbf{X}_i)_{m-1,n+1}]^2} + \delta\}$ 、 $tv_3 = [2(\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m-1,n} - (\mathbf{X}_i)_{m,n-1}] / \{\sqrt{[(\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m-1,n}]^2 + [(\mathbf{X}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m,n-1}]^2} + \delta\}$, 其中 δ 为极小的正数, 用以避免出现分母为 0 的情况。需要注意的是, 当 $2 \leq m \leq N$, $2 \leq n \leq N$ 时, 若 tv_1 、 tv_2 和 tv_3 中某一项下标溢出, 则该项置为 0。此时, 全变分梯度下降表达式为

$$\hat{\mathbf{X}}_i^k = \mathbf{X}_i^k - \mu\lambda\alpha \frac{\partial \text{TV}(\mathbf{X}_i)}{\partial \mathbf{X}_i}. \quad (22)$$

3) 软阈值收缩。完成梯度下降更新后,为了避免阈值分割时产生局部抖动,利用软阈值收缩算子保证 $\hat{\mathbf{X}}_i^k$ 在变换域内的稀疏性。首先计算 $\hat{\mathbf{X}}_i^k$ 在变换域 Ψ 内的系数矩阵

$$\hat{\mathbf{W}}_i^k = \Psi^T \hat{\mathbf{X}}_i^k \Psi; \quad (23)$$

然后对系数矩阵 $\hat{\mathbf{W}}_i^k$ 进行阈值分割,将小于阈值 η 的元素置为 0,大于阈值的元素则向原点收缩,即

$$\tilde{\mathbf{W}}_i^k = \text{shrink}(\hat{\mathbf{W}}_i^k, \eta), \quad (24)$$

算子 $\text{shrink}(\hat{\mathbf{W}}_i^k, \eta)$ 第 m 行第 n 列的元素为

$$\text{shrink}(\hat{\mathbf{W}}_i^k)_{m,n} = \text{sgn}[(\hat{\mathbf{W}}_i^k)_{m,n}] \max\{ |(\hat{\mathbf{W}}_i^k)_{m,n}| - \eta, 0 \}; \quad (25)$$

最后基于阈值分割后的系数矩阵 $\tilde{\mathbf{W}}_i^k$, 利用反变换得到重构信号 $\tilde{\mathbf{X}}_i^k$, 即

$$\tilde{\mathbf{X}}_i^k = \Psi \tilde{\mathbf{W}}_i^k \Psi^T. \quad (26)$$

4) 解空间投影。经过全变分梯度下降和软阈

值收缩处理后得到的 $\tilde{\mathbf{X}}_i^k$ 具有更小的全变分,在变换域内为稀疏,但其偏离真实的解空间,因此需要在 $\tilde{\mathbf{X}}_i^k$ 附近搜索满足 $\hat{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{A}\mathbf{X}_i\mathbf{B}^T$ 的解,其实质是用 $\tilde{\mathbf{X}}_i^k$ 在解空间的投影更新 $\tilde{\mathbf{X}}_i^k$ 。可以通过求解最优化问题实现上述投影,即

$$\mathbf{X}_i^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{X}_i^{k+1}} \|\mathbf{X}_i^{k+1} - \tilde{\mathbf{X}}_i^k\|_{\text{F}}^2, \quad \text{s.t.} \quad \hat{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{A}\mathbf{X}_i^{k+1}\mathbf{B}^T. \quad (27)$$

最终利用拉普拉斯方法求解(27)式,并将其作为本次迭代的结果,即

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i^{k+1} &= \tilde{\mathbf{X}}_i^k - (\tilde{\mathbf{X}}_i^k - \mathbf{X}_i^{k+1}) = \\ &= \tilde{\mathbf{X}}_i^k - [\mathbf{A}^\# \mathbf{A} \tilde{\mathbf{X}}_i^k \mathbf{B}^T (\mathbf{B}^\#)^T - \mathbf{A}^\# \mathbf{A} \tilde{\mathbf{X}}_i^{k+1} \mathbf{B}^T (\mathbf{B}^\#)^T] = \\ &= \tilde{\mathbf{X}}_i^k - [\mathbf{A}^\# \mathbf{A} \tilde{\mathbf{X}}_i^k \mathbf{B}^T (\mathbf{B}^\#)^T - \mathbf{A}^\# \hat{\mathbf{Y}}_i (\mathbf{B}^\#)^T] = \\ &= \tilde{\mathbf{X}}_i^k - \mathbf{A}^\# (\mathbf{A} \tilde{\mathbf{X}}_i^k \mathbf{B}^T - \hat{\mathbf{Y}}_i) (\mathbf{B}^\#)^T. \end{aligned} \quad (28)$$

