

融合多种小波与全变差正则化的相位恢复算法

练秋生, 李颖, 陈书贞

燕山大学信息科学与工程学院, 河北 秦皇岛 066004

摘要 在相位恢复过程中, 用图像的稀疏性作为先验知识可以提高图像的重构质量。结合图像在小波域的组稀疏性与图像自身的梯度稀疏性, 针对编码衍射图样模型, 提出一种融合正交小波 db10 和 sym4 组稀疏性与全变差正则化的相位恢复算法。针对当前相位恢复算法重构时间较长的问题, 采用复合分裂算法将非凸优化问题分解成几个易于求解的子问题(包括两个组硬阈值算子和全变差最小化)进行求解, 减少了图像重构时间。实验结果表明: 在高斯噪声下, 与 BM3D-PRGAMP 算法相比, 所提算法重构图像的峰值信噪比提高了约 0.8 dB, 重构时间缩短了 90%; 在泊松模型中, 所提算法也具有较大优势, 充分说明了所提算法对噪声具有稳健性。

关键词 光计算; 相位恢复; 编码衍射图样; 组稀疏; 全变差; 复合分裂算法

中图分类号 O436

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201838.0220001

Phase Retrieval Algorithm Fusing Multiple Wavelets and Total Variation Regularization

Lian Qiusheng, Li Ying, Chen Shuzhen

Institute of Information Science and Technology, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China

Abstract In process of phase retrieval, the image reconstruction quality can be improved when we use the image sparsity as the prior knowledge. By combining the group sparsity of image in wavelet domain with the gradient sparsity of the image itself, we propose a phase retrieval algorithm fusing orthogonal wavelet db10, sym4 group sparsity and total variation regularization for the coded diffraction pattern model. Aiming at the problem that reconfiguration time of the current phase retrieval algorithm is long, we use composite splitting algorithm to decompose nonconvex optimization problem into several sub-problems (including two group hard threshold operators and total variation minimization) that can be solved easily, which reduces the image reconstruction time. Experimental results show that the peak signal-to-noise ratio of the reconstructed image obtained by the proposed algorithm is improved by about 0.8 dB compared with that of BM3D-PRGAMP algorithm under Gaussian noise, and the reconstruction time is reduced by 90%. In Poisson model, the proposed algorithm also has a great advantage, which fully demonstrates that the algorithm is robust to noise.

Key words optics in computing; phase retrieval; coded diffraction pattern; group sparsity; total variation; composite splitting algorithm

OCIS codes 200.3050; 100.3010; 100.5070; 100.7410

1 引 言

近几十年来, 相位恢复一直是一个热门的研究课题, 广泛应用于光学^[1]、医学图像处理^[2]、天文学^[3]、波前检测^[4]、衍射成像^[5]等方面。一幅完整的图像在频域中由相位信息和幅值信息两部分构成。现有光学仪器只能采集到其幅值信息, 相位信息丢

失。因此, 利用幅值信息对原始信号进行精确重构是十分重要的。

Gerchberg 等^[6]最早提出基于交替投影的 Gerchberg-Saxton (GS) 相位恢复算法。该算法利用傅里叶变换对采集到的信号强度值添加物域和频域约束, 将信号在物域和频域之间进行交替投影, 直到满足要求。Fienup^[7]在 GS 算法的基础上进行改

收稿日期: 2017-09-14; 收到修改稿日期: 2017-10-17

基金项目: 国家自然科学基金(61471313)、河北省自然科学基金(F2014203076)

作者简介: 练秋生(1969—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事图像处理、稀疏表示、压缩感知及相位恢复方面的研究。E-mail: lianqs@ysu.edu.cn

进,提出了混合输入输出算法,提高了收敛速度,而且能够获得较好的收敛效果。除了交替投影的迭代算法,Roddiier 等^[8]提出了基于强度传输方程(TIE)的确定性相位恢复算法。郭怡明等^[9]研究了一种基于 TIE 和角谱迭代传播的混合迭代算法。程鸿等^[10]提出一种基于硅基液晶变焦透镜的相位恢复算法,通过求解 TIE 进行相位恢复。

受压缩感知启发,信号稀疏性也被应用到相位恢复问题中。随着压缩感知与相位恢复结合的相关研究不断深入,压缩相位恢复^[11]、贪婪稀疏相位恢复^[12]和基于稀疏图编码的压缩相位恢复^[13]等算法相继被提出。全变差正则化^[14]及卡通-纹理模型^[15]也被应用于相位恢复,并且取得了较好的重构结果。

