

# 基于方形孔径微透镜阵列二维叠栅条纹的微小角度测量

郑三超, 周素梅, 黄高坤, 杨晓铭

西南大学物理科学与技术学院, 重庆 400715

**摘要** 提出了一种利用方形孔径微透镜阵列和微图形阵列产生的二维叠栅条纹测量微小角度的方法。分析了不同尺寸阵列产生的二维叠栅条纹的节距变化规律, 推导了微小旋转角度的表达式, 对叠栅条纹的节距与阵列夹角之间的关系进行了理论分析与实验测量。研究表明, 当微图形阵列的窗口边长小于微透镜阵列的透镜元宽度时, 叠栅条纹的节距变化较平缓, 且对微图形与微透镜阵列间的夹角  $\theta$  的变化较敏感, 这有利于提高测量结果的准确性; 当微图形阵列的窗口边长为 0.3 mm, 微透镜阵列的透镜元宽度为 0.4 mm 时, 节距与夹角  $\theta$  间关系的实验结果与理论结果总体一致。

**关键词** 光栅; 微小角度测量; 方形孔径微透镜阵列; 叠栅条纹; 节距

中图分类号 O436

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201838.0205002

## Micro-Angle Measurement Based on Two-Dimensional Moire Fringes Generated by Square Aperture Micro-Lens Array

Zheng Sanchao, Zhou Sumei, Huang Gaokun, Yang Xiaoming

School of Physical Science and Technology, Southwest University, Chongqing 400715, China

**Abstract** A micro-angle measurement method based on the two-dimensional moire fringes generated by square aperture micro-lens array and micro-graphic array is proposed. The variation principle of the moire fringe pitch formed by these arrays with different sizes is analyzed. The expression of small rotation angle is deduced. The theoretical analysis and experimental measurement are carried out on the relationship between the moire fringe pitch and the included angle of arrays. The research results show that, when the graphic element size of the micro-graphic array is shorter than the lens element size of the micro-lens array, the moire fringe pitch changes gently and is sensitive to the variation of the included angle  $\theta$  between micrographics and microlens array, which is helpful for the improvement of the measurement accuracy. When the graphic element size is 0.3 mm and the lens element size is 0.4 mm, the experimental result on the relationship between the pitch and the included angle  $\theta$  is basically consistent with the theoretical one.

**Key words** gratings; micro-angle measurement; square aperture micro-lens array; moire fringe; pitch

**OCIS codes** 050.2770; 230.3990; 130.1750; 110.2760

## 1 引 言

叠栅条纹技术是现代光学测量中的一种重要方法, 具有较高的准确度和灵敏度, 对细微位移、转动和形变极其敏感, 对微小位移及微小角度有放大作用, 被广泛应用于精密测量、光学校准、通信、信号细分、图像处理、全息存储等领域中<sup>[1-5]</sup>。

微小角度测量是计量科学的重要组成部分。随着稳定激光光源的发展, 叠栅条纹技术使工业生产现场测量成为可能。方靖岳等<sup>[6]</sup>进行了叠栅条纹微小旋转角度测量的频域分析, 较好地解释了叠栅条纹形成的原理。王明佳等<sup>[7]</sup>提出了一种新的精确自动测量叠栅条纹方向角的算法, 使叠栅条纹方向角的计算精度大幅度提高。乔彦峰等<sup>[8]</sup>提出了一种双

收稿日期: 2017-07-31; 收到修改稿日期: 2017-10-12

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金(XDJK2016C123)

作者简介: 郑三超(1989—), 男, 硕士研究生, 主要从事方形孔径平面微透镜阵列方面的研究。E-mail: 1351189436@qq.com

导师简介: 周素梅(1976—), 女, 博士, 副教授, 主要从事微光学及应用方面的研究。E-mail: sumeizhou@163.com

(通信联系人)

光栅干涉叠栅条纹横扭角测量的高精度光学测角方法。任静斌等<sup>[9-10]</sup>提出了一种基于叠栅条纹法的船体横扭角的测量方法。吴振刚等<sup>[11]</sup>提出了一种回转射线二面角的测量方法,验证了在机测量的可行性。Prakash 等<sup>[12-16]</sup>开展了一系列微小位移与微小角度的计算,促进了微小测量理论的发展。由于微透镜阵列的微小测量理论较为复杂,基于一维光栅理论的研究较多,而针对微透镜阵列产生的二维叠栅条纹的微小角度测量研究鲜有报道。方形孔径微透镜阵列与微图形阵列在微小角度下叠合可以产生二维叠栅条纹,但叠合的微小角度难以精确测量。目前,方形孔径微透镜阵列产生的二维叠栅条纹已有一些基础工作<sup>[17-18]</sup>,如殷贵坤<sup>[19]</sup>以一维光栅理论为基础,建立了方形孔径微透镜阵列的二维栅线模型,研究了阵列和匹配微图形产生的二维叠栅条纹的形成机理,并给出二维叠栅条纹节距的计算公式。