Daubechies 等^[16]证明了上述解空间投影既不会增大图像的全变分,也不会削弱软阈值收缩算子的作用,2D-CRPG 算法流程如图 1 所示。

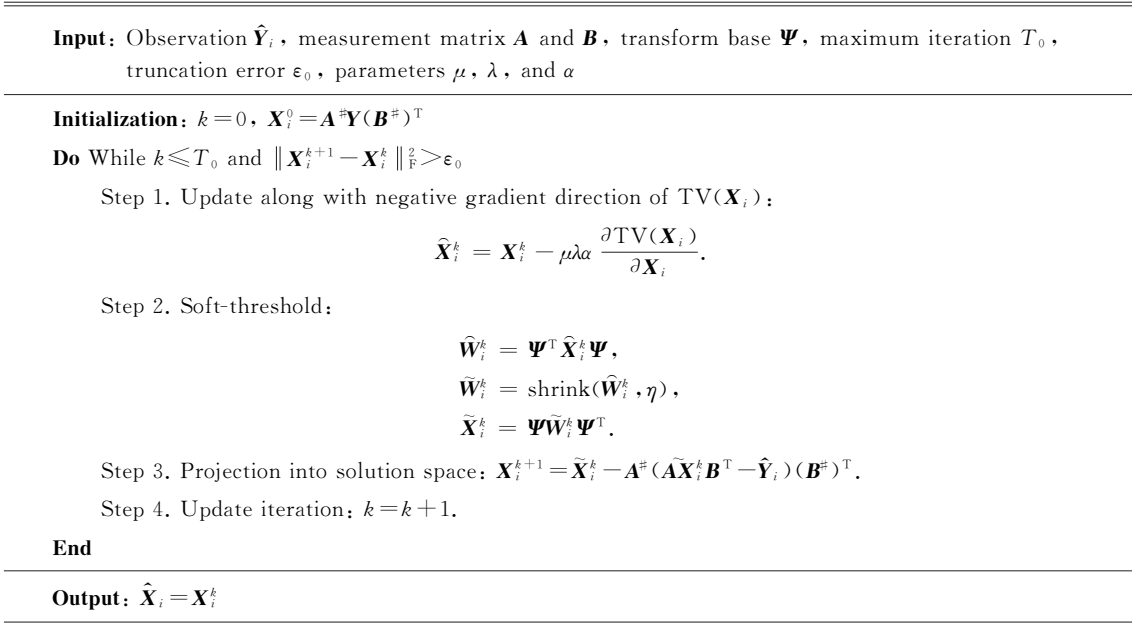


图 1 2D-CRPG 算法流程图

Fig. 1 Flow chart of 2D-CRPG algorithm

综上所述,所提 2D-CRPG 算法基于 2D-CRPG 算法和 KL 变换分别在空间域和光谱域进行编码和解码,具有结构简单和思路清晰的特点,其处理流程如图 2 所示。

3 实验与结果分析

选取天基预警探测场景下的合成数据 Our Data^[17]作为实验对象,其大小为 180×180 ,波长范

围为 $[2.5961 \sim 2.8137 \mu\text{m}, 4.0453 \sim 4.5998 \mu\text{m}]$,共 300 个波段。数据合成时考虑到观测系统的实际情况,在原始图像各波段添加随机高斯噪声作为仪器背景噪声和观测噪声,使得压缩采样数据为有噪采样。采用局部方差法计算各波段图像的信噪比(SNR),结果如图 3 所示。

将所提 2D-CRPG 算法与 BCS、CSC、2D-OMP 和 Kro-OMP 等算法进行比较,采用各波段重构图像的

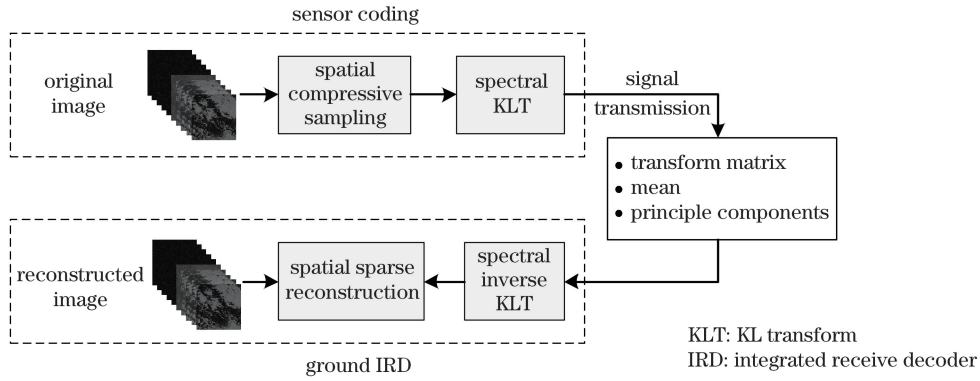


图 2 基于空域压缩采样和谱域 KL 变换的光谱成像

Fig. 2 Spectral imaging based on spatial compressive sampling and spectral KL transform