Candes 等^[16]提出的编码衍射成像系统,也是目前解决相位恢复问题的一个研究热点。该系统实验装置简单,且不需要信号的支撑信息,根据非线性压缩感知理论,利用编码衍射图样(CDP)便可将图像完整重构。针对该编码衍射成像系统的相位恢复问题,Candes 等^[17]提出了 WF(Wirtinger flow)算法,Chen 等^[18]提出了截断的 WF(TWF)算法。但是,此类算法完全重构图像时需要的 CDP 数量较多,且抗噪性能较差。Tillmann 等^[19]提出了 DOLPHIn 算法,利用信号观测值的潜在稀疏性将图片分成许多小块并训练字典,然后用字典对图像进行稀疏表示。在少量掩模下,该算法能够获得高质量的重构图像,且对噪声具有稳健性。目前重构质量高的相位恢复算法将先进的 BM3D 去噪算子嵌入到不同的框架中进行相位恢复。Metzler 等^[20]提出 BM3D-PRGAMP 算法,利用该算法在广义近似消息传递的框架下载入 BM3D 去噪算子,以获得较高的图像重构质量。Katkovnik^[21]提出的 SPAR(Sparse Phase Amplitude Reconstruction)算法利用图像在变换域的稀疏性,在 GS 算法的基础上将恢复的低质量图像用 BM3D 去噪算子进行阈值处理,并交替迭代更新。这些算法在较少掩模数量下可以重构高质量图像,但是重构时间较长。

为了在保证重构质量的情况下缩短重构时间,本文提出了融合多种小波组稀疏性与全变差正则化的相位恢复算法,并使用复合分裂算法进行求解。

2 基于正则化的相位恢复模型

利用幅值信息进行相位恢复的问题可以归结为求解二次方程

$$\mathbf{y} = |\mathbf{Ax}|^2, \quad (1)$$

式中 \mathbf{y} 是观测值, \mathbf{A} 是已知的采样算子, \mathbf{x} 是需要恢复的原始信号。在编码衍射成像系统中,原始信号经随机掩模调制后进行傅里叶变换,取模值的平方可得到观测值,即采样算子为随机掩模与傅里叶变换的结合。对图像进行相位恢复就是从观测值 \mathbf{y} 中恢复原始图像 \mathbf{x} ,并使得恢复图像尽可能接近原始图像。这是一个典型的非凸二次规划问题。将非凸目标函数最小化,写成损失函数的形式^[17],即

$$\min[f(\mathbf{x})] = \ell(\mathbf{y}, |\mathbf{Ax}|^2), \quad (2)$$

式中 $\ell(\cdot)$ 为损失函数。

实际应用中,由于实验装置的限制,测量值不可避免地受到噪声干扰,噪声一般可分为高斯噪声和泊松噪声。当 \mathbf{y} 中含有高斯噪声时,有

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - |\mathbf{Ax}|^2\|_2^2; \quad (3)$$

当测量值 \mathbf{y} 中含有泊松噪声时,有

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^T |\mathbf{Ax}|^2 - \mathbf{y}^T \lg(|\mathbf{Ax}|^2), \quad (4)$$

式中 \mathbf{e} 为全 1 的列向量。在 CDP 模型中,构造 \mathbf{A} 的形式为 $\mathbf{A} = [\mathcal{F}(\mathbf{M}_1) \mathcal{F}(\mathbf{M}_2) \cdots \mathcal{F}(\mathbf{M}_l) \cdots \mathcal{F}(\mathbf{M}_L)]^T$, \mathcal{F} 表示傅里叶变换, \mathbf{M}_l 代表第 l 个随机掩模, L 表示掩模个数。

在相位恢复问题的求解过程中, $f(\mathbf{x})$ 可以看作数据保真项,以使恢复图像和观测图像尽可能相似。用先验知识作为正则项可以提高图像的恢复质量,加入正则项的相位恢复模型可以表示为

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + \lambda R(\mathbf{x})], \quad (5)$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}$ 为最优解, λ 表示正则化因子, $R(\mathbf{x})$ 表示正则项。

自然图像在小波域是稀疏的,可以将图像小波系数的稀疏性作为先验知识,此时 $R(\mathbf{x})$ 可以表示为 $\varphi(\mathbf{W}\mathbf{x})$, \mathbf{W} 表示小波变换矩阵, $\varphi(\cdot)$ 表示一种稀疏度量,可以为 ℓ_0 范数、 ℓ_1 范数,令 $\mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{x}$, 则 $\|\mathbf{w}\|_0 \triangleq \#\{i | \mathbf{w}_i \neq 0\}$, $\|\mathbf{w}\|_1 \triangleq \sum_{i=1}^m |\mathbf{w}_i|$ 。Yuan 等^[22]在 2006 年提出 Group Lasso 模型,利用相邻小波系数之间的相关性,将组稀疏作为正则项^[23],可以诱导更强的稀疏性,且对噪声具有稳健性。因此 $\varphi(\cdot)$ 可以是 $\ell_{2,0}$ 范数,或者 $\ell_{2,1}$ 范数,即

$$\|\mathbf{w}\|_{2,0} \triangleq \#\left\{g \left| \sqrt{\sum_{i=1}^{G_g} (\mathbf{w}_g^i)^2} \neq 0 \right.\right\}, \quad (6)$$

$$\|\mathbf{w}\|_{2,1} \triangleq \sum_{g=1}^G \sqrt{\sum_{i=1}^{G_g} (\mathbf{w}_g^i)^2}, \quad (7)$$

