

# 激光粒度仪的测量上限

胡华<sup>1,2</sup>, 张福根<sup>3\*</sup>, 吕且妮<sup>1,2</sup>, 潘林超<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>天津大学精密仪器与光电子工程学院, 天津 300072;

<sup>2</sup>光电信息技术教育部重点实验室, 天津 300072;

<sup>3</sup>珠海真理光学仪器有限公司, 广东 珠海 519085

**摘要** 利用奇异值分解方法, 分析了激光粒度仪的光能系数矩阵特性, 定义了可以反映粒度分布随光能分布变化的灵敏度参数, 给出了特定参数条件下的测量上限。推导得到了仪器的测量上限与物理参数之间的解析表达式, 发现在入射光波长不变的情况下, 仪器对散射光的最小接收角决定了该仪器的测量上限。实验结果验证了该表达式的正确性。

**关键词** 散射; 测量上限; 激光粒度仪; 奇异值分解

中图分类号 O436.2

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201838.0429001

## Measurement Upper Limit of Laser Particle Size Analyzer

Hu Hua<sup>1,2</sup>, Zhang Fugen<sup>3</sup>, Lü Qieni<sup>1,2</sup>, Pan Linchao<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>School of Precision Instrument and Opto-Electronics Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

<sup>2</sup>Key Laboratory of Opto-Electronics Information Technology of Ministry of Education, Tianjin 300072, China;

<sup>3</sup>Zhuhai Linkoptik Instruments Co., Ltd., Zhuhai, Guangdong 519085, China

**Abstract** The singular value decomposition method is used to study the characteristics of light energy coefficient matrix of a laser particle size analyzer, and the sensitivity parameters are defined to express the variance of particle size distribution with the light energy distribution. The measurement upper limit under certain parameters is obtained. An analytic formula which discloses the relationship between the measurement upper limit and the physical parameters is derived, which shows that the measurement upper limit of the instrument is determined by the minimum acceptance angle of this instrument for the scattered light under the condition of constant incident wavelength. The experimental results verify the correctness of this formula.

**Key words** scattering; measurement upper limit; laser particle size analyzer; singular value decomposition

**OCIS codes** 290.4020; 290.5820; 290.5825; 290.5850

## 1 引 言

激光粒度仪是一种通过测量颗粒散射光的空间(角度)分布来分析颗粒的大小及其分布的仪器, 已被广泛应用于各种粉体、液体喷雾、浆料、乳液等的粒度测量<sup>[1]</sup>。激光粒度仪的基础理论和应用技术还在不断发展, 其中关于反演算法<sup>[2-3]</sup>和测量范围的扩展<sup>[4-5]</sup>等应用技术的研究较多。王天恩等<sup>[2]</sup>提出了一种基于向量相似度的迭代算法, 用于解决多峰分

布的反演问题。为了延伸测量下限, 激光粒度仪制造厂商相继采用了逆傅里叶变换光学系统<sup>[6]</sup>、双镜头技术、双激光源技术<sup>[5]</sup>、偏振光散射强度差技术<sup>[7]</sup>以及全方位多角度技术等。其中, 潘林超等<sup>[4]</sup>提出了一种结构简单的环形样品池方法, 对亚微米颗粒具有测量下限低、测量精度和可靠性高等特点; 他们还研究了颗粒散射光分布的反常移动、艾里斑尺寸的反常移动及其对粒度分析的影响<sup>[8-10]</sup>, 这些反常现象的研究完善了激光粒度仪的理论基础。仪器能

收稿日期: 2017-09-28; 收到修改稿日期: 2017-10-29

基金项目: 国家自然科学基金(61275019, 61275012)

作者简介: 胡华(1988—), 男, 硕士研究生, 主要从事光散射理论与粒度检测方面的研究。E-mail: huhua\_dh@163.com

导师简介: 吕且妮(1966—), 女, 博士, 副教授, 博士生导师, 主要从事粒子测量、数字全息方面的研究。

E-mail: qienil@tju.edu.cn

\* 通信联系人。E-mail: albert.zhang@linkoptik.com

够测量的最大颗粒的粒径称为测量上限,是粒度仪的重要技术指标之一。Swithenbank 等<sup>[11]</sup>提出的无因次准则给出了光电探测单元的角度位置与最佳代表粒径取值之间的对应关系,同时暗含了测量上限的数值(即最小角探测器对应的代表粒径),但与当前各种商品化仪器标称的测量上限不符。对于一台物理结构确定的激光粒度仪,关于其测量上限及其计算方法的研究鲜有报道。本文对此展开了理论分析和实验验证,最终给出了测量上限的解析表达式。