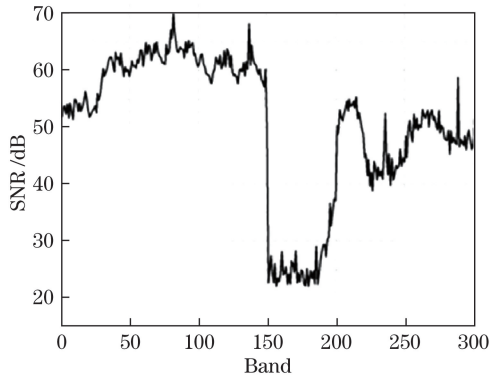


图 3 光谱图像各波段信噪比

Fig. 3 SNR of each band of spectral image

峰值信噪比(a_{PSNR})和均峰值信噪比(a_{APSNR})作为重构质量评价指标,给定波段 i 的原始图像 \mathbf{X}_i 和重建图像 $\hat{\mathbf{X}}_i$, 则 $a_{\text{PSNR}_i} = 20 \lg \frac{\max\{\mathbf{X}_i\}}{x_{\text{RMSE}_i}}$, $a_{\text{APSNR}} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L a_{\text{PSNR}_i}$,

其中 $x_{\text{RMSE}_i} = \sqrt{\frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [(\hat{\mathbf{X}}_i)_{m,n} - (\mathbf{X}_i)_{m,n}]^2}$ 为均方根误差。

对于波段 i 的二维图像 $\mathbf{X}_i \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 当空间采样率 R_{spa} 确定后, 利用 2D-CRPG 算法进行压缩采样重构时, 测量矩阵需要满足 $M = \sqrt{R_{\text{spa}}} N$ 。为此, 首先生成服从正态分布 $N(0, 1/M)$ 的 $N \times N$ 型随机高斯矩阵并进行标准正交化, 然后从中随机选取 M 行构造次高斯矩阵作为测量矩阵。图 4 所示为 KL 变换特征值保留个数较少 ($K = 10$) 和较多 ($K = 150$) 条件下, 不同空间采样率 (40% ~ 90%) 时 2D-CRPG 算法重构数据各波段的峰值信噪比 (PSNR)。由图 4 可知, 当特征值保留个数较少时, 随着空间采样率的增大, 重构数据的 PSNR 增幅较小, 特别是在 PSNR 相对较高的波段 (波段 1 ~ 150), 重构质量几乎不变。原因是过小的谱域压缩率会限制空间编码数据的重构质量, 使得通过增大空间采样率来提升重构质量的

做法失效。当特征值保留个数较多时, 随着空间采样率的增大, 所有波段的 PSNR 均明显增大, 数据的重构质量明显提升, 并且空间采样率越大, 重构质量的提升幅度越大。这是因为较大的谱域压缩率能够有效恢复光谱图像的空间编码信息, 所以为通过增大空间采样率来提升重构质量留有更多余地。

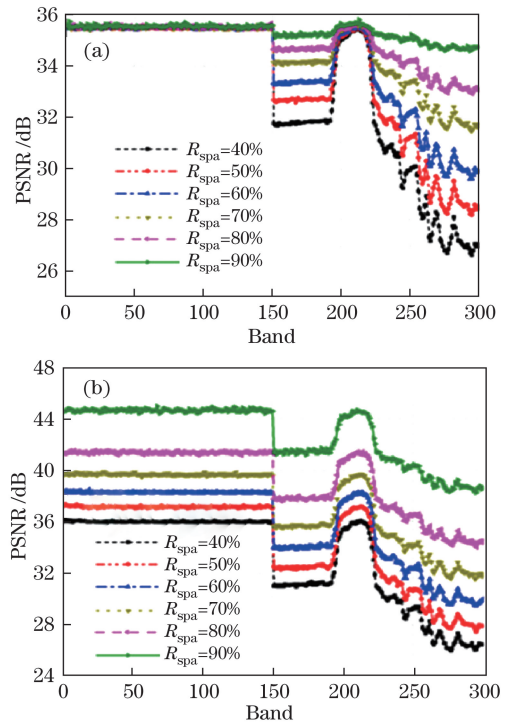


图 4 不同 R_{spa} 时 2D-CRPG 算法重构光谱图像各波段的 PSNR。(a) $K = 10$; (b) $K = 150$

Fig. 4 PSNR of each band of reconstructed spectral image for 2D-CRPG algorithm with different R_{spa} .