式中 \mathbf{w}_g 表示一组小波系数, \mathbf{G}_g 表示第 g 组, \mathbf{w}_g^i 为 \mathbf{G}_g 中的第 i 个元素, $\#$ 为统计个数。

自然图像自身具有梯度稀疏性。利用这种梯度稀疏性将全变差^[24]作为正则项,则有

$$R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} = \sqrt{\sum_i \sum_j [(\nabla_1 \mathbf{x}_{ij})^2 + (\nabla_2 \mathbf{x}_{ij})^2]}, \quad (8)$$

式中 ∇_1 、 ∇_2 分别为水平和垂直方向的前向有限差分算子。

3 融合多种小波与全变差的相位恢复算法

离散正交小波变换将图像信息集中在低频子带,高频子带只包含图像的一些边缘信息。大部分小波系数的幅值很小或者接近于0,所以自然图像的小波系数具有很强的稀疏性。

图像经过正交小波分解并进行阈值处理后,在消除噪声系数的同时也会剔除一些不连续点的小波系数,产生伪吉布斯振荡效应,使得图像边缘变模糊;全变差的方法不会产生伪吉布斯振荡效应,且能够有效地保留图像的轮廓信息,但其产生的阶梯效应会导致细节信息丢失。因此全变差正则化、正交小波变换可分别用于恢复图像的轮廓信息和细节信息,将两者相结合应用到相位恢复中可以提高重构图像的质量。同时,正交小波变换的小波基具有多样性,不同小波基可以捕捉图像的不同结构信息。图1显示了db10小波基和sym4小波基3个高频子带的基本形状。前者具有较高的消失矩,可以捕捉图像的纹理信息;后者支撑长度短,易获得图像的边缘信息;二者具有一定的互补性。

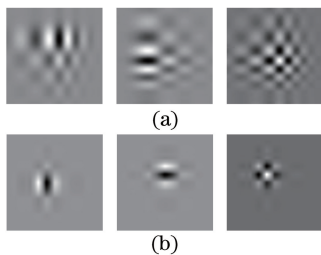


图1 小波变换的小波基。(a) db10; (b) sym4

Fig. 1 Wavelet bases of wavelet transform.

(a) db10; (b) sym4

融合多种小波变换与全变差正则化,提出相位恢复模型:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}) + \lambda \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} + \beta[\varphi(\mathbf{W}_1 \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{W}_2 \mathbf{x})]\}, \quad (9)$$

式中 β 为正则化因子; \mathbf{W}_1 、 \mathbf{W}_2 为正交小波变换矩阵,其小波基分别为db10和sym4。

由于相位恢复是非凸问题,受文献[25]的启发,采用复合分裂算法,将(9)式分解成几个易于求解的子问题。融合多种小波组稀疏性与全变差正则化的相位恢复算法步骤可描述如下:

- 1) 输入观测值 \mathbf{y} , h_1 , h_2 ;
 - 2) 进行初始化, \mathbf{x}^0 , $\mathbf{r}^1 = \mathbf{x}^0$, $i_{\text{ter}} = 20$, $k = 1$, $R_{\text{res}} = 1$;
 - 3) 使用黄金分割法自动搜索步长 ρ^0 , 搜索区区间为 $[0, 1]$;
 - 4) while($k < i_{\text{ter}}$ and $R_{\text{res}} > 0.0005$)
 - a) 使用黄金分割法自动搜索步长 ρ^k , 搜索区区间为 $[\rho^{k-1}/2, 2\rho^{k-1}]$
 - b) $\mathbf{x}_m = \mathbf{r}^k - \rho^k \nabla f(\mathbf{r}^k)$
 - c) $\hat{\sigma} = \frac{\text{median}(\mathbf{y}_i)}{0.6475}$, $\mathbf{y} = \mathbf{W}_1 \mathbf{x}_m$, $\mathbf{y}_i \in \text{subband HH}$
 - d) $\lambda = h_1 \times \hat{\sigma}$, $\beta = h_2 \times \hat{\sigma}$
 - e) $\mathbf{x}_1 = \text{prox}_{\rho^k} [(2\lambda \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}) \mathbf{x}_m]$
 - f) $\mathbf{x}_2 = \text{prox}_{\rho^k} \{[2\beta\varphi(\mathbf{W}_1 \mathbf{x})] \mathbf{x}_m\}$
 - g) $\mathbf{x}_3 = \text{prox}_{\rho^k} \{[2\beta\varphi(\mathbf{W}_2 \mathbf{x})] \mathbf{x}_m\}$
 - h) $\mathbf{x}^k = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)/3$
 - i) $R_{\text{res}} = \frac{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{r}^k\|_2}{\|\mathbf{r}^k\|_2}$
 - j) $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{x}^k$
 - k) $k = k + 1$
- end;