## 2 光能矩阵及其奇异值分解

粒度分布通过求解方程组  $\mathbf{E} = \mathbf{T}\mathbf{W}$  得到,其中  $\mathbf{E} = [e_1, \dots, e_m]^T$  为光能分布向量,  $m$  为其维度,  $e_i (i=1, \dots, m)$  为其分量,  $\mathbf{T}$  表示转置;  $\mathbf{W} = [\omega_1, \dots, \omega_n]^T$  为粒度分布向量,  $n$  为其维度,  $\omega_i (i=1, \dots, n)$  为其分量;  $\mathbf{T}$  为  $m \times n$  阶的散射光能系数矩阵(以下简称“光能矩阵”),  $\mathbf{T}$  中矩阵元  $t_{i,j}$  表示单位质量的直径为  $D_j$  的颗粒所产生的散射光落在多单元光电探测器第  $i$  单元上的光能量。当  $\pi D/\lambda \gg 1$  (其中  $\lambda$  为照明光在空气中的波长,  $D$  为颗粒直径)时,可用夫琅禾费衍射理论近似计算散射光场<sup>[12]</sup>,考虑到利用夫琅禾费衍射理论计算光强分布的高效性,基于夫琅禾费衍射理论进行光能矩阵计算。为简洁起见,将所涉及的粒径范围都设置在远大于照明光波长的范围内,矩阵元  $t_{i,j}$ <sup>[13]</sup> 可表示为

$$t_{i,j} = \frac{\phi_i}{D_j} [J_0^2(X_{i,j,\text{in}}) + J_1^2(X_{i,j,\text{in}}) - J_0^2(X_{i,j,\text{out}}) - J_1^2(X_{i,j,\text{out}})], \quad (1)$$

式中  $X_{i,j,\text{in}} = \pi D_j \theta_{i,\text{in}}/\lambda$ ,  $X_{i,j,\text{out}} = \pi D_j \theta_{i,\text{out}}/\lambda$ ,  $\theta_{i,\text{in}}$  和  $\theta_{i,\text{out}}$  分别为环形光电探测器阵列第  $i$  环内径和外径对应的散射角,  $\phi_i$  为第  $i$  环的扇形张角,  $J_0(X)$ 、 $J_1(X)$  分别为零阶和一阶贝塞尔函数。

由于光能矩阵的病态<sup>[14]</sup>和  $\mathbf{W}$  的非负性,在获得散射光能分布  $\mathbf{E}$  后,不能直接采用解线性方程组的方法求解粒度分布  $\mathbf{W}$ 。为此,研究者们提出了多种求解粒度分布的反演算法<sup>[2,3,15]</sup>,每种算法各有优缺点,因此在理论研究中,引用任何一种具体的算法都不具有说服力。这里引入矩阵理论<sup>[14]</sup>中的奇异值分解方法分析光能矩阵的特性,以估算测量上限。

光能矩阵  $\mathbf{T}$  的奇异值分解可以表示为

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{-1}, \quad (2)$$

式中  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  为酉矩阵,  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$  为斜对角矩阵,

$\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ ,  $\sigma_i (i=1, 2, \dots, r)$  为矩阵全部非零的奇异值,且  $\sigma_i$  从大到小排列。对(2)式两边右乘  $\mathbf{V}$ , 有

$$\mathbf{T}\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{S}. \quad (3)$$

将  $\mathbf{S}$ 、 $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{U}$  表示成列向量的组合形式,即  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n]$ ,  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ ,  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m]$ 。(3)式两边的第  $i$  列可以表示为

$$\mathbf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{U}\mathbf{s}_i. \quad (4)$$

每一个  $\mathbf{s}_i$  中只含有唯一的一个奇异值  $\sigma_i$ , 其余元素为零,故(4)式可表示为

$$\mathbf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i\sigma_i. \quad (5)$$

将  $\mathbf{v}_i$  表示为两个向量相减的形式,即  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i,\text{p}} - \mathbf{v}_{i,\text{n}}$ , 其中  $\mathbf{v}_{i,\text{p}}$  为  $\mathbf{v}_i$  中所有正元素组成的向量,  $\mathbf{v}_{i,\text{n}}$  为  $\mathbf{v}_i$  中所有负元素取绝对值所组成的向量。(5)式变为

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}_{i,\text{p}} - \mathbf{v}_{i,\text{n}}) = \mathbf{u}_i\sigma_i. \quad (6)$$

对(6)式两边取 2-范数得到

$$\|\mathbf{T}\mathbf{v}_{i,\text{p}} - \mathbf{T}\mathbf{v}_{i,\text{n}}\|_2 = \sigma_i. \quad (7)$$

