

# 分段环形曲面的光学描述和设计方法

陈海龙<sup>1</sup>, 高阳<sup>3</sup>, 程德文<sup>1,2</sup>, 黄一帆<sup>1</sup>, 王涌天<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>北京理工大学光电学院, 北京 100081;

<sup>2</sup>北京市混合现实与新型显示工程技术研究中心, 北京 100081;

<sup>3</sup>北京航天计量测试技术研究所, 北京 100076

**摘要** 提出了分段环形曲面的面型描述及设计方法。提出了一种从非球面到分段环形曲面的高精度转换方法来建立初始曲面,并讨论了分段环形曲面的优化策略、实现方法和约束条件。将所设计分段环形曲面应用于一款超短焦投影物镜的设计和优化中,优化后的系统总长仅为 155 mm,最大畸变仅为 1.36%。研究结果表明,该新型曲面可以提高光学系统设计的自由度和灵活性。

**关键词** 光学设计; 面型描述; 分段曲面; 超短焦投影物镜

中图分类号 O435

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201838.0522002

## Optical Description and Design Method of Annularly Piecewise Surface

Chen Hailong<sup>1</sup>, Gao Yang<sup>3</sup>, Cheng Dewen<sup>1,2</sup>, Huang Yifan<sup>1</sup>, Wang Yongtian<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>School of Optics and Photonics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

<sup>2</sup>Beijing Engineering Research Center for Mixed Reality and Advanced Display Technology, Beijing 100081, China;

<sup>3</sup>Beijing Aerospace Institute of Metrology and Measurement Technology, Beijing 100076, China

**Abstract** The surface description and design methods of annularly piecewise surfaces are proposed. A high-precision transformation method from aspherical surface to annularly piecewise surface is proposed to construct an initial surface, and the optimization strategies, constraints and implementation methods for the annularly piecewise surface are discussed. This proposed surface is employed to design and optimize an ultra-short projection lens. The total length is 155 mm and the maximum distortion is 1.36% after optimization. The research results indicate that this annularly piecewise surface can improve the freedom and flexibility of optical design.

**Key words** optical design; surface description; piecewise surface; ultra-short projection lens

**OCIS codes** 220.3620; 220.4830; 080.2720

## 1 引 言

现代光学系统不仅需要具有优良的光学特性和成像质量,还需满足物理结构小型化、轻量化等要求,而传统的球面和非球面很难同时满足这些要求。随着光学元件加工效率和工艺精度的提高,Zernike 多项式曲面、多项式曲面、Forbes 曲面等自由曲面越来越多地应用在头盔显示<sup>[1]</sup>、全景镜头<sup>[2]</sup>、内窥物镜<sup>[3]</sup>等光学系统中。

合理的面型描述方法能够加快光学系统的优化进程,提高像差校正能力<sup>[4]</sup>,简化光学加工检测过

程,对建立新型的光学曲面具有十分重要的意义。面型描述方法的提出和改进是光学设计领域的研究热点之一。1997年,Sasian<sup>[5]</sup>提出了一种用于环形视场的环形曲面,设计出一种具有大数值孔径和优良成像质量的反射系统。2002年,Chase<sup>[6]</sup>将旋转对称的非均匀有理 B 样条(NURBS)曲面用于光学设计中,实现了对面型的局部控制和修改。2007年,Forbes<sup>[7]</sup>提出了一种旋转对称的非球面面型,它通过正交基函数定义偏离球面的非球面系数项,使各项系数均具有了物理含义。2008年,Cakmakci 等<sup>[8]</sup>提出了一种使用径向基函数来描述

收稿日期: 2017-09-11; 收到修改稿日期: 2018-01-05

基金项目: 国家 863 计划(2015AA016301)、2014 年“万人计划”青年拔尖人才支持计划

作者简介: 陈海龙(1994—),男,硕士研究生,主要从事光学曲面描述方面的研究。E-mail: chlazz@163.com

导师简介: 程德文(1982—),男,博士,教授,主要从事自由曲面光学系统、头盔显示方面的研究。

E-mail: cdwlxk@163.com(通信联系人)