(a) $K = 10$; (b) $K = 150$

图 5 所示为在 $K = 150$ 的条件下, 不同空间采样率 R_{spa} 时最好和最坏的二维图像重构结果。由图 5 可以直观地比较空间采样率对 2D-CRPG 算法重构性能的影响。

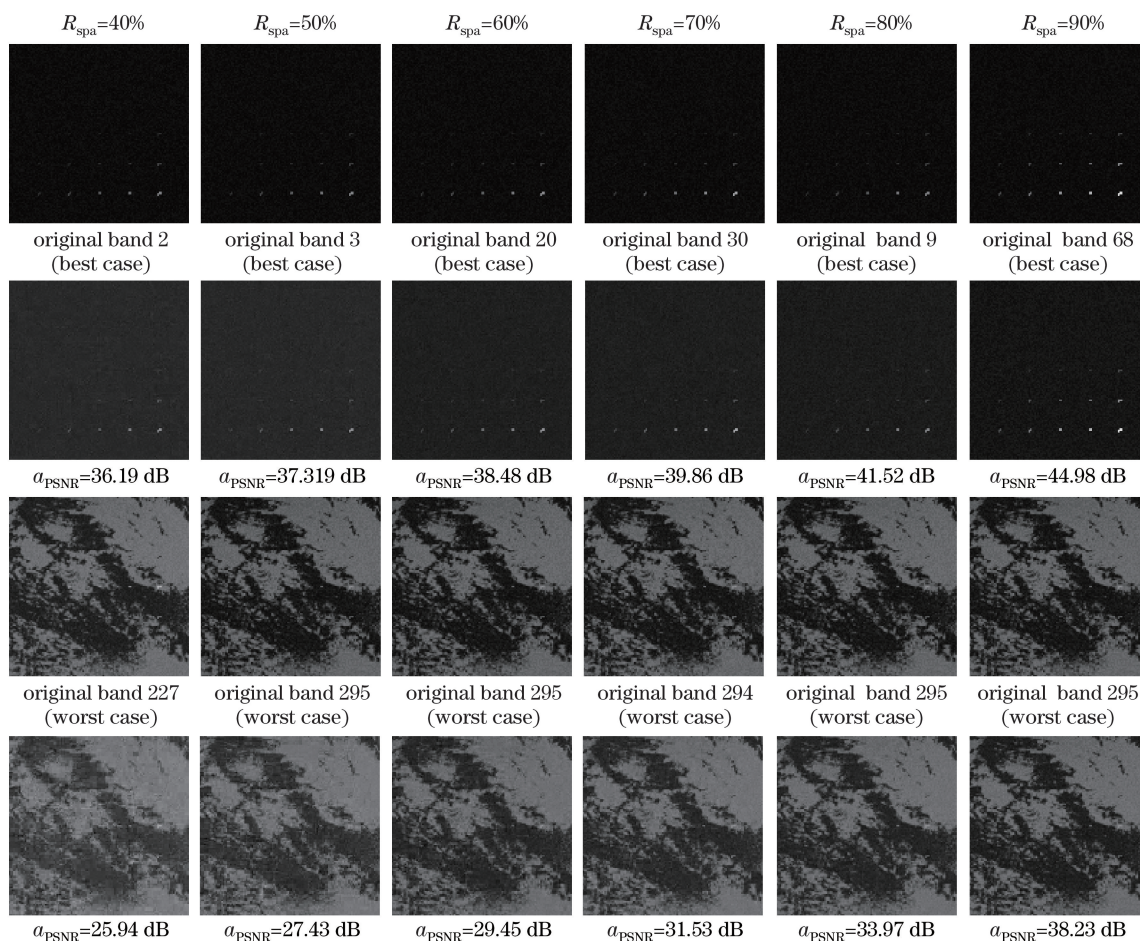


图 5 $K = 150$ 条件下 2D-CRPG 算法在不同 R_{spa} 时的二维图像重构效果

Fig. 5 Two-dimensional image reconstruction effect of 2D-CRPG algorithm with different R_{spa} under condition of $K = 150$