若把  $\mathbf{v}_{i,\text{p}}$  和  $\mathbf{v}_{i,\text{n}}$  看作一对粒度分布(分别称为“正分布”和“补分布”),则  $\mathbf{T}\mathbf{v}_{i,\text{p}}$  和  $\mathbf{T}\mathbf{v}_{i,\text{n}}$  表示对应的光能分布。(7)式表明,粒度分布  $\mathbf{v}_{i,\text{p}}$  和  $\mathbf{v}_{i,\text{n}}$  对应的光能分布的均方根误差等于  $\sigma_i$ 。当  $\sigma_i$  很小,甚至接近零( $\sigma_i \approx 0$ )时,两个粒度分布对应的光能分布非常接近甚至完全相同,此时通过测量散射光能分布来区分这两个粒度分布是非常困难的。奇异值非常大则表示这两个粒度分布所对应的光能分布的差异非常大,此时仪器能够区分这两个粒度分布,故主要研究较小奇异值对应的两个粒度分布的特性。

## 3 激光粒度仪的测量上限

### 3.1 激光粒度仪的参数

为了得到具体的光能矩阵,首先设定一组具体且理想化的仪器物理参数。设仪器能够测量的角度(弧度制)范围为  $3.49 \times 10^{-4} \sim 8.286 \times 10^{-2}$  rad ( $0.02^\circ \sim 5.7^\circ$ ),按照指数增长的规律将其分为 30 个探测单元,且各单元之间无缝衔接。各单元外径对应的散射角  $\theta_{i,\text{out}}$  与内径对应的散射角  $\theta_{i,\text{in}}$  之比为常数  $A=1.2$ , 即

$$\begin{cases} \theta_{i,\text{in}} = 3.4907 \times 10^{-4} \times 1.2^{i-1} \\ \theta_{i,\text{out}} = 3.4907 \times 10^{-4} \times 1.2^i \end{cases}. \quad (8)$$

探测器各单元接收面积正比于散射角,使不同粒径颗粒的光能分布的主峰峰值大致相等,保证

相同体积的不同粒径颗粒在参与反演计算过程中的“权重”大致相当<sup>[1]</sup>。为此,各单元的扇形角度按等比规律递减,比例系数为  $1/A$ 。设第一单元  $\phi_1 = \pi$ , 则各环探测单元的扇形角度满足  $\phi_i = \pi/1.2^{i-1}$ , 其中  $i=1,2,3,\dots,30$ 。计算光能矩阵时还需确定代表的粒径数值。为叙述方便,把研究过程中选取的最小和最大代表粒径分别称为下边界和上边界粒径,并分别用  $D_{\text{down}}$  和  $D_{\text{up}}$  表示,而把仪器实际能够测量的最大粒径称为测量上限,用  $D_{\text{max}}$  表示。选  $D_{\text{down}} = 40 \mu\text{m}$  (可确保夫琅禾费理论有足够的精度),相邻代表粒径之比为 1.2,共选取  $N$  个代表粒径,第  $i$  个代表粒径的大小为  $D_i = 40 \times 1.2^{i-1} \mu\text{m}$ , 上边界粒径为  $D_{\text{up}} = 40 \times 1.2^{N-1} \mu\text{m}$ 。设颗粒悬浮于空气中,入射光波长  $\lambda = 650 \text{ nm}$ 。确定  $N$  的数值后,将上述参数代入(1)式计算,可得光能矩阵。

### 3.2 测量上限的估算

对一给定的  $D_{\text{down}}$ ,随着  $D_{\text{up}}$  的不断增大,光能矩阵的最小奇异值对应的两个粒度分布有两种特征,下面分别加以说明。

情形一,选取  $N=21$ ,可得  $D_{\text{up}} = 1533.5 \mu\text{m}$ ,计算得到的光能矩阵记为  $\mathbf{T}_1$ 。其最小奇异值  $\sigma_{21} = 14.6594$ ,将与之对应的酉矩阵  $\mathbf{V}$  的第 21 列分解成两个粒度分布向量  $\mathbf{v}_{21,p}$  和  $\mathbf{v}_{21,n}$ ,它们对应的光能分布为  $\mathbf{T}_1 \mathbf{v}_{21,p}$  和  $\mathbf{T}_1 \mathbf{v}_{21,n}$ ,其归一化方差为 0.0021。图 1(a)所示为两个粒度分布的直方图,横坐标表示代表粒径的序号  $i$ ,纵坐标表示代表粒径上的颗粒体积含量,可以看出,正分布和补分布相间存在。对正分布和补分布进行平滑处理,从粒度检测的角度看,它们对应着几乎相同的粒度分布,此时散射光能分布的差异很小,这是合理的。

情形二,取  $N=24$ ,可得  $D_{\text{up}} = 2649.9 \mu\text{m}$ ,计算得到的光能矩阵为  $\mathbf{T}_2$ 。其最小奇异值  $\sigma_{24} = 2.0361 \times 10^{-3}$ ,将与之对应的酉矩阵  $\mathbf{V}$  的第 24 列分解成两个粒度分布向量  $\mathbf{v}_{24,p}$  和  $\mathbf{v}_{24,n}$ ,图 1(b)所示为两个粒度分布的直方图,可以看出,这两种粒度分布都是连续的且差异极大,但是它们对应的光能分布的归一化方差仅为  $1.0196 \times 10^{-5}$ ,表明这两个差异极大的粒度分布对应着几乎完全相同的光能分布,即通过测量光能分布是无法区分这两个粒度分布的。