光学曲面的方法,该方法具有优化速度快、像差校正能力强的特点。2015年,Cheng等<sup>[9]</sup>在非球面和环形面的基础上,设计了一种拼接非球面,该面型能在增加系统灵活性的同时降低表面加工和装调的难度。2017年,Yan等<sup>[10]</sup>在设计微型相机镜头时使用垂足曲线,在全视场内获得了更加平衡的成像质量。这些面型描述方法可以解决众多系统设计和加工中的问题,但不适用于超短焦投影等系统。

本文提出了一种分段环形曲面的描述方法,其描述的每段曲面相互独立,相邻曲面平滑连接,为光学系统的设计提供了更多的自由度。另外,基于非球面径向的曲率分布情况,进一步提出了一种从非球面到分段环形曲面的高精度转换方法,讨论了分段环形曲面的优化策略、实现方法和约束条件。最后将分段环形曲面应用于一款超短焦投影物镜的设计中,设计结果验证了分段环形曲面的可行性,显示出分段环形曲面自由度高、灵活性强的优势。

## 2 分段环形曲面的面型定义及曲面转换

### 2.1 分段环形曲面的面型定义

不连续的表面会导致杂光和波前不连续的问题,造成系统的成像质量下降,因此拼接曲面的边界应具有连续性。表面连续有如下两种定义。1) $C^0$ 连续,即前一段曲面的终点与后一段曲面的起点相同;2) $C^1$ 连续,即曲面连接处的一阶导数相同<sup>[11]</sup>。通常要求曲面 $C^1$ 连续,这样才能保证曲面在相接处保持光滑,不出现棱角。

多项式是光学设计中应用广泛的面型描述方法,其形式灵活,容易扩展,优化速度快。选择多项式来描述分段环形曲面中的各段曲面具有一定的优势。分段环形曲面的定义为

$$z = \begin{cases} a_1 r^3 + b_1 r^2 + c_1 r + d_1, & 0 < r \leq r_1 \\ a_2 r^3 + b_2 r^2 + c_2 r + d_2, & r_1 < r \leq r_2 \\ a_3 r^3 + b_3 r^2 + c_3 r + d_3, & r_2 < r \leq r_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}, \quad (1)$$

式中 $r$ 为径向距离,且 $r^2 = x^2 + y^2$ ,其中 $x, y, z$ 为三维坐标; $r_i (i=1, 2, 3, \dots)$ 为不同环形曲面的内外半径; $a_i, b_i, c_i, d_i (i=1, 2, 3, \dots)$ 为不同曲面的多项式系数。每段曲面由一个三次多项式描述,同时要保证曲面满足 $C^1$ 连续条件,即相邻曲面相接且边

界处的一阶导数相等,即

$$\begin{cases} a_1 r_1^3 + b_1 r_1^2 + c_1 r_1 + d_1 = a_2 r_1^3 + b_2 r_1^2 + c_2 r_1 + d_2 \\ a_2 r_2^3 + b_2 r_2^2 + c_2 r_2 + d_2 = a_3 r_2^3 + b_3 r_2^2 + c_3 r_2 + d_3 \\ \vdots \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 3a_1 r_1^2 + 2b_1 r_1 + c_1 = 3a_2 r_1^2 + 2b_2 r_1 + c_2 \\ 3a_2 r_2^2 + 2b_2 r_2 + c_2 = 3a_3 r_2^2 + 2b_3 r_2 + c_3 \\ \vdots \end{cases} \quad (3)$$

### 2.2 从非球面到分段环形曲面的高精度转换方法

分段环形曲面每段曲面之间的参数相互独立,很难直接建立满足 $C^1$ 连续条件的初始曲面。从非球面出发,在考虑非球面径向曲率分布的基础上,这里提出一种将非球面转换为满足 $C^1$ 连续条件的分段环形曲面的高精度转换方法,并证明在分段数确定的情况下,转换得到的满足 $C^1$ 连续条件的分段环形曲面存在且唯一。