为了分析谱间压缩率对重构质量的影响,在空间采样率 R_{spa} 为 40% 和 90% 的条件下,考察不同 KL 变换特征值保留个数时 2D-CRPG 算法重构数据各波段的 PSNR,结果如图 6 所示。由图 6 可知,当空间采样率较小(40%)且 KL 变换特征值保留个数足够多时,随着 K 的增大,各波段的 PSNR 变化极小。当空间采样率较大(为 90%)时,随着 K 的增大,各波段的 PSNR 略有增长, K 从 10 增至 60 时,PSNR 的总增长幅度约为 1 dB。由上述分析可知,基于空间域压缩采样和谱域 KL 变换编码进行光谱图像压缩采样和解码重构时,若 KL 变换编码丢失的空间编码信息过多,即使增大空间采样率,光谱图像重构质量的改善也有限。在编码端,当空间采样率确定后,需要确定合适的特征值保留个数,以保证重构质量。而无论空间采样率是大还是小,当 K 大于该值之后,继续增大 K 对于重构质量的提升作用十分有限。因此,在重构质量和数据压缩率的双重约束下,要想用较小的数据压缩率获得可靠的重构效果,不仅要整体上平衡数据压缩率与重构质量,

还要具体考虑空间采样率与谱域压缩率之间的关系,及其对数据重构的影响,并据此优化整体的数据压缩率,而不是一味地减小空间或谱域压缩率。同时对图 3、图 4 和图 6 可知,重构图像绝大多数波段 PSNR 变化的趋势与信噪比的变化趋势基本一致。特别是波段 1~250,信噪比较高的波段对应的重构质量也较好;在波段为 150、192 和 220 时,随着信噪比的急剧变化,重构图像的 PSNR 也明显变化,这说明二维图像的重构质量与实际观测系统的噪声水平关系密切。

选择 $K = 150$ 以充分保留空间编码信息,考察不同算法在不同空间采样率时的二维图像重构性能。实验中,CSC 方法对图像进行逐列重构,BCS 算法则将图像划分成 9 个大小为 $(N/3) \times (N/3)$ 的子块,每个子块向量化后为 $N^2/9 \times 1$ 维的向量,采用相同的测量矩阵对每个子块进行压缩采样,2D-OMP 和 Kro-OMP 算法则采用与 2D-CRPG 算法相同的测量矩阵构造方法。实验要求各种重构方法的空间采样率相同,以保证重构性能的可比性。因此,

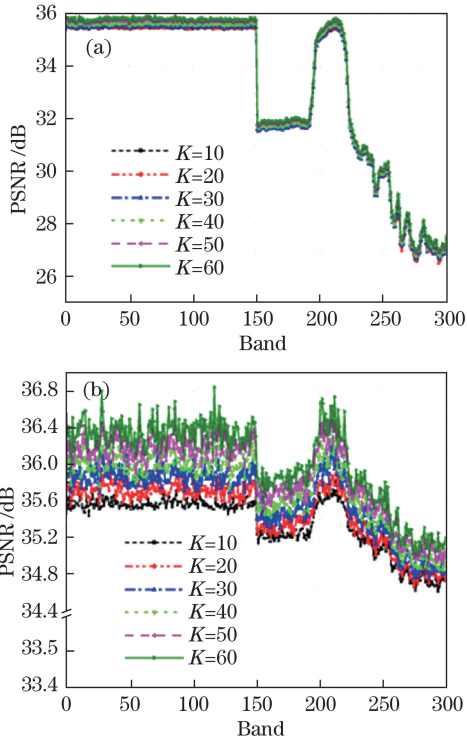


图 6 不同 K 值时 2D-CRPG 算法重构光谱图像各波段的 PSNR。(a) $R_{spa} = 40\%$; (b) $R_{spa} = 90\%$
 Fig. 6 PSNR of each band of reconstructed spectral image for 2D-CRPG algorithm with different K values.
 (a) $R_{spa} = 40\%$; (b) $R_{spa} = 90\%$

BCS 测量矩阵为 $(M^2/9) \times (N^2/9)$ 型, CSC 测量矩阵为 $M^2/N \times N$ 型。实验中,采用离散小波变换基作为稀疏基,2D-CRPG 算法参数设置为 $K_0 = 10^3$, $\epsilon_0 = 10^{-3}$, $\mu = 2$, $\lambda = 0.1$, $\alpha = 0.5$, CSC 和 BCS 的稀疏度为观测值长度的 $1/4$,而对于 Kro-OMP 和 2D-OMP,其稀疏度为 $M^2/4$ 。同时,为了减小测量矩阵随机性对重构效果的影响,每组实验重复 10 次,取平均值作为最终结果。