本文对方形孔径微透镜阵列与微图形阵列产生的二维叠栅条纹进行了研究。将微透镜阵列与微图形阵列单元之间的隔线视为两个二维栅格线簇阵列光栅,分析不同条件下不同尺寸方形孔径微透镜阵列产生的叠栅条纹的节距变化规律,并对微小旋转角度进行了测量。

## 2 理论分析

### 2.1 二维叠栅条纹的节距变化规律

微图形阵列和方形孔径微透镜阵列的二维栅线结构示意图如图 1 所示,其中  $a$  为微图形阵列的窗口边长,  $b$  为方形孔径微透镜阵列的透镜元宽度。

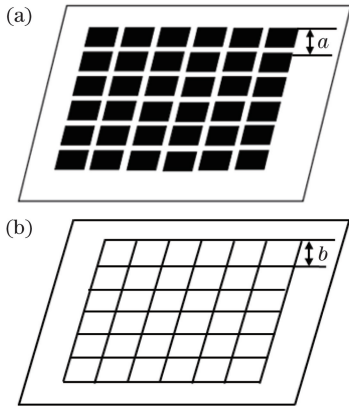


图 1 (a)微图形阵列和(b)方形孔径微透镜阵列的二维栅线结构示意图

Fig. 1 Schematics of two dimensional grid structures of (a) micro-graphic array and (b) square aperture micro-lens array

图 2 所示为方形孔径微透镜阵列和微图形阵列组合产生的叠栅条纹示意图,可将方形孔径微透镜

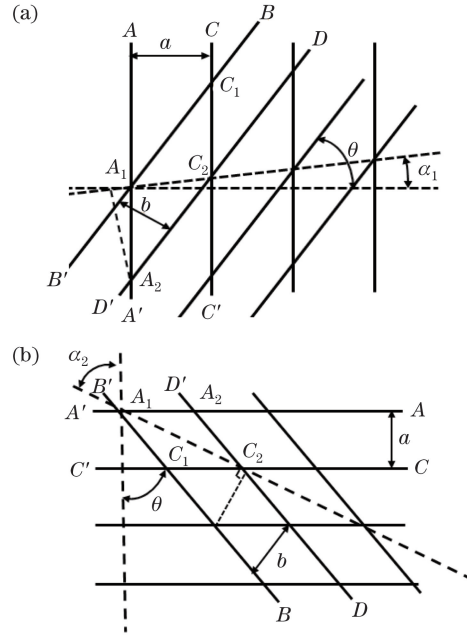


图 2 方形孔径微透镜阵列和微图形阵列组合产生的叠栅条纹示意图。(a)第一种条纹;(b)第二种条纹

Fig. 2 Schematics of moire fringes generated by combination of square aperture micro-lens array and micro-graphic array.

(a) First kind of fringe; (b) second kind of fringe

阵列透镜元的边界线和微图形阵列的窗口边界线看成是正交排列的二维栅格。 $BB'$ 和 $DD'$ 分别代表相邻的微透镜阵列透镜元的一组栅线; $AA'$ 和 $CC'$ 分别代表相邻的微图形阵列窗口边界线的一组栅线。微图形与微透镜阵列间的夹角为 $\theta$ , $A_1C_2$ 为叠栅条纹的走向。由图可知

$$\frac{b}{\sin \theta} - \frac{a}{\tan \theta} = a \tan \alpha_1, \quad (1)$$

式中 $\alpha_1$ 为第一种条纹与水平方向的夹角。由(1)式可得,

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{b}{a \sin \theta} - \frac{1}{\tan \theta}\right), \quad (2)$$