5) 输出 \mathbf{x}^k 。

使用黄金分割法自动搜索步长的公式为

$$\rho^0 = \arg \min_{\rho} f[\mathbf{x}^0 - \rho \nabla f(\mathbf{x}^0)], \quad (10)$$

$$\rho^k = \arg \min_{\rho} f[\mathbf{r}^k - \rho \nabla f(\mathbf{r}^k)]. \quad (11)$$

当 \mathbf{y} 中含有高斯噪声时, $f(\mathbf{x})$ 的偏导为

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}^T (|\mathbf{Ax}|^2 - \mathbf{y}) \odot \mathbf{Ax}, \quad (12)$$

式中 \odot 表示 Hadamard 乘积;当 \mathbf{y} 中含有泊松噪声时, $f(\mathbf{x})$ 的偏导为

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}^T \left(\frac{|\mathbf{Ax}|^2 - \mathbf{y}}{|\mathbf{Ax}|^2} \right) \odot \mathbf{Ax}; \quad (13)$$

然后利用梯度下降法更新 \mathbf{x}_m 。

在 \mathbf{x}_1 、 \mathbf{x}_2 、 \mathbf{x}_3 的求解中,阈值的选取尤为重要。阈值的大小与噪声方差有直接联系。对于未知图像,其噪声方差也是未知的,所以需要对噪声方差进行估计。估计信号的噪声方差一般采用小波变换的第一层细节信息(即高频系数),步骤c)对 \mathbf{x}_m 的噪声方差做出了估计。

步骤e)中,对 \mathbf{x}_1 进行了更新。文献[26]中最近邻映射的定义为

$$\text{prox}_\rho(g)(\mathbf{x}) := \text{argmin} \left\{ g(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\rho} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2 \right\}, \quad (14)$$

式中 $\text{prox}(\cdot)$ 为邻近算子。因此可得

$$\mathbf{x}_1 = \text{arg min}_x \left\{ \frac{1}{2\rho} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m\|_2^2 + 2\lambda \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} \right\}. \quad (15)$$

求解(15)式,利用文献[27]中的全变差最小化算法,令 $\mathbf{p}^0 = 0, \tau > 0$,对任意 $n \geq 0$,有

$$\mathbf{p}^{n+1} = \frac{\mathbf{p}^n + \tau \left[\nabla \left(\text{div} \mathbf{p}^n - \frac{\mathbf{x}_m}{2\lambda\rho} \right) \right]}{1 + \tau \left| \nabla \left(\text{div} \mathbf{p}^n - \frac{\mathbf{x}_m}{2\lambda\rho} \right) \right|}, \quad (16)$$

式中 div 表示离散旋度算子。取 $n=15$,则

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_m - \mathbf{p}^{16} / (2\lambda\rho). \quad (17)$$

步骤 f) 中对 \mathbf{x}_2 进行更新可得

$$\mathbf{x}_2 = \text{arg min}_x \left[\frac{1}{2\rho} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m\|_2^2 + 2\beta\varphi(\mathbf{W}_1\mathbf{x}) \right], \quad (18)$$

正交小波变换满足 $\mathbf{W}_1^\top \mathbf{W}_1 = \mathbf{I}$,则(18)式可以表达为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \text{arg min}_x \left[\frac{1}{2\rho} \|\mathbf{W}_1^\top \mathbf{W}_1 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)\|_2^2 + 2\beta\varphi(\mathbf{W}_1\mathbf{x}) \right] = \\ &= \text{arg min}_x \left[\frac{1}{2\rho} \|\mathbf{W}_1 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)\|_2^2 + 2\beta\varphi(\mathbf{W}_1\mathbf{x}) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

令 $\mathbf{z} = \mathbf{W}_1\mathbf{x}$,则

$$\hat{\mathbf{z}} = \text{arg min}_z \left[\frac{1}{2\rho} \|\mathbf{z} - \mathbf{W}_1\mathbf{x}_m\|_2^2 + 2\beta\varphi(\mathbf{z}) \right]. \quad (20)$$