当空间采样率 R_{spa} 取 $40\% \sim 90\%$ 时,BCS、CSC、2D-OMP、Kro-OMP 和 2D-CRPG 这 5 种算法重构光谱图像各波段的 PSNR 如图 7 所示。图 8 和图 9 所示分别为空间采样率 R_{spa} 较小(40%)和较大(90%)时,5 种算法重构光谱图像的假色图。由图 7 可知,5 种算法的重构质量都随着空间采样率的增大而逐渐提高,2D-CRPG 算法在各种空间采样率下总能获得比其他 4 种算法更好的重构性能,而 Kro-OMP 算法的重构性能总是最差。由图 8 可知,当空间采样率较小时,BCS、CSC、2D-OMP 和 Kro-OMP 这 4 种算法的均峰值信噪比 (APSNR) 均小于 29 dB,而 2D-CRPG 算法的 APSNR 为 33.14 dB。同时可以直观地看出,由于采样率较小,5 种算法的重构图像与原始图像之间都存在差异,BCS、CSC、2D-OMP 和 Kro-OMP 这 4 种算法的重构图像都出现

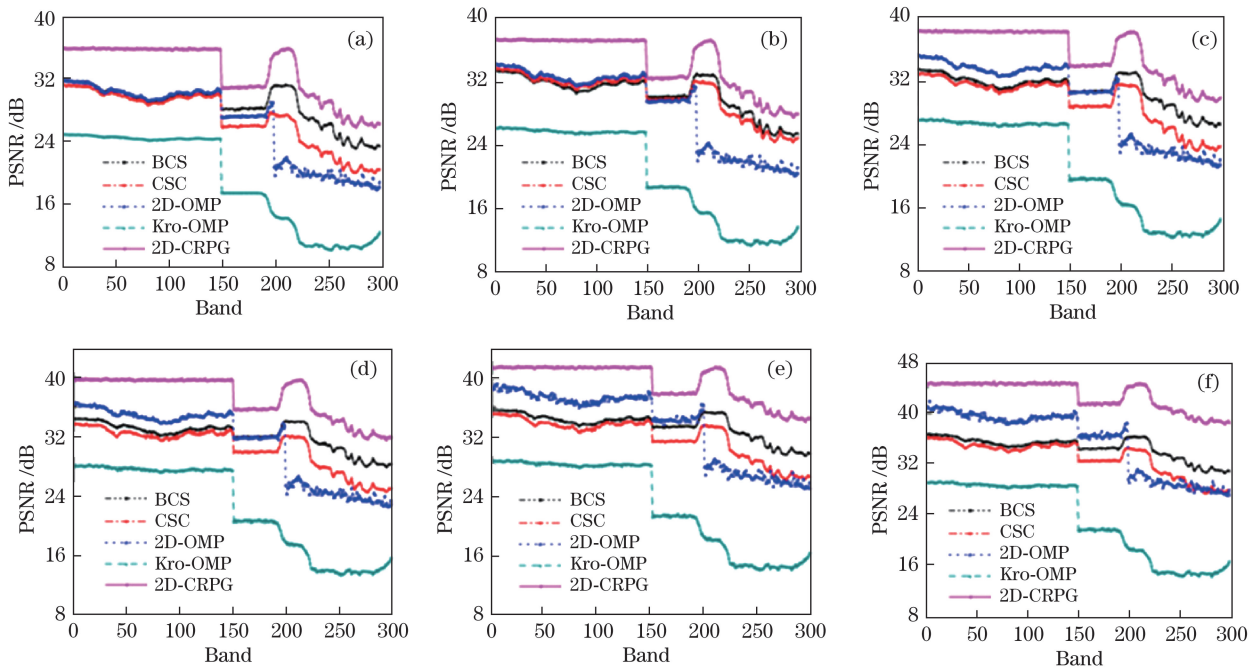


图 7 不同算法重构光谱图像各波段的 PSNR。(a) $R_{spa} = 40\%$; (b) $R_{spa} = 50\%$; (c) $R_{spa} = 60\%$;
 (d) $R_{spa} = 70\%$; (e) $R_{spa} = 80\%$; (f) $R_{spa} = 90\%$
 Fig. 7 PSNR of each band of reconstructed spectral image for different algorithms. (a) $R_{spa} = 40\%$; (b) $R_{spa} = 50\%$;
 (c) $R_{spa} = 60\%$; (d) $R_{spa} = 70\%$; (e) $R_{spa} = 80\%$; (f) $R_{spa} = 90\%$