从这两种情形可以看出,同样在光能矩阵的奇异值很小的条件下,与之对应的正分布和补分布呈现情形一和情形二两种截然不同的结果。前者意味着粒度分布差异小,对应光能分布的差异也小;后者

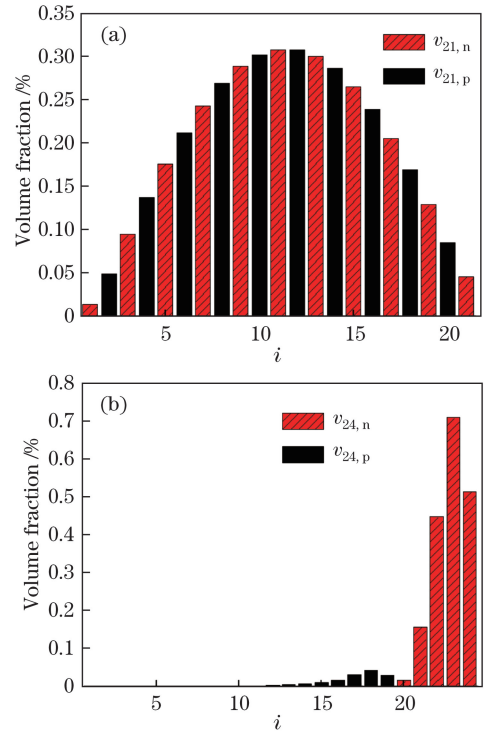


图 1 正分布和补分布的两种特性。(a)  $N=21$ ; (b)  $N=24$   
Fig. 1 Two kinds of characteristics of positive and negative distributions. (a)  $N=21$ ; (b)  $N=24$

意味着两个完全不同的粒度分布对应同一个光能分布。后者是由测量的上边界选取过大引起的,可以认为此时粒径上边界的取值超过了仪器的测量上限。

为了求得测量上限的数值,定义一个可以反映粒度分布随光能变化的敏感程度的参数,称为灵敏度参数  $S$ ,表示为

$$S = \max_{1 \leq i \leq N} \left( \frac{\delta_{10,i} + \delta_{50,i} + \delta_{90,i}}{\sigma_i} \right), \quad (9)$$

式中  $\delta_{10,i} = \frac{|d_{10,i,p} - d_{10,i,n}|}{(d_{10,i,p} + d_{10,i,n})/2}$  为第  $i$  个奇异值  $\sigma_i$  对应的两个粒度分布  $\mathbf{v}_{i,p}$  和  $\mathbf{v}_{i,n}$  的  $d_{10}$  值之间的相对误差,其中  $d_{10,i,p}$ 、 $d_{10,i,n}$  分别为  $\mathbf{v}_{i,p}$  和  $\mathbf{v}_{i,n}$  的  $d_{10}$  值,而  $d_{10}$  的物理意义为粒径小于该值的颗粒的体积之和占总体积的 10%,可通过对粒度分布插值得到。 $\delta_{50,i}$  和  $\delta_{90,i}$  的定义与  $\delta_{10,i}$  的定义类似,即  $\delta_{50,i} = \frac{|d_{50,i,p} - d_{50,i,n}|}{(d_{50,i,p} + d_{50,i,n})/2}$ ,  $\delta_{90,i} = \frac{|d_{90,i,p} - d_{90,i,n}|}{(d_{90,i,p} + d_{90,i,n})/2}$ ,其中  $d_{50,i,p}$ 、 $d_{50,i,n}$  ( $d_{90,i,p}$ 、 $d_{90,i,n}$ ) 分别为  $\mathbf{v}_{i,p}$ 、 $\mathbf{v}_{i,n}$  的  $d_{50}$  ( $d_{90}$ ) 值,而  $d_{50}$  ( $d_{90}$ ) 的物理意义为粒径小于该值的颗粒的体积之和占总体积的 50% (90%)。(9)式右边的分子表示两个粒度分布的差异,分母表示对应的光能分布的差异。 $S$  值越大,粒度分布对光能的变化越敏感。当  $S$  非常大时,粒度的测量结果非常