令 $\mathbf{w} = \mathbf{W}_1\mathbf{x}_m$,当 $\varphi(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z}\|_0$ 时,对小波系数进行硬阈值处理,阈值 $T = 2\beta \times \rho$,则

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{cases} \mathbf{w}, & |\mathbf{w}| \geq T \\ 0, & |\mathbf{w}| < T \end{cases}. \quad (21)$$

当 $\varphi(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z}\|_1$ 时,对小波系数进行软阈值处理,得到

$$\hat{\mathbf{z}} = \text{sgn}(\mathbf{w}) (|\mathbf{w}| - T)_+, \quad (22)$$

式中 $\text{sgn}(\mathbf{w})$ 为符号函数, $(\cdot)_+$ 表示取大于 0 的部分。

当 $\varphi(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z}\|_{2,0}$ 时,对小波系数进行组硬阈值处理,即

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{cases} \mathbf{w}, & \sqrt{\sum_{i=1}^{|\mathbf{G}_g|} (\mathbf{w}_g^i)^2} \geq T \\ 0, & \sqrt{\sum_{i=1}^{|\mathbf{G}_g|} (\mathbf{w}_g^i)^2} < T \end{cases}. \quad (23)$$

当 $\varphi(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z}\|_{2,1}$ 时,对小波系数进行组软阈值

处理^[28]

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{w} \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{|\mathbf{G}_g|} (\mathbf{w}_g^i)^2} - T \right]_+. \quad (24)$$

经过上述推导可得,对 \mathbf{x}_2 进行迭代更新的公式为

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{W}_1^\top [\text{shrink}(\mathbf{W}_1\mathbf{x}_m, 2\beta \times \rho)], \quad (25)$$

同理

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{W}_2^\top [\text{shrink}(\mathbf{W}_2\mathbf{x}_m, 2\beta \times \rho)], \quad (26)$$

式中 shrink 表示收缩算子,可以为硬阈值收缩、软阈值收缩、组硬阈值收缩或组软阈值收缩。

4 实验结果与比较

采用 DOLPHIn 算法软件包中的 8 幅标准灰度图像 (Lena512、Boat512、Mandrill512、Cameraman256、Barbara512、Fingerprint512、Peppers256、House256) 作为测试图像(软件包从主页 <http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~tillmann/> 下载)。小波软件包可以从网址 <http://taco.poly.edu/WaveletSoftware/> 得到,所提算法采用 4 层小波分解。所有实验均在 Inter Core i5-4590 CPU、主频 3.30 GHz、内存 4 GB、Matlab R2015b 的平台上进行。所有算法都在 1 个 4 元随机掩模的条件下进行实验与比较,此 4 元随机掩模由元素 1, -1, i, -i 等概率生成^[16]。所有实验均采用随机初始值,随机种子为默认值。

4.1 不同阈值算法恢复结果的比较

当测量值中含有不同强度的高斯噪声,即测量值的信噪比 R_{SNR} 为 20 dB、15 dB、10 dB 时,从图像的恢复质量比较不同阈值处理的重构结果。图像恢复质量用峰值信噪比 (PSNR) 来衡量,PSNR 值越大,说明图像恢复质量越好。将传统的阈值处理算法(软阈值、硬阈值)和组阈值处理算法(组软阈值、组硬阈值,每组小波系数为 3×3 的小块)分别与全变差正则化相结合,比较其相位恢复结果,8 幅测试图像的平均 PSNR 值如表 1 所示。

由表1可见,组硬阈值与全变差正则化相结合

表 1 不同阈值算法相位恢复实验得到的 PSNR 比较
Table 1 Comparison of PSNR obtained by phase retrieval experiments with different threshold algorithms

Threshold algorithm	PSNR		
	$R_{\text{SNR}} = 20 \text{ dB}$	$R_{\text{SNR}} = 15 \text{ dB}$	$R_{\text{SNR}} = 10 \text{ dB}$
Soft	28.72	26.55	24.16
Hard	29.67	27.08	24.34
Group soft	29.34	27.13	24.74
Group hard	30.57	28.05	25.40

的处理结果明显优于其他阈值处理的结果。组稀疏的方法利用了小波系数之间的相关性,所以组阈值处理结果要优于传统阈值处理结果。将组硬阈值与全变差正则化相结合的相位恢复算法表示为 PRWATV,并与当前先进的相位恢复算法进行比较。

4.2 不同正则项的重构结果比较

当测量值中含有不同强度的高斯噪声时,将融合多种小波组稀疏性与全变差正则化的相位恢复算法与利用一种或两种正则项算法的重构结果进行比较。8幅测试图像的平均 PSNR 值如表 2 所示。实验结果表明,三种正则项相结合的重构结果要明显优于一种或两种正则项的重构结果。