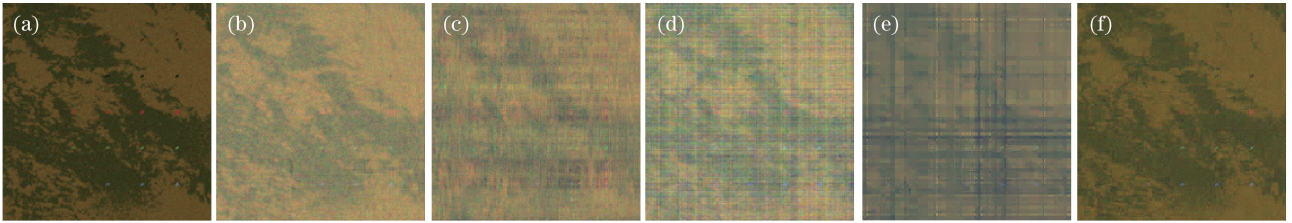


图 8 $R_{spa} = 40\%$ 时不同算法重构光谱图像的假色图(波段 250、222、10)。(a) 原图; (b) BCS, $a_{APSNR} = 28.86$ dB; (c) CSC, $a_{APSNR} = 27.08$ dB; (d) 2D-OMP, $a_{APSNR} = 26.41$ dB; (e) Kro-OMP, $a_{APSNR} = 19.05$ dB; (f) 2D-CRPG, $a_{APSNR} = 33.14$ dB

Fig. 8 False color images of reconstructed spectral images for different algorithms with $R_{spa} = 40\%$ (bands 250, 222, 10).

(a) Original image; (b) BCS, $a_{APSNR} = 28.86$ dB; (c) CSC, $a_{APSNR} = 27.08$ dB; (d) 2D-OMP, $a_{APSNR} = 26.41$ dB; (e) Kro-OMP, $a_{APSNR} = 19.05$ dB; (f) 2D-CRPG, $a_{APSNR} = 33.14$ dB

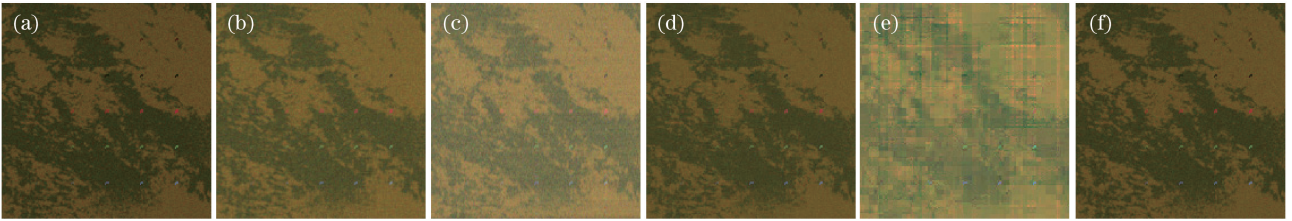


图 9 $R_{spa} = 90\%$ 时不同方法重构光谱图像的假色图(波段 250、222、10)。(a) 原图; (b) BCS, $a_{APSNR} = 34.54$ dB; (c) CSC, $a_{APSNR} = 32.95$ dB; (d) 2D-OMP, $a_{APSNR} = 35.41$ dB; (e) Kro-OMP, $a_{APSNR} = 23.10$ dB; (f) 2D-CRPG, $a_{APSNR} = 42.81$ dB

Fig. 9 False color images of reconstructed spectral images for different algorithms with $R_{spa} = 90\%$ (bands 250, 222, 10).

(a) Original image; (b) BCS, $a_{APSNR} = 34.54$ dB; (c) CSC, $a_{APSNR} = 32.95$ dB; (d) 2D-OMP, $a_{APSNR} = 35.41$ dB; (e) Kro-OMP, $a_{APSNR} = 23.10$ dB; (f) 2D-CRPG, $a_{APSNR} = 42.81$ dB

了严重的模糊,并且后两者的重构图像中还出现了明显的条纹。相比较而言,运用 2D-CRPG 算法能够较好地保存图像的结构信息。由图 9 可知,当空间采样率足够大时,尽管程度有所降低,但 BCS、CSC、2D-OMP 和 Kro-OMP 这 4 种算法的重构图像依然存在明显的模糊,并且 Kro-OMP 算法重构图像中的条纹依然明显,而运用 2D-CRPG 算法则能够有效地保存光谱图像的结构信息,得到与原始光谱图像几乎相同的重构图像。同时,由图 8 和图 9 可知,由于各波段重构图像与原始图像之间存在差异,因此重构图像假色图的整体灰度有所改变。2D-CRPG 算法的重构质量最优,相对于其他 4 种算法,其灰度的整体变换程度最小,与原始图像最接近。

不同算法的 APSNR 随空间采样率 R_{spa} 变化的关系如图 10 所示。由图 10 可知,随着空间采样率的增大,各种算法的 APSNR 都逐渐增大。相比较而言,Kro-OMP 算法的重构性能较差,BCS、CSC 和 2D-OMP 这 3 种算法的重构性能相近,而 2D-CRPG 算法的重构性能则明显最优,其 APSNR 总是大于其他 4 种算法的 APSNR。