不稳定。

取下边界  $D_{\text{down}} = 40 \mu\text{m}$ , 上边界粒径序号  $N$  从 18 逐个增加到 24, 对应的  $D_{\text{up}}$  从  $887.4 \mu\text{m}$  增加到  $2649.9 \mu\text{m}$ , 由(9)式计算每个上边界粒径对应的  $S$  数值, 如图 2 所示。可以看出, 随着  $D_{\text{up}}$  的增大,  $S$  值先较小且基本保持不变, 对应情形一。当  $D_{\text{up}}$  越过临界点后,  $S$  值急剧增大, 对应情形二。把这个  $D_{\text{up}}$  的临界点定义为测量上限  $D_{\text{max}}$ , 其数值为  $S_0$  对应的  $D_{\text{up}}$  值, 如图 2 中虚线所示, 其中  $S_0 = 1.5\bar{S}$ ,  $\bar{S}$  为突变前  $S$  值的平均值。在图 2 中,  $\bar{S} = 0.02498$ ,  $S_0 = 1.5\bar{S} = 0.03747$ ,  $S_0$  对应的横坐标为  $1634 \mu\text{m}$ , 即  $D_{\text{max}} = 1634 \mu\text{m}$ 。

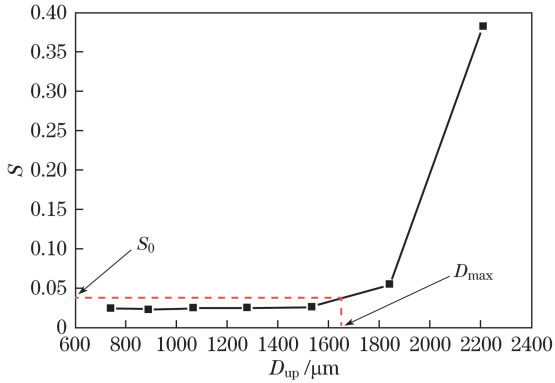


图 2  $S$  随  $D_{\text{up}}$  的变化曲线

Fig. 2 Variation curve of  $S$  with  $D_{\text{up}}$

### 3.3 测量上限的物理解释及通用表达式

为了从物理上解释测量上限存在的原因, 图 3 给出了部分代表粒径颗粒的光能分布, 横坐标为探测器序号  $i'$ , 纵坐标为相对光能值。可以看出, 随着粒径的增大, 光能分布的第一个峰(以下简称“主峰”)向横坐标的左侧移动。当  $D = D_{17} = 739.54 \mu\text{m}$  时, 主峰顶端位于探测器第一单元; 当颗粒直径继续增大, 光能分布的主峰顶端向左移出了第一单元, 此时能够被测量到的主峰信息越来越少, 如图 3 中的  $D_{20}$ 、 $D_{\text{max}}$ 、 $D_{23}$  的光能分布。当  $D = D_{\text{max}}$  时, 光能主峰只有很小一部分处在探测器的第一单元; 当粒径再增大, 如  $D = D_{23}$ , 主峰将完全移出探测器, 此时只能测到该类颗粒(多个)次峰的信息。而某一大颗粒的次峰光能分布与多个较小颗粒的主峰光能分布的线性组合可能非常相似甚至相同。当只得到大颗粒次峰的光能分布, 并将其用于反演计算粒度分布时, 可能会得到正确的大颗粒的结论, 也可能得出小颗粒组合的错误结论。这种情况在光能矩阵中表现为: 某些列之间出现近似的线性相关, 甚至线性相关。从矩阵理论来看, 此时光能矩阵

的病态程度非常严重, 线性方程的解(即粒度分布)对扰动(测量误差)非常敏感, 以致仪器的测量结果非常不稳定。故如果颗粒直径太大, 探测器能测到的光能分布不包含主峰的光能(如图 3 中的  $D_{23}$  所示)时, 通过测量散射光能分布确定这类颗粒的大小是不可能的。这就是激光粒度仪存在粒径测量上限的原因。

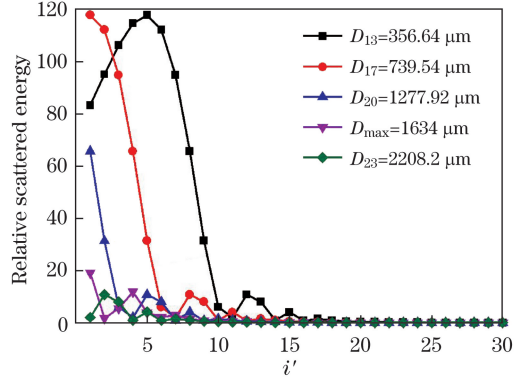


图 3 部分代表粒径的光能分布

Fig. 3 Light energy distributions from some representative particle sizes

下面将测量上限的结论推广到一般情况。(1)式表明, 探测器上的光能分布是宗量  $X$  的函数。仪器能否获得足够多的光能分布主峰的信息, 由仪器参数所对应的  $X$  的取值范围决定。在小角度条件下,  $X$  的表达式为

$$X = \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda} \approx \frac{\pi D \theta}{\lambda}, \quad (10)$$