非球面由二次曲面基底和形变量组成,其面型定义为

$$z = \frac{cr^2}{1 + [1 - (1+k)c^2 r^2]^{1/2}} + Ar^4 + Br^6 + Cr^8 + \dots, \quad (4)$$

式中 $c$ 为曲面曲率, $k$ 为二次曲面常数, $A, B, C$ 等为非球面的形变系数。

如图1所示,曲线 $S$ 为任意非球面在 $YOZ$ 平面的轨迹线,将曲线 $S$ 分为若干段,任取相邻两点 $A$ 和 $B$ ,根据(4)式可得到 $A, B$ 两点的坐标和一阶导数分别为 $(y_1, z_1, dz_1/dy_1), (y_2, z_2, dz_2/dy_2)$ 。使用三次多项式曲线 $z(y) = ay^3 + by^2 + cy + d$  ( $a, b, c, d$ 为多项式系数)对 $AB$ 段进行三次 Hermite 插值,即令

$$\begin{cases} z_1 = ay_1^3 + by_1^2 + cy_1 + d \\ z_2 = ay_2^3 + by_2^2 + cy_2 + d \\ dz_1/dy_1 = 3ay_1^2 + 2by_1 + c \\ dz_2/dy_2 = 3ay_2^2 + 2by_2 + c \end{cases} \quad (5)$$

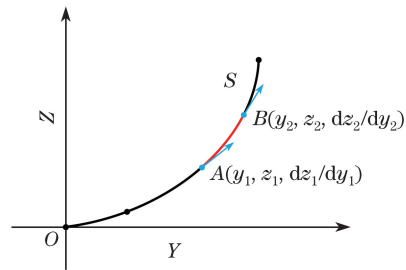


图1 曲面转换的示意图

Fig. 1 Schematic of surface transformation

将(5)式转化成矩阵形式为

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C} \times \mathbf{b}, \quad (6)$$

$$\text{式中 } \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ dz_1 \\ dz_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} y_1^3 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^3 & y_2^2 & y_2 & 1 \\ 3y_1^2 & 2y_1 & 1 & 0 \\ 3y_2^2 & 2y_2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

对系数矩阵  $\mathbf{C}$  进行初等变换, 变为行阶梯形式:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} y_1^3 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ 0 & -y_1 & -2 & -\frac{3}{y_1} \\ 0 & 0 & \frac{(y_1-y_2)(y_1-3y_2)}{y_1^2} & -\frac{6y_2(y_1-y_2)}{y_1^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(y_1-y_2)^3}{y_1^2(y_1-3y_2)} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

根据图 1, 由于  $y_2$  大于  $y_1$  且均大于 0, 而  $(y_1 - 3y_2)$ 、 $(y_1 - y_2)$  均不为零, 故矩阵  $\mathbf{C}$  的秩恒为 4。因而(5)式的解存在且唯一, 即三次多项式的系数矩阵  $\mathbf{b}$  存在且唯一:

$$\mathbf{b} = \mathbf{C}^{-1} \times \mathbf{Z}. \quad (8)$$

重复上述过程即可得到满足  $C^1$  连续条件的分段环形曲面。

从非球面到分段环形曲面的转换过程会产生误差。在转换区域及分段数确定的情况下, 分段点位置的选择对转换误差有很大影响。对于比较平滑的非球面, 均匀分段方法的转换误差不大, 但当非球面面型变化剧烈时会产生较大的转换误差。根据张栋海等<sup>[12]</sup>的研究可知, 描述曲线形状的信息集中在具有大曲率的特征点上。因此, 根据曲率的变化选择分段点位置会更合适, 但只考虑曲率进行分段可能会使小曲率处分段点的间隔过大, 导致局部转换误差增加, 影响转换精度。