表 2 不同正则项相位恢复实验得到的 PSNR 比较

Table 2 Comparison of PSNR obtained by phase retrieval experiments with different regularization terms

Regularization term	PSNR		
	$R_{SNR} = 20$ dB	$R_{SNR} = 15$ dB	$R_{SNR} = 10$ dB
db10 sparsity	28.45	25.71	22.97
sym4 sparsity	28.21	25.63	22.99
Total variation	28.97	27.01	24.77
db10 sparsity+total variation	30.17	27.72	25.15
sym4 sparsity+total variation	30.04	27.67	25.13
db10 sparsity+sym4 sparsity	30.06	27.36	24.67
db10 sparsity+sym4 sparsity+total variation	30.57	28.05	25.40

表 4 不同含噪测量值相位恢复实验得到的平均 PSNR 与运行时间的比较

Table 4 Comparison of average PSNR and running time obtained by phase retrieval experiments with different noise measurement values

R_{SNR} /dB	Algorithm	256 pixel×256 pixel		512 pixel×512 pixel	
		PSNR /dB	Time /s	PSNR /dB	Time /s
20	WF	13.49	0.96	14.00	6.21
	DOLPHIn	27.82	11.05	27.17	33.71
	BM3D-PRGAMP	30.52	22.26	29.10	98.66
	PRWATV	31.38	1.98	29.90	12.65
15	WF	12.67	0.91	13.11	6.07
	DOLPHIn	27.82	9.95	24.10	29.02
	BM3D-PRGAMP	28.20	47.89	26.70	197.04
	PRWATV	28.73	2.12	27.59	12.58

图像恢复质量的评价标准包含人的视觉效果。结构相似指数(SSIM)是评价视觉效果的一个参考值。SSIM 值越接近 1,图像恢复质量越好,越接近于

4.3 算法的抗噪性能及复杂度

4.3.1 高斯模型

当测量值中含有不同强度的高斯噪声时,利用图像恢复质量和运行时间比较所提算法与当前先进相位恢复算法的重构结果。对比算法 WF、TWF 的详细代码见 <http://web.stanford.edu/~yxchen/TWF/code.html>,BM3D-PRGAMP 算法由其软件包内代码(软件包从 https://github.com/ricedsp/D-AMP_Toolbox 下载)修改而来。大量实验表明,所提算法中的参数 $h_1 = 0.5mn$ 、 $h_2 = 4.8mn$ ($m \times n$ 为图像大小)时, T 在 6σ 左右,可以获得较高质量的重构图像。当测量值的信噪比为 15 dB 时,依次比较 5 幅 512 pixel×512 pixel 图像和 3 幅 256 pixel×256 pixel 图像的 PSNR 值,实验结果如表 3 所示。添加不同强度的高斯噪声,比较 3 幅 256 pixel × 256 pixel 图像和 5 幅 512 pixel × 512 pixel 图像的平均 PSNR 值与运行时间,实验结果如表 4 所示。

表 3 $R_{SNR} = 15$ dB 情况下相位恢复实验得到的 PSNR 比较

Table 3 Comparison of PSNR obtained by phase retrieval experiments with $R_{SNR} = 15$ dB

Image	WF	DOLPHIn	BM3D-PRGAMP	PRWATV
Lena512	13.29	27.13	29.13	30.82
Boat512	13.16	25.38	27.53	28.39
Mandril512	13.73	20.40	25.42	26.36
Barbara512	12.89	25.10	26.60	26.64
Fingerprint512	12.49	22.50	24.85	25.74
Cameraman256	12.15	24.51	27.00	27.54
Peppers256	12.94	24.64	27.71	28.61
House256	12.92	25.24	29.88	30.05

原始图像。以 Lena512 图像为例,计算 $R_{SNR} = 15$ dB 的情况下各算法的 SSIM 值,并显示恢复图像,视觉效果如图 2 所示。为了更好地比较恢复图像的细节

效果,截取图像的部分信息进行比较,结果如图 3 所示。由实验结果可以看出,提出算法 (PRWATV) 的

PSNR 值与 SSIM 明显高于其他三种算法,运行速度具有明显优势,并且具有较好的抗噪性能。



图 2 $R_{\text{SNR}} = 15$ dB 时不同算法相位恢复结果 (PSNR, SSIM) 对比。

(a) WF (13.28 dB, 0.08); (b) DOLPHIn (27.13 dB, 0.65);
(c) BM3D-PRGAMP (29.13 dB, 0.80); (d) PRWATV (30.82 dB, 0.83)

Fig. 2 Comparison of phase retrieval results (PSNR, SSIM) of different algorithms when $R_{\text{SNR}} = 15$ dB.