则第一种叠栅条纹的节距为

$$B_1 = \frac{b \cos \alpha_1}{\sin \theta}. \quad (3)$$

同理可得

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{a \cos \theta}{b - a \sin \theta}\right), \quad (4)$$

$$B_2 = \frac{b \sin \alpha_2}{\cos \theta}, \quad (5)$$

(4)和(5)式中 $\alpha_2$ 为第二种条纹与竖直方向的夹角, $B_2$ 为第二种叠栅条纹的节距。

由于叠栅条纹具有放大作用,不同尺寸二维光栅叠合产生的叠栅条纹成像效果不同。图 3 所示为

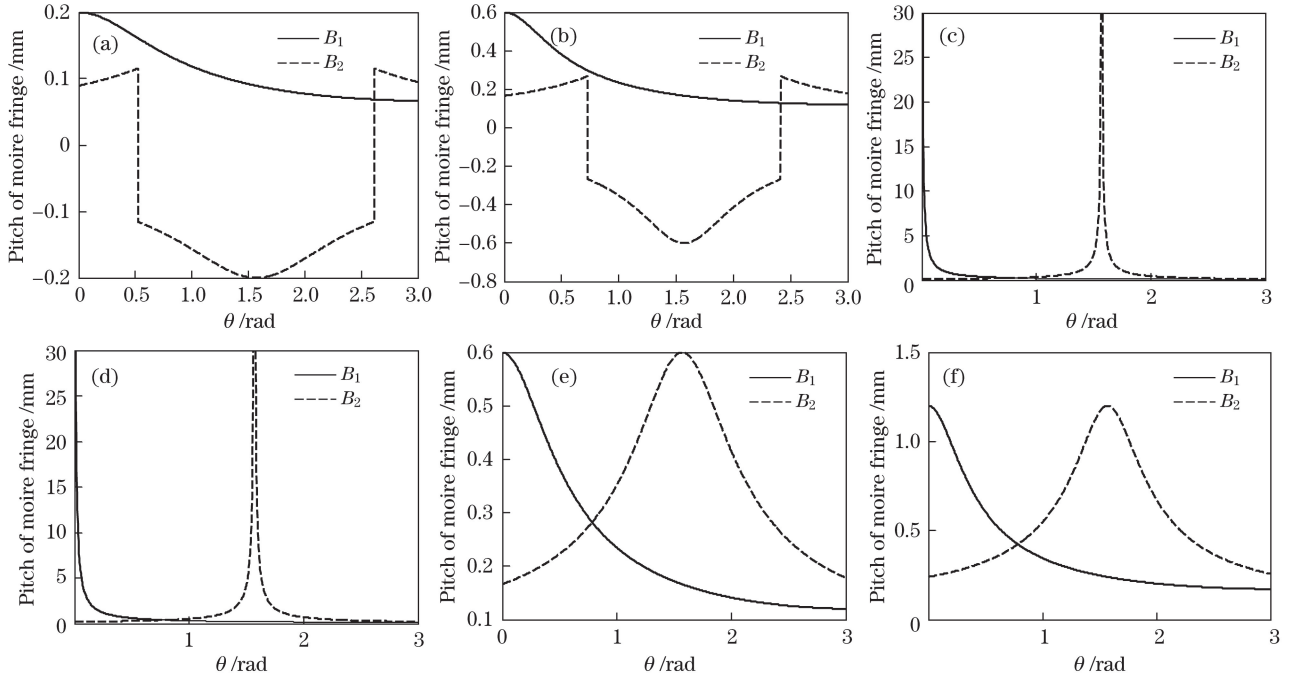


图 3 叠栅条纹的节距与夹角间的关系。(a)  $a=0.2, b=0.1$ ; (b)  $a=0.3, b=0.2$ ; (c)  $a=0.2, b=0.2$ ;  
(d)  $a=0.3, b=0.3$ ; (e)  $a=0.2, b=0.3$ ; (f)  $a=0.3, b=0.4$

Fig. 3 Relationship between moire fringe pitch and included angle. (a)  $a=0.2, b=0.1$ ; (b)  $a=0.3, b=0.2$ ;  
(c)  $a=0.2, b=0.2$ ; (d)  $a=0.3, b=0.3$ ; (e)  $a=0.2, b=0.3$ ; (f)  $a=0.3, b=0.4$

叠栅条纹的节距与夹角  $\theta$  间的关系。可以看出,当  $a > b$  时,如图 3(a)、(b)所示,在某一夹角下,  $B_2$  突然变小;当  $a = b$  时,如图 3(c)、(d)所示,  $B_2$  在夹角为 1.57 rad 时突变为无穷大,  $B_1$  在夹角为 0 rad 时由无穷大突变为 0,节距的突变会增加小角度测量的难度,降低测量结果的准确性;当  $a < b$  时,如图 3(e)、(f)所示,  $B_1$  和  $B_2$  的变化较为平缓,且对夹角的变化较为敏感,这有利于观察节距的变化,当夹角为 0.784 rad 时,  $B_1$  与  $B_2$  相等。