(10)式表明, 当仪器能够测量的最小散射角  $\theta_{\text{min}}$  确定时,  $D$  的数值越小,  $X$  的下限值也越小, 仪器能获得的光能分布的主峰信息就越多; 反之  $D$  越大,  $X$  的下限值也越大, 主峰信息越少。当  $D$  取其最大值  $D_{\text{max}}$  时,  $X$  的下限也达到最大, 即达到仪器能够测量的粒径上限。记此时的  $X$  值为  $X_0$ , 即

$$X_0 = \frac{\pi D_{\text{max}} \theta_{\text{min}}}{\lambda}. \quad (11)$$

在 3.1 和 3.2 两节中已求出, 当  $\lambda = 650 \text{ nm}$ ,  $\theta = 3.49 \times 10^{-4} \sim 8.286 \times 10^{-2}$  时,  $D_{\text{max}} = 1634 \mu\text{m}$ 。以第一单元的平均散射角  $\bar{\theta}_1$  作为  $\theta_{\text{min}}$ , 即  $\bar{\theta}_1 = \theta_{\text{min}} = \sqrt{\theta_{1,\text{in}} \theta_{1,\text{out}}} = 3.8238 \times 10^{-4}$ 。将  $\lambda$ 、 $D_{\text{max}}$  和  $\bar{\theta}_1$  的数值代入(11)式, 可求得  $X_0 = 3.02$ 。将  $X_0$  代入(11)式并改写为

$$D_{\text{max}} = \frac{3.02\lambda}{\pi \theta_{\text{min}}}. \quad (12)$$

在小角度条件下, 可用探测器第一单元的几何平均半径  $r_1$  与仪器等效焦距  $f$  的比值来表示仪器能



接收的最小散射角  $\theta_{\min}$ , 即

$$\theta_{\min} \approx \frac{\bar{r}_1}{f} = \frac{\sqrt{r_{1,\text{in}} r_{1,\text{out}}}}{f}, \quad (13)$$

式中  $\bar{r} = \sqrt{r_{1,\text{in}} r_{1,\text{out}}}$  为第一单元的几何平均半径,  $r_{1,\text{in}}$  和  $r_{1,\text{out}}$  分别为探测器第一单元的内半径和外半径。将(13)式代入(12)式, 得到测量上限的解析表达式为

$$D_{\max} = \frac{3.02\lambda f}{\pi \bar{r}_1}. \quad (14)$$

需要说明的是, 以上讨论虽然假设了颗粒悬浮在空气中, 但是在散射角足够小的情况下, 不论颗粒悬浮于什么介质, 以上结论都是适用的。

### 4 实验及结果分析

下面通过一组实验验证上述结论的正确性。实验所用仪器的参数如下: 系统焦距  $f = 350 \text{ mm}$ ; 入射光在空气中的波长  $\lambda = 650 \text{ nm}$ ; 探测器第一单元的几何平均半径  $\bar{r}_1 = 199.9 \text{ }\mu\text{m}$ , 相邻探测器的中心角度之比约为 1.2。代入(14)式计算得到测量上限  $D_{\max} = 1093.9 \text{ }\mu\text{m}$ 。

实验样品为折射率为 1.55 的玻璃珠, 颗粒透明无吸收。通过筛分法对玻璃珠进行分级, 用直径为  $700 \sim 800 \text{ }\mu\text{m}$  的玻璃珠作为样品。玻璃珠大致为球形颗粒, 从中随机选取 455 颗(约为一次测试用量), 每颗用游标卡尺测量 3 次, 3 次测量尽量包含玻璃

珠的最大和最小直径, 取 3 次测量结果的平均值作为最终直径。游标卡尺测量的粒度分布曲线如图 4 所示, 其中纵坐标为体积分数, 该粒度分布的  $d_{10} = 717.2 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $d_{50} = 759.5 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $d_{90} = 804.4 \text{ }\mu\text{m}$ 。

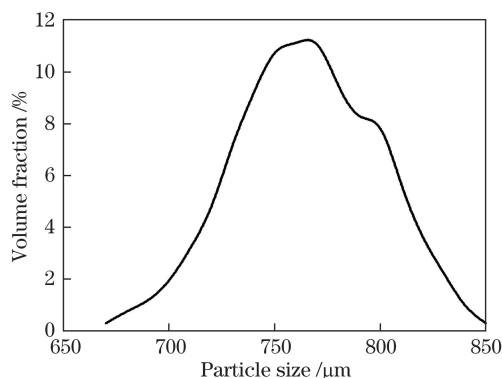


图 4 游标卡尺测量的粒度分布曲线  
Fig. 4 Measured particle size distribution curve by vernier calipers