为此, 在考虑非球面径向曲率分布的基础上, 提

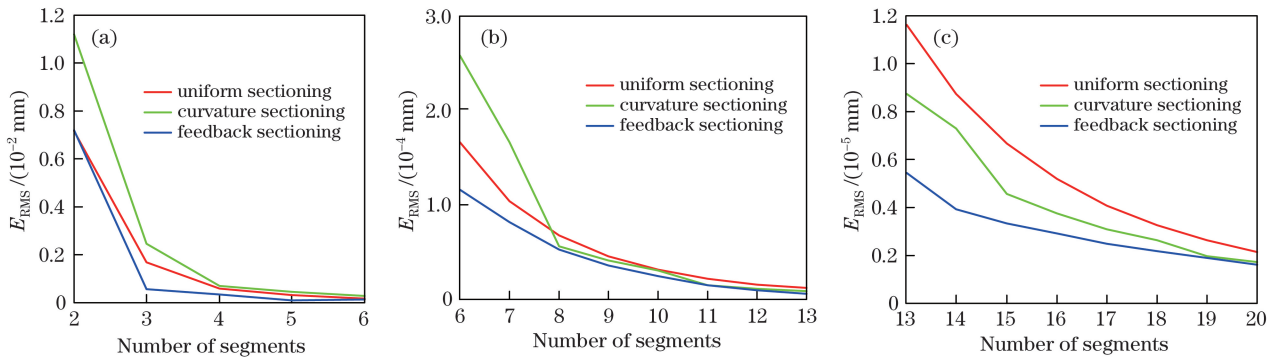


图 3 不同分段数下  $E_{\text{RMS}}$  曲线。(a) 2~6; (b) 6~13; (c) 13~20

Fig. 3  $E_{\text{RMS}}$  curves under different numbers of segments. (a) 2-6; (b) 6-13; (c) 13-20

出通过反馈调节对分段点位置进行调整的分段方法。首先根据非球面的曲率对分段点位置进行分布, 然后找到转换误差最大的区域, 对其两端分段点位置进行调整。这种反馈分段的方法, 能够根据非球面的曲率特性对分段点的位置进行分配, 降低从非球面到分段环形面的转换误差。

为具体分析三种分段方法对转换误差的影响, 分别采用三种不同的分段方法, 将图 2 中红色曲线所示的非球面转换为分段环形曲面, 并比较了不同分段方法的转换误差。

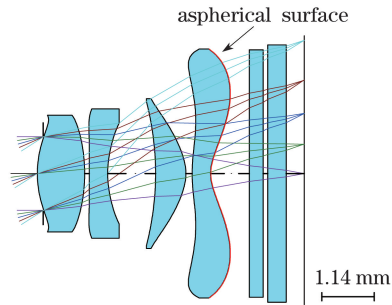


图 2 手机镜头的结构图

Fig. 2 Structural diagram of phone lens

转换误差采用均方根误差 ( $E_{\text{RMS}}$ ) 来评价, 其定义为

$$E_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^K \sigma_i^2}{K}}, \quad (9)$$

式中  $K$  为评价转换误差时沿曲面径向的采样点数量, 取  $K = 1000$ ;  $\sigma_i$  为半径  $r_i$  对应的非球面与分段环形曲面间的矢高差。

图 3 所示为采用不同分段方法得到的分段环形曲面的  $E_{\text{RMS}}$  对比图, 可以看出, 在分段数为 2~7 时, 考虑曲率分段的  $E_{\text{RMS}}$  值大于均匀分段的; 在分段数为 8~20 时, 均匀分段的  $E_{\text{RMS}}$  值大于考虑曲率分段的。在不同的分段数下, 反馈分段的  $E_{\text{RMS}}$  值一

直保持最小,当分段数较小时尤为明显。通过对三种分段方法的比较,可以看出,反馈分段方法可以显著减小转换误差,实现从非球面到分段环形曲面的高精度转换。

### 3 分段环形曲面的优化策略、实现方法及约束条件

在进行优化设计前,首先根据转换误差和设计的要求,将非球面转换为分段环形曲面。优化过程中增加约束条件以保证曲面始终满足  $C^1$  连续条件。

采用 CODE V 软件中自带的用户自定义面型(UDS)实现分段环形曲面的建立和优化<sup>[13]</sup>。为了在优化过程中保证曲面符合  $C^1$  连续条件,需要对曲面设置特殊约束,其伪代码为