## 2.2 叠栅条纹节距与微小旋转角度间的关系

当平行光垂直入射方形孔径微透镜阵列时,电荷耦合装置(CCD)可探测到叠栅条纹的图像并进行图像处理。当叠栅条纹的节距变化量小于一个像元的尺寸时,CCD 无法分辨,为了满足测量需要,必须引入一个初始夹角。由微分原理可得

$$dB = f'(\theta)d\theta, \quad (6)$$

式中  $B$  为任意叠栅条纹的节距。由(3)~(6)式可以得到节距变化量与角度变化量间的关系<sup>[20]</sup>,即

$$dB_1 = \frac{-b \cos \theta}{(\sin \theta)^2} \cos \left[ \arctan \left( \frac{b - a \cos \theta}{a \sin \theta} \right) \right] d\theta - \frac{b}{\sin \theta} \sin \left[ \arctan \left( \frac{b - a \cos \theta}{a \sin \theta} \right) \right] \frac{a^2 - ab \cos \theta}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} d\theta, \quad (7)$$

$$dB_2 = \frac{b \sin \theta}{(\cos \theta)^2} \sin \left[ \arctan \left( \frac{a \cos \theta}{b - a \sin \theta} \right) \right] d\theta + \frac{b}{\cos \theta} \cos \left[ \arctan \left( \frac{a \cos \theta}{b - a \sin \theta} \right) \right] \frac{a^2 + b^2 - ab \sin \theta}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} d\theta. \quad (8)$$

因此,可以根据叠栅条纹的节距变化进行微小角度测量,这是微小旋转角度测量的理论依据。

测角精度与叠栅条纹宽度(取决于 CCD 的分辨率)和初始夹角有关。在理想情况下,对于给定的 CCD,其像元间隔一定,可引入一个合适的初始角度以提高测角精度。当  $a=0.3, b=0.4$  时,不同初始夹角下节距变化量与夹角变化量间的关系如图 4 所示。可以看出,当初始夹角为 0.017, 0.034, 0.052 rad

时,随着夹角的微小变化,节距急剧变化,节距的变化对夹角的变化非常敏感;当初始夹角为 0.087, 0.174, 0.26 rad 时,随着夹角的微小变化,节距变化相对平缓。初始夹角越小,叠栅条纹的节距宽度变化量越大;初始夹角越大,叠栅条纹的节距变化量越小。当初始夹角小于 0.052 rad 时,合成的误差小于节距变化量或夹角变化量引起的误差,因此要合理选取两个误差源的大小,使合成误差最小。