(a) WF (13.28 dB, 0.08); (b) DOLPHIn (27.13 dB, 0.65);
(c) BM3D-PRGAMP (29.13 dB, 0.80); (d) PRWATV (30.82 dB, 0.83)



图 3 $R_{\text{SNR}} = 15$ dB 时不同算法相位恢复结果部分信息对比。

(a) WF; (b) DOLPHIn; (c) BM3D-PRGAMP; (d) PRWATV

Fig. 3 Partial information comparison of phase retrieval results of different algorithms when $R_{\text{SNR}} = 15$ dB.

(a) WF; (b) DOLPHIn; (c) BM3D-PRGAMP; (d) PRWATV

4.3.2 泊松模型

当测量值中含有不同强度的泊松噪声且测量值的 R_{SNR} 分别为 20 dB 和 15 dB 时,将所提算法与 TWF、DOLPHIn、SPAR 算法 (原始代码可以从网址 <http://www.cs.tut.fi/~lasip/DDT/index3.html> 下载) 进行对比。所提算法的参数设定为 $h_1 = 1.2, h_2 = 9$, 此时 $T \approx 4\sigma$ 。选取图像集中 2 幅 $512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$ 和 2 幅 $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$ 的图像作为测试图像,实验结果如表 5 所示,表中

的时间为每幅图像独立运行 10 次的平均时间。以 Boat512 图像为例,计算 $R_{\text{SNR}} = 15$ dB 的情况下各算法的 SSIM 值,并显示恢复图像,结果如图 4 所示。

从实验结果可以看出,提出算法 (PRWATV) 无论从 PSNR 值还是视觉效果方面都优于 TWF 和 DOLPHIn 算法。与 SPAR 算法相比,虽然所提算法的平均 PSNR 值低 0.3 dB 左右,但是运行速度快了 10 倍左右。

表 5 不同强度含噪测量值相位恢复实验得到的 PSNR 与运行时间的比较

Table 5 Comparison of PSNR and running time obtained by phase retrieval experiments with different noise

$R_{\text{SNR}} / \text{dB}$	Algorithm	Lena512		Boat512		Cameraman256		Peppers256	
		PSNR /dB	Time /s	PSNR /dB	Time /s	PSNR /dB	Time /s	PSNR /dB	Time /s
20	TWF	14.10	7.37	14.06	7.21	12.71	1.76	13.80	1.72
	DOLPHIn	29.38	21.00	27.52	20.84	26.55	8.01	27.55	7.85
	SPAR	34.19	100.20	31.64	101.29	30.98	25.38	32.24	25.40
	PRWATV	33.60	11.12	31.31	11.04	30.71	1.92	31.89	1.92
15	TWF	13.34	7.58	13.09	7.38	12.13	1.76	12.88	1.72
	DOLPHIn	27.43	28.55	25.90	28.57	24.65	7.32	25.53	7.20
	SPAR	31.37	101.38	28.88	100.92	27.85	25.87	29.12	25.77
	PRWATV	30.97	11.24	28.68	11.34	27.82	1.66	28.79	1.66



图 4 $R_{\text{SNR}} = 15$ dB 时不同算法相位恢复结果(PSNR, SSIM)对比。

(a) TWF (13.10 dB, 0.11); (b) DOLPHIn (25.91 dB, 0.62); (c) SPAR (28.88 dB, 0.77); (d) PRWATV (28.68 dB, 0.76)

Fig. 4 Comparison of phase retrieval results (PSNR, SSIM) of different algorithms when $R_{\text{SNR}} = 15$ dB.

(a) TWF (13.10 dB, 0.11); (b) DOLPHIn (25.91 dB, 0.62);

(c) SPAR (28.88 dB, 0.77); (d) PRWATV (28.68 dB, 0.76)

5 结 论

针对现有相位恢复算法重构高质量图像时需要较长运算时间的问题,将图像在小波域的组稀疏性与图像自身的梯度稀疏性相结合,融合多种小波组稀疏性与全变差正则化,利用编码衍射成像系统,对只含有幅值信息的图像进行相位恢复,并采用复合分裂算法将原问题分解成几个易于求解的子问题独立求解,从而加快了算法的收敛速度。实验结果表明提出的 PRWATV 算法与当前先进的相位恢复算法相比,在图像重构质量与运行时间上均具有明显优势,并且对噪声具有稳健性。