$$C_{OE1} = 0, \quad (10)$$

$$W = C_{OE2} - C_{OE3} = 0, \quad (11)$$

式中  $C_{OE1}$  为相邻曲面边界两侧的矢高差,  $C_{OE2}$  和  $C_{OE3}$  分别为相邻曲面边界处内侧和外侧区域的一阶导数值。

### 4 超短焦投影物镜的设计

为证明分段环形曲面的可行性并显示其优势,使用分段环形曲面设计了一款超短焦投影物镜,并在设计过程中展示了其优化策略和实现方法。

#### 4.1 超短焦投影物镜

超短焦投影物镜可以在超短距离内实现大屏幕投影<sup>[14]</sup>,一般采用折反式结构<sup>[15]</sup>。在设计中普遍采用非球面或自由曲面反射镜<sup>[16]</sup>实现小的投射比,超短焦投影物镜的投射比一般在 0.6 以下<sup>[17]</sup>。所设计的超短焦投影系统的参数见表 1,其中  $F$  number 表示光圈数。

表 1 超短焦投影物镜的性能参数  
Table 1 Performance parameters of ultra-short projection lens

Parameter	Value
Digital micro-mirror device size (diagonal)	16.51 mm
Screen size (diagonal)	2032 mm
Projection distance / mm	590
Throw ratio	0.29
$F$ number	3
Distortion	<2%
Modulation transfer function	>30% @ 66 lp/mm
Telecentricity / (°)	<3

#### 4.2 投影物镜的初始结构

选取美国专利 US7957078<sup>[18]</sup> 中的结构作为系统的初始结构,如图 4 所示。该系统包含 5 个非球面,总体长度为 220 mm,结构复杂。同时有效视场角小,仅为  $51^\circ$ ,投射比值大。需要进一步优化以实现一个紧凑、简单且投射比更小的超短焦投影物镜。设计时,首先在普通非球面的基础上对系统进行初步优化,再将非球面 S2 转换为分段环形曲面进行进一步优化。

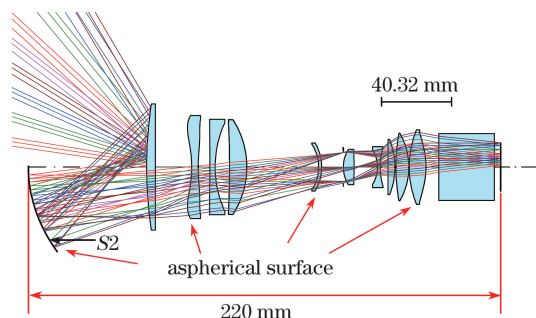


图 4 初始结构的光路

Fig. 4 Optical path of initial structure

如图 5(a) 所示,在优化过程中,由于系统 S1 面的上半部分需反射光线,下半部分需透射光线,在设计时容易在边界处发生光线的交叠和遮挡,出现部分视场的光线无法正常通过光学系统的情况。因此在优化中,需约束反射光线在 S1 面的最小高度大于透射光线在 S1 表面的最大高度,图 5(b) 所示为解决光线重叠问题后的光路。

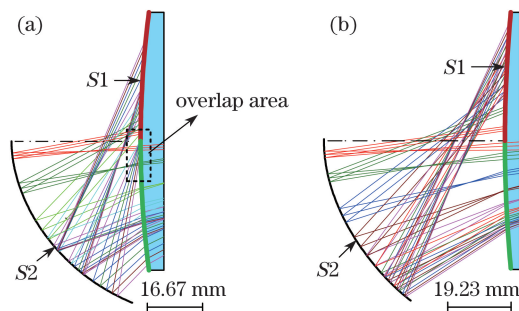


图 5 (a) 存在光线重叠问题的光路;

(b) 解决光线重叠问题后的光路

Fig. 5 (a) Optical path when overlap of rays exists;