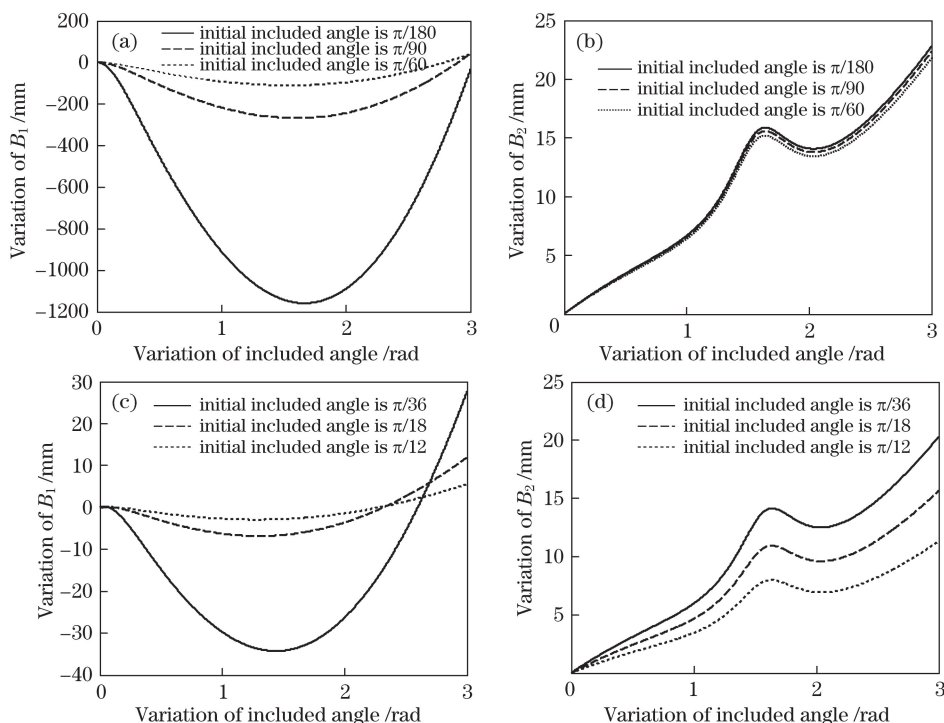


图 4 不同初始夹角下节距变化量与夹角变化量间的关系。(a)(c)  $B_1$  的变化量;(b)(d)  $B_2$  的变化量  
 Fig. 4 Relationship between pitch variation and variation of included angle under different initial included angles.  
 (a) (c) Variation of  $B_1$ ; (b) (d) variation of  $B_2$

### 3 实验与分析

微小角度测试系统实验装置如图 5 所示。实验采用的激光器的波长为 632.8 nm。采用美国 Newport 公司生产的 LC-075 型激光准直器,准直后的光束直径为 100 mm。采用透射率连续变化的反射中性滤光片,通过旋转滤光片来控制通光量,以防止 CCD 饱和,同时,所拍摄的图像的灰度也可被调节。旋转仪可令微透镜阵列的旋转角度在 0~

0.785 rad 与 0.785~1.57 rad 之间变化;CCD 相机的像素数量为  $752 \times 582$  个,捕获的幅面尺寸为  $4.8 \text{ mm} \times 3.6 \text{ mm}$ ,可捕获 475 个阵列基元。微图形阵列的窗口边长为 0.3 mm,方形孔径微透镜阵列的透镜元宽度为 0.4 mm,阵列的外形尺寸均为  $20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ 。实验中,从激光器出射的激光束经滤光片进入激光准直器,准直后的平行激光束垂直入射到二维光栅,通过移动平行导轨上的 CCD 进行叠栅条纹的探测。

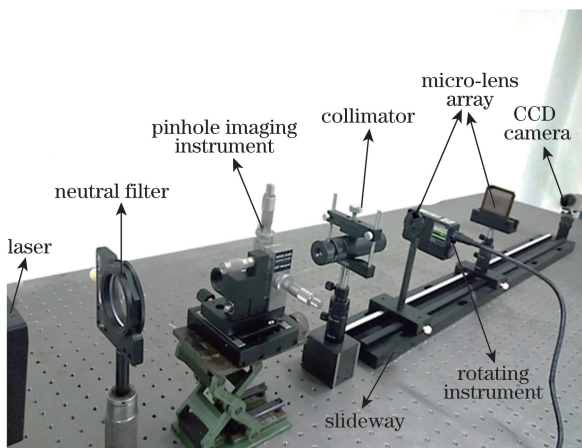


图 5 微小角度测试系统实验装置  
 Fig. 5 Experimental devices of small angle measurement system

不同夹角  $\theta$  下的叠栅条纹如图 6 所示。由于叠栅条纹具有放大性与同步性,叠栅条纹的节距测量结果存在一定的误差。针对每种角度的条纹,分别采集 5 组数据并取平均值。当  $a = 0.3 \text{ mm}$ ,  $b = 0.4 \text{ mm}$ ,  $\theta$  为 0~0.785 rad 时,条纹节距见表 1。当  $\theta$  为 0.785~1.57 rad 时,条纹节距见表 2。图 7 和图 8 所示分别为节距与夹角  $\theta$  间关系的理论计算和实验测量结果。

微小角度一般指小于 0.087 rad 的角度。当夹角  $\theta$  为 0~0.1 rad 和 1.47~1.57 rad 时,叠栅条纹节距的理论值和实验值如图 9 所示。

由于叠栅条纹具有放大性与同步性,当夹角  $\theta$  为 0~0.785 rad 时,易观察到  $B_1$  的变化;当夹角为 0.785~1.57 rad 时,易观察到  $B_2$  的变化。叠栅条纹