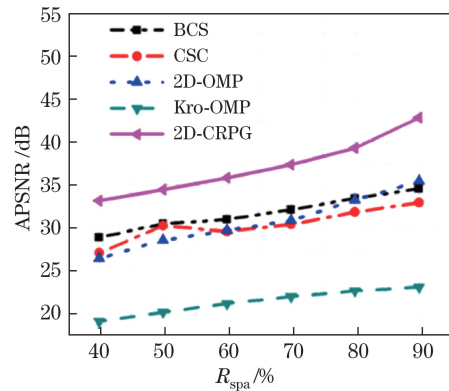


图 10 不同 R_{spa} 时不同算法的 APSNR

Fig. 10 APSNR of different algorithms with different R_{spa}

4 结 论

利用光谱图像的空间稀疏性和谱间冗余,从应用方法的角度提出了基于空域压缩采样和谱域 KL 变换的光谱图像重构方法,该方法能够有效降低数据采样成本,有利于天基预警探测光谱成像。同时重点研究了二维图像复合正则重构模型的求解问题,结合投影梯度法和软阈值收缩算子提出了 2D-CRPG 算法,该重构算法能够有效保留光谱图像

的结构信息,在有限的采样率下能较好地重构出原始光谱图像。

参 考 文 献

- [1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [3] Wang Q, Ma L L, Li C R, *et al.* Improved method of dictionary atom selection in compressive sensing spectral reconstruction[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(9): 0930002.
汪琪, 马灵玲, 李传荣, 等. 压缩感知光谱重构中的字典原子选取优化方法[J]. 光学学报, 2016, 36(9): 0930002.
- [4] Jing N, Bi W H, Hu Z P, *et al.* A survey on dynamic compressed sensing[J]. Acta Automatica Sinica, 2015, 41(1): 22-37.
荆楠, 毕卫红, 胡正平, 等. 动态压缩感知综述[J]. 自动化学报, 2015, 41(1): 22-37.
- [5] Tan S Y, Liu Z T, Li E R, *et al.* Hyperspectral compressed sensing based on prior images constrained[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(8): 0811003.
谭诗语, 刘震涛, 李恩荣, 等. 基于先验图像约束的多光谱压缩感知[J]. 光学学报, 2015, 35(8): 0811003.
- [6] Yan J W, Liu L, Qu X B. Compressive sensing and its applications[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2015: 67-89.
闫敬文, 刘蕾, 屈小波. 压缩感知及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2015: 67-89.
- [7] Rivenson Y, Stern A. Compressed imaging with a separablesensing operator[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2009, 16(6): 449-452.
- [8] Wu Q, Zhou L J, Yin J F. Matrix analysis[M]. Shanghai: Tongji University Press, 2017: 54-58.
吴群, 周羚君, 殷俊锋. 矩阵分析[M]. 上海: 同济大学出版社, 2017: 54-58.
- [9] Li Z L. Study on image compressive sensing reconstruction algorithms[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2012: 95-109.
李志林. 图像压缩感知重建算法研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2012: 95-109.
- [10] Lu G. Block compressed sensing of natural images[C]// Proceedings of the 15th International Conference on Digital Signal Processing, 2007: 403-406.
- [11] Cen Y G, Chen X F, Cen L H, *et al.* Compressed sensing based on the single layer wavelet transform for image processing[J]. Journal on Communications, 2010, 31(8A): 52-55.
岑翼刚, 陈晓方, 岑丽辉, 等. 基于单层小波变换的压缩感知图像处理[J]. 通信学报, 2010, 31(8A): 52-55.
- [12] Fang Y, Wu J J, Huang B. 2D sparse signal recovery via 2D orthogonal matching pursuit[J]. Science China: Information Sciences, 2012, 55(4): 889-897.
- [13] Ghaffari A, Babaie-Zadeh M, Jutten C. Sparse decomposition of two dimensional signals[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2009: 3157-3160.
- [14] Wimalajeewa T, Eldar Y C, Varshney P K. Recovery of sparse matrices via matrix sketching [EB/OL]. (2013-11-11)[2017-11-20]. <http://arxiv.org/abs/1311.2448>.
- [15] Liao L, Zhang Y N, Zhang C. 2DCS: two dimensional random underdetermined projection for image representation and classification[C]// Proceedings of the International Conference on Multimedia Technology, 2011: 1-5.
- [16] Daubechies I, Fornasier M, Loris I. Accelerated projected gradient method for linear inverse problems with sparsity constraints[J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2008, 14(5/6): 764-792.
- [17] Tang Y D. Research on detection and classification method for compressive spectral imaging[D]. Xi'an: Air Force Engineering University, 2017: 75-89.
唐意东. 压缩感知光谱成像目标检测与分类识别方法研究[D]. 西安: 空军工程大学, 2017: 75-89.