参 考 文 献

- [1] Millane R P. Phase retrieval in crystallography and optics[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1990, 7(3): 394-411.
- [2] Akcakaya M, Tarokh V. Sparse signal recovery from a mixture of linear and magnitude-only measurements [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(9): 1220-1223.
- [3] Jaganathan K, Oymak S, Hassibi B. Sparse phase retrieval: Uniqueness guarantees and recovery algorithms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(9): 2402-2410.
- [4] Maji S K, Yahia H M, Fusco T. A multifractal-based wavefront phase estimation technique for ground-based astronomical observations[J]. IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing, 2016, 54(3): 1705-1715.
- [5] Leshem B, Xu R, Dallal Y, *et al.* Direct single-shot phase retrieval from the diffraction pattern of separated objects[J]. Nature Communications, 2016, 7: 10820.
- [6] Gerchberg R, Saxon W. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures[J]. International Journal for Light and Electron Optics, 1972, 35(2): 237-250.
- [7] Fienup J R. Phase retrieval algorithms: A comparison [J]. Applied Optics, 1982, 21(15): 2758-2769.
- [8] Roddier F, Roddier C. Wavefront reconstruction using iterative Fourier transforms[J]. Applied Optics, 1991, 30(11): 1325-1327.
- [9] Guo Y M, Zhang F, Song Q, *et al.* Application of hybrid iterative algorithm in TIE phase retrieval with large defocusing distance[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(9): 0912001.
郭怡明, 张方, 宋强, 等. 一种混合迭代算法在大离焦距离 TIE 相位恢复中的应用[J]. 光学学报, 2016, 36(9): 0912001.
- [10] Cheng H, Lü Q Q, Zhang W J, *et al.* Phase retrieval method based on liquid crystal on silicon tunable-lens[J]. Chinese Journal of Lasers, 2017, 44(3): 0304001.
程鸿, 吕倩倩, 张文君, 等. 基于硅基液晶变焦透镜的相位恢复算法[J]. 中国激光, 2017, 44(3): 0304001.
- [11] Ohlsson H, Yang A, Dong R, *et al.* Compressive phase retrieval from squared output measurements via semidefinite programming[C]//International Federation of Automatic Control Symposium on System Identification. Brussels, Belgium, 2012: 89-94.
- [12] Shechtman Y, Beck A, Eldar Y C. GESPAR: Efficient phase retrieval of sparse signals [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(4): 928-938.
- [13] Pedarsani R, Yin D, Lee K, *et al.* Phasecode: Fast and efficient compressive phase retrieval based on sparse-graph codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2017, 63(6): 3663-3691.
- [14] Cheng H, Zhang Q B, Wei S. Phase retrieval based on total variation[J]. Journal of Image and Graphics, 2010, 15(10): 1425-1429.
程鸿, 章权兵, 韦穗. 基于整体变分的相位恢复[J].

- 中国图象图形学报, 2010, 15(10): 1425-1429.
- [15] Lian Q S, Zhao X R, Shi B S, *et al.* Phase retrieval algorithm based on cartoon-texture model[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2016, 38(8): 1991-1998.
练秋生, 赵晓蕊, 石保顺, 等. 基于卡通-纹理模型的相位恢复算法[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(8): 1991-1998.
- [16] Candes E J, Li X, Soltanolkotabi M. Phase retrieval from coded diffraction patterns[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2015, 39(2): 277-299.
- [17] Candes E J, Li X, Soltanolkotabi M. Phase retrieval via Wirtinger flow: Theory and algorithms[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(4): 1985-2007.
- [18] Chen Y, Candes E J. Solving random quadratic systems of equations is nearly as easy as solving linear systems[C]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2015: 739-747.
- [19] Tillmann A M, Eldar Y C, Mairal J. DOLPHIn: Dictionary learning for phase retrieval[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(24): 6485-6500.
- [20] Metzler C A, Maleki A, Baraniuk R G. BM3D-PRGAMP: Compressive phase retrieval based on BM3D denoising[C]. IEEE International Conference on Image Processing, 2016: 2504-2508.
- [21] Katkovnik V. Phase retrieval from noisy data based on sparse approximation of object phase and amplitude [OL]. [2017-9-14]. http://www.cs.tut.fi/~lasip/DDT/pdfs/Single_column.pdf.
- [22] Yuan M, Lin Y. Model selection and estimation in regression with grouped variables[J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 2006, 68(1): 49-67.
- [23] Yu H J, Jiang M F, Chen H R, *et al.* Super-pixel algorithm and group sparsity regularization method for compressed sensing MR image reconstruction[J]. Optik, 2017, 140: 392-404.
- [24] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1/2/3/4): 259-268.
- [25] Huang J Z, Zhang S T, Metaxas D. Efficient MR image reconstruction for compressed MR imaging[J]. Medical Image Analysis, 2011, 15(5): 670-679.
- [26] Beck A, Teboulle M. Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18(11): 2419-2434.
- [27] Chambolle A. An algorithm for total variation minimization and applications[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2004, 20(1): 89-97.
- [28] Kowalski M, Siedenburg K, Dorfler M. Social sparsity! Neighborhood systems enrich structured shrinkage operators[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(10): 2498-2511.