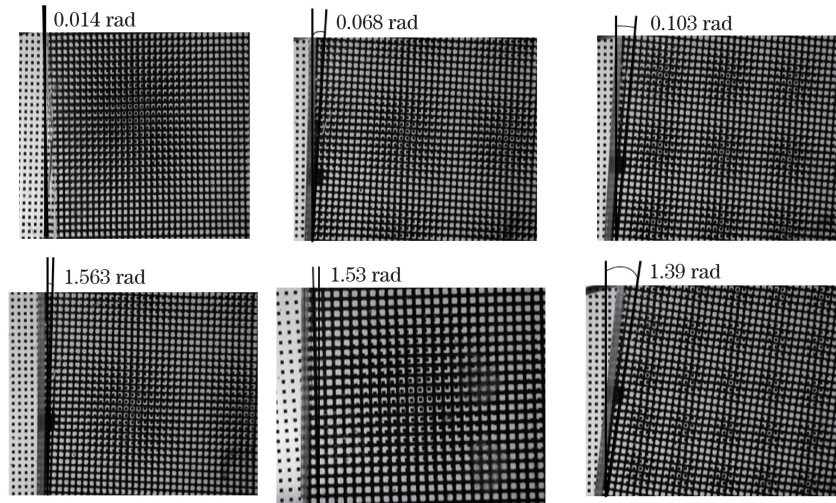


图 6 不同夹角下的叠栅条纹

Fig. 6 Moiré fringes under different included angles

表 1 夹角为 0~0.785 rad 时的条纹节距

Table 1 Fringe pitch when included angle is in range of 0-0.785 rad

$\theta / \text{rad}$	0.010	0.019	0.024	0.075	0.15	0.29	0.35	0.40	0.58	0.78
$B_1 / \mu\text{m}$	1200.7	1198.3	1193.6	1159.2	1065.2	856.3	759.5	709.2	540.9	422.8
	1190.9	1187.6	1188.7	1160.5	1058.1	834.5	752.9	712.8	536.2	435.2
	1200.2	1185.9	1191.6	1158.6	1057.3	836.3	757.0	699.8	564.2	419.2
	1200.5	1200.4	1192.9	1159.4	1054.9	846.5	754.8	702.8	532.4	418.6
	1198.9	1196.7	1189.8	1162.1	1060.7	837.9	758.6	689.7	534.9	410.8
Average value / $\mu\text{m}$	1198.2	1193.8	1191.3	1160.0	1059.2	842.2	756.5	702.9	541.7	421.3

表 2 夹角为 0.785~1.57 rad 时的条纹节距

Table 2 Fringe pitch when included angle is in range of 0.785-1.57 rad

$\theta / \text{rad}$	0.78	0.98	1.16	1.21	1.27	1.41	1.49	1.539	1.541	1.55
$B_2 / \mu\text{m}$	426.8	541.8	710.2	757.6	857.2	1059.7	1162.3	1184.6	1197.6	1200.8
	430.2	539.4	711.8	754.4	848.5	1062.4	1161.8	1188.9	1189.4	1196.9
	419.1	544.3	708.8	756.1	842.1	1057.3	1164.3	1190.3	1191.2	1200.4
	416.4	537.1	699.8	749.8	845.5	1059.6	1159.6	1192.9	1198.6	1200.2
	413.8	542.9	697.9	753.6	839.8	1060.3	1163.4	1193.8	1194.7	1199.9
Average value / $\mu\text{m}$	421.3	541.1	705.7	754.3	846.6	1059.9	1162.3	1190.1	1194.3	1199.6

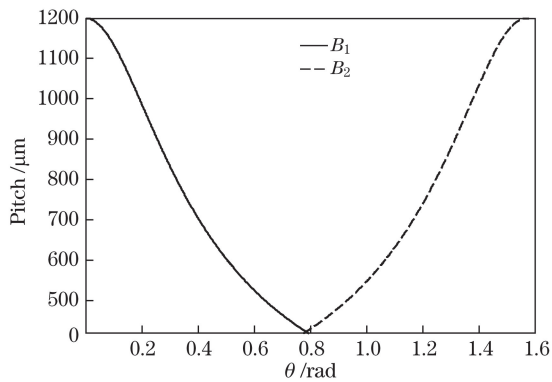


图 7 节距与夹角关系的理论计算结果

Fig. 7 Relationship between included angle and pitch from theoretical calculation

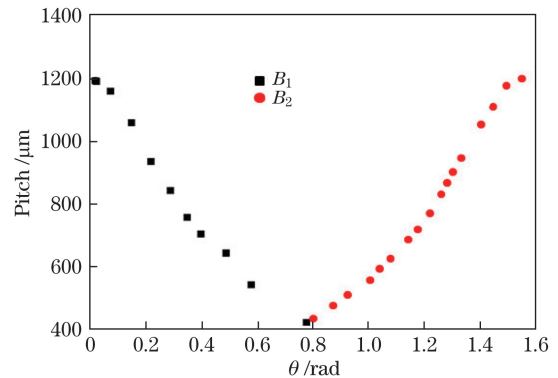


图 8 节距与夹角关系的实验测量结果

Fig. 8 Relationship between included angle and pitch from experimental measurement