利用激光粒度仪测量上述样品并获得其散射光能分布数据, 代表粒径的下边界选为  $40 \text{ }\mu\text{m}$ , 选取不同的上边界计算光能矩阵, 并分别对测量数据进行反演计算, 获得粒度分布结果。实验过程中使用的反演算法为经典的 Chahine 算法<sup>[15]</sup>。图 5 所示为上边界  $D_{\text{up}}$  分别为  $1093.9, 1307.3, 1464.2, 1836.6 \text{ }\mu\text{m}$  时的反演粒度分布, 其中纵坐标为体积分数。

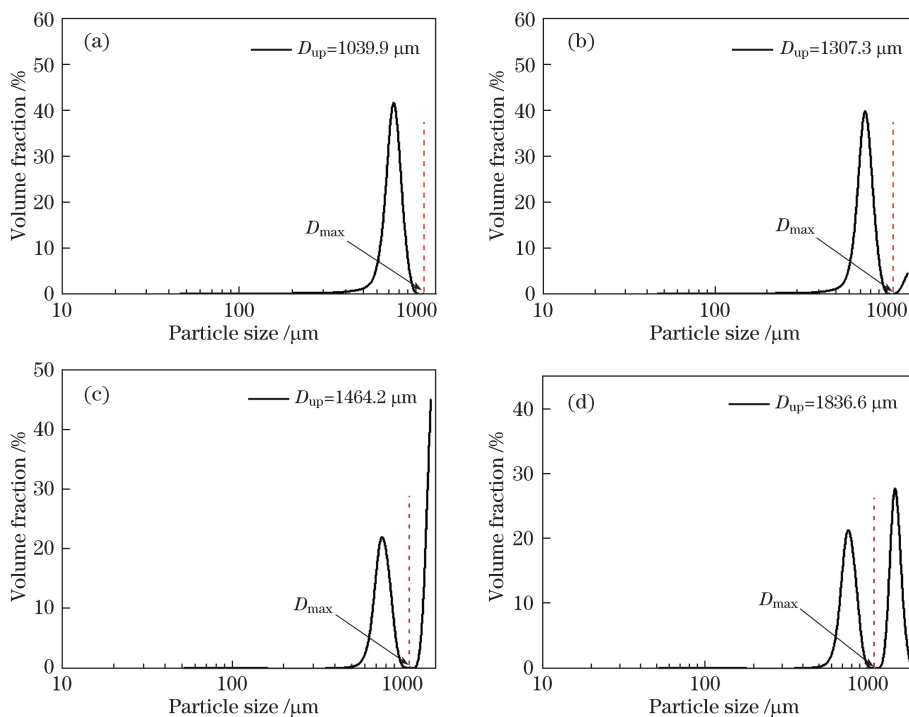


图 5 不同上边界条件下的测量结果  
Fig. 5 Measurement results from different upper boundaries

当  $D_{up} = D_{max} = 1093.9 \mu\text{m}$  时,反演结果如图 5(a)所示,测量粒度分布的  $d_{10} = 658.6 \mu\text{m}$ ,  $d_{50} = 737.1 \mu\text{m}$ ,  $d_{90} = 819.2 \mu\text{m}$ ,与游标卡尺测量的粒度分布相比,  $d_{10}$  偏小 8.17%,  $d_{50}$  偏小 2.94%,  $d_{90}$  偏大 1.84%。仪器测量的粒度分布相对于游标卡尺的测量结果有一定展宽,属于正常现象<sup>[16]</sup>,且  $d_{50}$  的误差小于 3%,测量结果可以接受。当  $D_{up} > D_{max}$  时,测量结果如图 5(b)~(d)所示,在大于  $D_{max}$  的区域出现了实际上不存在的颗粒。特别是在图 5(d)所示的情况中,在大于  $D_{max}$  区域出现了完整的假峰,即将一个单峰分布测量为一个双峰分布,与 3.2 节的情形二[如图 1(b)所示]相似。此时样品的粒度分布刚好位于正分布所在的粒度区间[图 1(b)中的  $v_{24,p}$ ],大于  $D_{max}$  区域出现的假峰与补分布的位置也相吻合[图 1(b)中的  $v_{24,n}$ ]。结合光能矩阵的奇异值分解,可以解释出现假峰的原因是:正分布和补分布(或者说真实的颗粒分布与假的粒度分布)对应的光能分布的差异被测量误差淹没,无法通过测量光能分布将它们区分开,故在反演过程中,正分布和补分布总是同时出现,图 5(d)所示虚假的峰其实是由真实峰的一部分“光能分布”替换而来的。

实验结果表明,当样品的实际粒径分布范围小于但接近(14)式所给出的测量上限  $D_{max}$ ,而数据反演时选取的代表粒径上边界  $D_{up}$  大于  $D_{max}$  时,在大于  $D_{max}$  的粒径区间会出现虚假的颗粒分布。而当样品的实际粒度分布范围大于  $D_{max}$ ,数据反演时的代表粒径上限也大于  $D_{max}$  时,反演结果中在小于  $D_{max}$  的区域出现了虚假的颗粒分布。可见实验结果与理论分析的结论是一致的。