(b) optical path when overlap of rays is solved

#### 4.3 普通非球面投影物镜系统

首先对含有普通非球面的系统进行优化,为了简化系统,在优化中将孔径光阑附近的两个非球面替换为球面,并对镜头的畸变进行着重控制。经过多次优化后,镜头的调制传递函数(MTF)曲线如图 6(a) 所示,其中 T 表示切向, R 表示径向,  $F1 \sim$

F10 表示不同视场。可以发现,MTF 在 66 lp/mm 处大于 30%。畸变网格如图 6(b)所示,横轴为横向视场(FOV),纵轴为纵向 FOV,最大畸变为 2.94%。

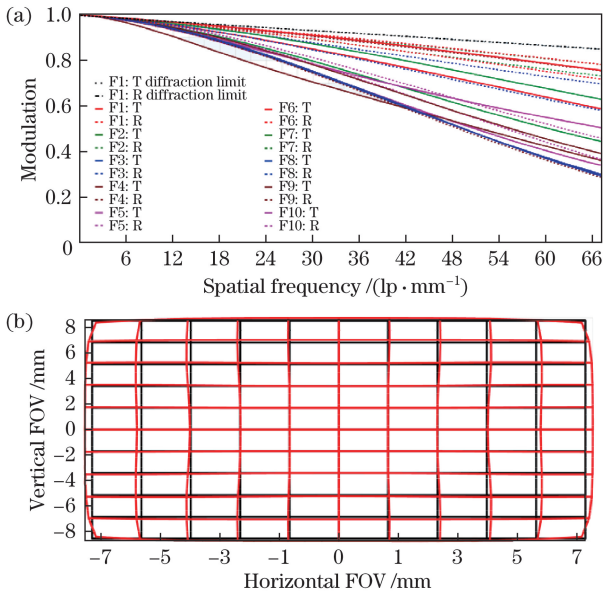


图 6 非球面优化后的系统。(a) MTF 曲线;(b)畸变网格  
Fig. 6 System after optimization of aspherical surface.

(a) MTF curve; (b) distortion grid

在优化过程中发现,制约系统性能提升的主要因素为畸变,畸变和视场的三次方成正比,因此畸变会随着视场的增加迅速增大,因此,在具有大视场的超短焦投影下,边缘视场的畸变很难校正。为此,将 S2 面转换为分段环形曲面,并对分段环形曲面的每段曲面分开进行控制,对不同位置的光线进行优化,可以更好地控制边缘视场的畸变。

#### 4.4 分段环形曲面投影物镜系统

为了保证曲面转换前后能实现平滑过渡,需要

表 3 各段曲面的多项式系数

Table 3 Polynomial coefficients of each piecewise surface

Number of segments	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	$1.123117 \times 10^{-4}$	$1.371715 \times 10^{-2}$	$3.148854 \times 10^{-3}$	-6.005532
2	$9.837807 \times 10^{-5}$	$1.233221 \times 10^{-2}$	$1.755533 \times 10^{-2}$	-6.041083
3	$1.825474 \times 10^{-4}$	$6.737111 \times 10^{-3}$	$1.059625 \times 10^{-1}$	-6.449983
4	$4.177199 \times 10^{-5}$	$1.088035 \times 10^{-2}$	$8.125299 \times 10^{-2}$	-6.538591
5	$9.082783 \times 10^{-5}$	$7.099632 \times 10^{-3}$	$1.767819 \times 10^{-1}$	-7.332781
6	$1.945387 \times 10^{-4}$	$-2.278891 \times 10^{-3}$	$4.592208 \times 10^{-1}$	-10.165570
7	$4.156418 \times 10^{-4}$	$-2.611475 \times 10^{-2}$	1.316245	-20.442780
8	$8.242289 \times 10^{-4}$	$-7.619679 \times 10^{-2}$	3.362841	-48.325430
9	$1.610584 \times 10^{-3}$	$-1.809737 \times 10^{-1}$	8.017051	$-1.172477 \times 10^2$