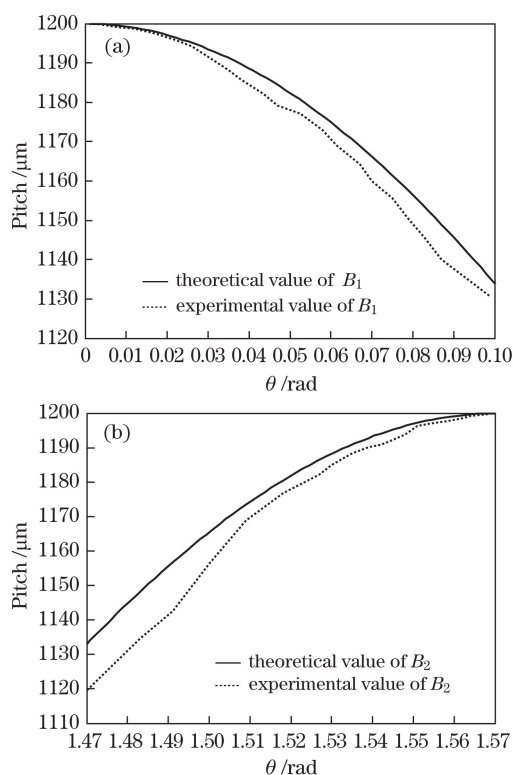


图9 夹角分别为(a)  $0\sim 0.1$  rad和(b)  $1.47\sim 1.57$  rad时的叠栅条纹节距的理论值和实验值

Fig. 9 Theoretical and experimental pitch value of moiré fringes when included angle is in range of (a)  $0\sim 0.1$  rad and (b)  $1.47\sim 1.57$  rad, respectively

的节距与夹角 $\theta$ 是一一对应的,不同夹角 $\theta$ 下的节距实验值与理论值总体一致。从图7~9中可以看出,叠栅条纹节距的实验值与理论值稍有偏差,这是由CCD的成像质量、节距测量精度、系统的准直度、夹角测量的不确定度等因素导致的。

## 4 结 论

根据方形孔径微透镜阵列及微图形阵列的二维栅格模型,推导出了基于方形孔径微透镜阵列的二维叠栅条纹的微小旋转角度表达式,分析了二维叠栅条纹节距与夹角间的关系。当 $a=0.3$  mm,  $b=0.4$  mm时,节距与夹角间的关系的实验结果与理论结果总体一致,这表明基于方形孔径微透镜阵列的二维叠栅条纹的微小角度测量是可行的。实验结果对航天航空、航海、通信等领域的精密测量具有参考价值。

## 参 考 文 献

[1] Wang Y. Moiré fringe analysis on digital holographic storage[J]. Acta Photonica Sinica, 2009, 38(11): 2972-2974.

王也. 莫尔条纹分析在数字全息存储中的应用[J]. 光子学报, 2009, 38(11): 2972-2974.