## 5 结 论

利用矩阵论中的奇异值分解方法,对激光粒度仪的光能矩阵进行了解析。将奇异值看作一对粒度分布(正分布和补分布)所产生的散射光能分布的均方根误差,并定义了灵敏度参数  $S$ ,用以表达粒度分布对光能分布变化的敏感程度。结果表明,当反演计算选取的上边界数值超过某个临界值时, $S$  会随着上边界的增大而急剧增大,这个临界值定义为仪器的测量上限。分析了测量上限存在的物理机理,并推导了测量上限与仪器物理参数之间的解析表达式。最后通过实验验证了该表达式的正确性。

## 参 考 文 献

[1] International organization for standardization. Particle

size analysis: Laser diffraction methods: ISO 13320: 2009[S]. Geneva: International organization for standardization, 2009.

- [2] Wang T E, Shen J Q, Lin C J. Vector similarity retrieval algorithm in particle size distribution analysis of forward scattering[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(6): 0629002.  
王天恩, 沈建琪, 林承军. 前向散射颗粒粒径分析中向量相似度反演算法[J]. 光学学报, 2016, 36(6): 0629002.
- [3] Dou Z H, Wang Y J, Shen J, *et al.* A hybrid non-negative inversion of dynamic light scattering based on truncated singular value decomposition[J]. Chinese Journal of lasers, 2013, 40(6): 0608001.  
窦震海, 王雅静, 申晋, 等. 动态光散射混合非负截断奇异值反演[J]. 中国激光, 2013, 40(6): 0608001.
- [4] Pan L C, Ge B Z, Zhang F G. Laser particle size measurement based on annular sample cell[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(10): 1029001.  
潘林超, 葛宝臻, 张福根. 基于环形样品池的激光粒度测量方法[J]. 光学学报, 2017, 37(10): 1029001.
- [5] Shen J Q. Research on expanding the lower limit of particle size of small-angle forward scattering[D]. Shanghai: University of Shanghai for Science and Technology, 1999.  
沈建琪. 延伸小角前向散射法测量下限的研究[D]. 上海: 上海理工大学, 1999.
- [6] Zhang F G. The optical structure of laser particle sizer[C]. 2006 Annual Conference of Chinese Society of Particuology cum Symposium on Particle Technology across Taiwan Straits, 2006: 19-23.  
张福根. 激光粒度仪的光学结构[C]. 中国颗粒学会 2006 年年会暨海峡两岸颗粒技术研讨会论文集, 2006: 19-23.
- [7] Bott S E, Hart E H. Extremely wide dynamic range, high-resolution particle sizing by light scattering, particle size distribution[C]. ACS Symposium Series, 1991, 472: 106-122.
- [8] Ge B Z, Pan L C, Zhang F G, *et al.* Abnormal moving of scattered energy distribution and its effect on particle size analysis[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(6): 0629001.  
葛宝臻, 潘林超, 张福根, 等. 颗粒散射光能分布的反常移动及其对粒度分析的影响[J]. 光学学报, 2013, 33(6): 0629001.
- [9] Pan L C, Zhang F G. Anomalous change of Airy disk with changing size of spherical particles[J]. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2016, 170: 83-89.
- [10] Pan L C, Ge B Z, Zhang F G. Indetermination of particle sizing by laser diffraction in the anomalous size

- ranges[J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 2017, 199: 20-25.
- [11] Swithenbank J, Beer J M, Taylor D S. A laser diagnostic technique for the measurement of droplet and particle size distribution[C]. 14th American Institute of Aeronautics and Astronautics, Aerospace Sciences Meeting, 1976: 11.
- [12] Bayvel L P, Jones A R. *Electromagnetic scattering and its applications*[M]. London: Applied Science Publishers, 1981.
- [13] Cai X S, Su M X, Shen J Q, *et al.* Particle size measurement techniques and applications[M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2010.  
蔡小舒, 苏明旭, 沈建琪, 等. 颗粒粒度测量技术及应用[M]. 北京: 北京化学工业出版社, 2010.
- [14] Zhang K Y, Xu Z. *Matrix theory*[M]. Beijing: Science Press, 2010.  
张凯院, 徐仲. 矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [15] Ferri F, Giglio M, Perini U. Inversion of light scattering data from fractals by the Chahine inversion scheme[J]. *Applied Optics*, 1983, 28(15): 2294-2301.
- [16] Zhang F G, Cheng L. Equivalent particle size of rod and flake particles with laser particle size analyzer[C]. First Annual Conference Society of Particuology, 1997: 267-278.  
张福根, 程路. 棒状和片状颗粒在激光粒度仪中的等效粒径[C]. 中国颗粒学会首届年会, 1997: 267-278.