图 8 所示为镜头的 MTF 曲线图和畸变网格。从图 8(a)中可以看出,与使用普通非球面的系统相

比,含有分段环形曲面的系统的 MTF 得到提升,在截止频率(66 lp/mm)处全视场的 MTF 均大于 33%。

表 2 三种分段方法的转换误差

Table 2  $E_{RMS}$  for three piecewise methods

Segmentation method	Uniform	Curvature	Feedback
$E_{RMS}/mm$	$1.14 \times 10^{-4}$	$7.23 \times 10^{-5}$	$3.85 \times 10^{-5}$

在保持原有约束条件不变的同时,对分段环形曲面添加满足  $C^1$  连续的约束条件,对系统进行优化。最终得到系统的结构如图 7 所示,系统的总长仅为 155 mm,其中各段环形曲面的多项式系数见表 3。

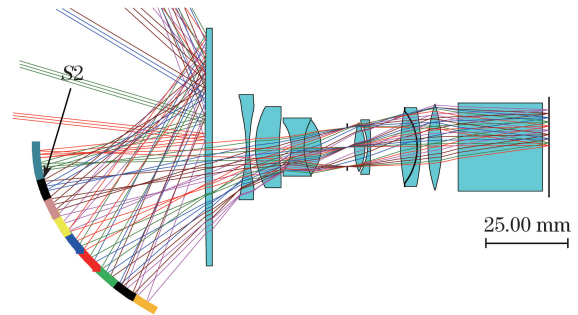


图 7 超短焦投影物镜光学系统的布局  
Fig. 7 Layout of optical system with ultra-short projection lens

从图 8(b)中可以看出,采用分段环形曲面后畸变得到了很好的校正,系统的最大畸变仅为 1.36%。

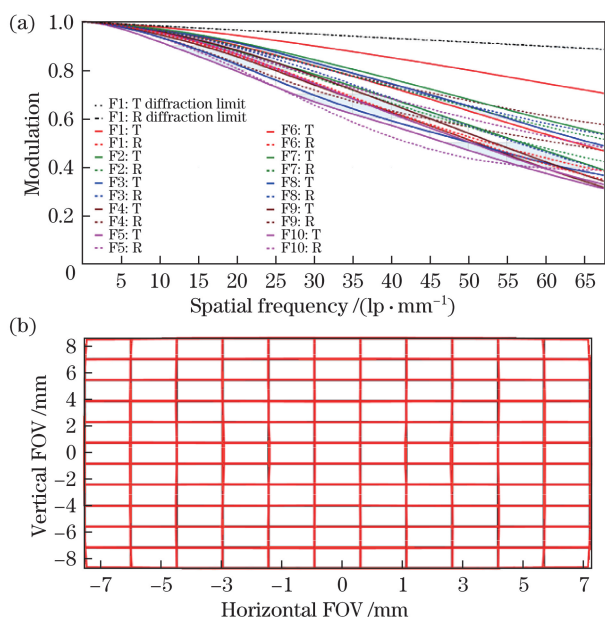


图 8 分段环形曲面优化后的系统。

(a) MTF 曲线; (b) 畸变网格

Fig. 8 System after optimization of annularly piecewise surface.

(a) MTF curve; (b) distortion grid

## 5 结 论

提出了一种分段环形曲面的面型描述及设计方法,这种分段环形曲面具有旋转对称性,其中每段曲面均由一个三次多项式描述。在分析非球面径向曲率分布的基础上,进一步提出了一种从非球面到分段环形曲面的高精度转换方法,证明了在分段数确定的情况下,转换得到的满足  $C^1$  连续条件的分段环形曲面存在且唯一。讨论了分段环形曲面的优化策略、实现方法及约束条件。最后利用分段环形曲面设计优化出一款超短焦投影物镜,其总长度仅为 155 mm,投射比可减小到 0.29,最大畸变小于 1.36%。通过该实例描述了分段环形曲面的具体设计方法,验证了分段环形曲面的可行性和优点。该设计方法对新型光学曲面的研究具有一定的指导意义。

### 参 考 文 献

- [1] Cheng D W, Wang Y T, Hua H, *et al.* Design of an optical see-through head-mounted display with a low  $F$ -number and large field of view using a freeform prism[J]. *Applied Optics*, 2009, 48(14): 2655-2668.
- [2] Cheng D W, Gong C, Xu C, *et al.* Design of an

ultrawide angle catadioptric lens with an annularly stitched aspherical surface[J]. *Optics Express*, 2016, 24(3): 2664-2677.