- [2] Zhu Y L, Chen R G, Xie J, *et al.* Principle of Moiré fringe in autostereoscopic display based on parallax barrier and lenticular lens[J]. Chinese Journal of Liquid Crystals and Displays, 2009, 24(6): 911-915. 朱燕林, 陈瑞改, 谢佳, 等. 光栅式自由立体显示器中莫尔条纹的形成规律[J]. 液晶与显示, 2009, 24(6): 911-915.
- [3] Liu Q, Ohba R. Effects of a small inclination misalignment in Talbot interferometry by use of gratings with arbitrary line orientation. I. Theoretical analysis[J]. Applied Optics, 2001, 40(22): 3668-3676.
- [4] Kong L S, Nan J S, Xun X C, *et al.* Research status quo of flat 3-D display technology[J]. Chinese Journal of Optics and Applied Optics, 2009, 2(2): 112-118. 孔令胜, 南敬实, 荀显超. 平面三维显示技术的研究现状[J]. 中国光学与应用光学, 2009, 2(2): 112-118.
- [5] Huang F J, Wan Q H, Yang S W, *et al.* Method of velocity measurement based on Moiré fringe and nonlinear tracking differentiator[J]. Infrared and Laser Engineering, 2014, 43(6): 1930-1935. 黄法军, 万秋华, 杨守旺, 等. 莫尔条纹光电信号的非线性跟踪微分测速方法[J]. 红外与激光工程, 2014, 43(6): 1930-1935.
- [6] Fang J Y, Qin S Q, Wang X S, *et al.* Frequency domain analysis of small angle measurement with Moiré fringe[J]. Acta Photonica Sinica, 2010, 39(4): 709-713. 方靖岳, 秦石乔, 王省书, 等. 莫尔条纹法测量微小旋转角度的频域分析[J]. 光子学报, 2010, 39(4): 709-713.
- [7] Wang M J, Wu Z G, Xu D P, *et al.* Accurate and automatic recognition of Moiré fringe angle[J]. Chinese Optics, 2011, 4(5): 509-513. 王明佳, 武治国, 徐大鹏, 等. 精确自动识别莫尔条纹方向角的算法[J]. 中国光学, 2011, 4(5): 509-513.
- [8] Qiao Y F, Wang C L, Li X R, *et al.* Measurement of torsion angular distortion based on Moiré fringe[J]. Optics and Precision Engineering, 2008, 16(11): 2132-2139. 乔彦峰, 王成龙, 李向荣, 等. 莫尔条纹测量扭转变形角的方案研究[J]. 光学精密工程, 2008, 16(11): 2132-2139.
- [9] Ren J B, Zhang Y Y, Li X R, *et al.* Research on hull transverse twist measurement based on Moiré fringe[J]. Computer Measurement & Control, 2008, 16(7): 939-945. 任静斌, 张尧禹, 李向荣, 等. 基于莫尔条纹的船体横扭角测量方法研究[J]. 计算机测量与控制, 2008, 16(7): 939-945.
- [10] Li X R. High precision subdivision of Moiré fringe[J].

- Opto-Electronic Engineering, 2007, 34(11): 74-77.  
李向荣. 莫尔条纹的高精度细分技术研究[J]. 光电工程, 2007, 34(11): 74-77.
- [11] Wu Z G, Zeng Z M, Li X Q, *et al.* Non-contact on-machine dihedral angle measurement approach based on rotary ray-scanning mechanism[J]. Chinese Journal of Lasers, 2016, 43(5): 0508001.  
吴振刚, 曾周末, 李兴强, 等. 非接触回转射线二面角在机测量方法[J]. 中国激光, 2016, 43(5): 0508001.
- [12] Prakash S, Singh S, Rana S. Automated small tilt-angle measurement using Lau interferometry[J]. Applied Optics, 2005, 44(28): 5905-5909.
- [13] Cheng Y S. Interference patterns in cross-grating interferometers: Further analysis[J]. Applied Optics, 1989, 28(3): 556-564.
- [14] Sanchez-Brea L M, Torcal-Milla F J, Salgado-Remacha F J, *et al.* Collimation method using a double grating system[J]. Applied Optics, 2010, 49(17): 3363-3368.
- [15] Itoh H, Nagai K, Sato G, *et al.* Two-dimensional grating-based X-ray phase-contrast imaging using Fourier transform phase retrieval[J]. Optics Express, 2011, 19(4): 3339-3346.
- [16] Liu C H, Jywe W Y, Tzeng S C. Simple three-dimensional laser angle sensor for three-dimensional small-angle measurement[J]. Applied Optics, 2004, 43(14): 2840-2845.
- [17] Yang X M, Zheng S C, Huang G K, *et al.* Fourier transform of 2D Moiré fringe[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(9): 092302.  
杨晓铭, 郑三超, 黄高坤, 等. 二维叠栅条纹的傅里叶变换[J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54(9): 092302.
- [18] Zhang B H, Zhou S M, Yang X M, *et al.* Talbot effect of square-aperture microlens array[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(5): 0523001.  
张宝昊, 周素梅, 杨晓铭, 等. 方形孔径微透镜阵列的泰伯效应[J]. 光学学报, 2016, 36(5): 0523001.
- [19] Yin G K, Zhou S M, Zhang B H. Theoretical and experimental study of two-dimensional Moiré fringe of square aperture planar microlens array[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(s2): s223002.  
殷贵坤, 周素梅, 张宝昊. 方形孔径平面微透镜阵列的二维叠栅条纹理论和实验研究[J]. 光学学报, 2014, 34(s2): s223002.
- [20] Goodman J W. Introduction to Fourier optics[M]. Qin K C, Liu P S, Chen J B, *et al.*, Transl. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 1976.  
约瑟夫·古德曼. 傅里叶光学导论[M]. 秦克诚, 刘培森, 陈家璧, 等, 译. 北京: 电子工业出版社, 1976.