- [3] Li C, Xue C X, Yang H F, *et al.* Optical system design of electronic endoscope objective with Q-type asphere[J]. *Acta Optica Sinica*, 2017, 37(6): 0622001. 李闯, 薛常喜, 杨红芳, 等. 基于 Q-type 非球面的电子内窥镜物镜光学系统设计[J]. *光学学报*, 2017, 37(6): 0622001.
- [4] Pang Z H, Fan X W, Ma Z, *et al.* Free-form optical elements corrected aberrations of optical system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36(5): 0522001. 庞志海, 樊学武, 马臻, 等. 自由曲面校正光学系统像差的研究[J]. *光学学报*, 2016, 36(5): 0522001.
- [5] Sasian J M. Annular surfaces in annular field systems[J]. *Optical Engineering*, 1997, 36(12): 3401-3403.
- [6] Chase H. Optical design with rotationally symmetric NURBS[C]. *SPIE*, 2002, 4832: 10-24.
- [7] Forbes G W. Shape specification for axially symmetric optical surfaces[J]. *Optics Express*, 2007, 15(8): 5218-5226.
- [8] Cakmakci O, Moore B, Foroosh H, *et al.* Optimal local shape description for rotationally non-symmetric optical surface design and analysis[J]. *Optics Express*, 2008, 16(3): 1583-1589.
- [9] Cheng D W, Chen X J, Xu C, *et al.* Optical description and design method with annularly stitched aspheric surface[J]. *Applied Optics*, 2015, 54(34): 10154-10162.
- [10] Yan Y, Sasian J M. Miniature camera lens design with a freeform surface[C]. *International Optical Design Conference*, 2017: JTU3A.3.
- [11] Barsky B A, Derosé T D. Geometric continuity of parametric curves: three equivalent characterizations[J]. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1989, 9(6): 60-68.
- [12] Zhang D H, Huang L N, Fei L F, *et al.* An algorithm of extracting feature points in curve based on the curvature[J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2013, 38(3): 151-153. 张栋海, 黄丽娜, 费立凡, 等. 一种基于曲率法的曲线特征点选取方法[J]. *测绘科学*, 2013, 38(3): 151-153.
- [13] He Y L, Liu J, Jiao M Y, *et al.* Design of free form surface optical system in CODEV[J]. *Journal of Applied Optics*, 2006, 27(2): 120-123. 何玉兰, 刘钧, 焦明印, 等. 利用 CODEV 设计含有自由曲面的光学系统[J]. *应用光学*, 2006, 27(2): 120-123.
- [14] Zhuang Z F, Chen Y T, Yu F H, *et al.* Field

- curvature correction method for ultrashort throw ratio projection optics design using an odd polynomial mirror surface[J]. *Applied Optics*, 2014, 53(22): 69-76.
- [15] Yang B, Lu K, Zhang W, *et al.* Design of a free-form lens system for short distance projection[C]. *SPIE*, 2011, 8128: 81280E.
- [16] Zhuang Z F, Surman P, Sun X W, *et al.* Flat-concave dual-mirror configuration design for upright projection-type ultrashort throw ratio projectors[J]. *Journal of Display Technology*, 2016, 12(1): 8-16.
- [17] Yang J M, Liu W Q, Meng X X, *et al.* Design of coaxial short focal length catadioptric projection system[J]. *Chinese Journal of Liquid Crystals and Displays*, 2015, 30(5): 864-871.  
杨建明, 刘伟奇, 孟祥翔, 等. 同轴超短焦距折反式投影系统设计[J]. *液晶与显示*, 2015, 30(5): 864-871.
- [18] Nobutaka M. Projection optical system and projection type image display device: US7957078[P]. 2011-04-27.