

大气湍流下的轨道角动量编码测量设备无关量子密钥分发

朱卓丹^{1*}, 赵尚弘¹, 谷文苑¹, 刘菁¹, 孙祥祥²

¹空军工程大学信息与导航学院, 陕西 西安 710077;

²中国人民解放军 93980 部队, 新疆 乌鲁木齐 830005

摘要 基于 Kolmogorov 及非 Kolmogorov 湍流模型, 分析了大气湍流对光子轨道角动量(OAM)的散射效应, 得到了探测端不同 OAM 模式的概率。分析了两种湍流条件下 OAM 编码测量设备无关量子密钥分发(MDI-QKD)的密钥生成率与最大传输距离。仿真结果表明, 当光束在大气信道传输时, 光束的径向强度逐渐增大, 湍流对光子 OAM 的散射效应逐渐增强, 初始 OAM 发散为相邻 OAM 模式并趋于无规则分布, 探测端测得初始 OAM 模式的概率不断减小。大气湍流下 OAM 编码 MDI-QKD 的最大传输距离比偏振编码 MDI-QKD 的长约 10 km。

关键词 量子光学; 量子通信; 测量设备无关量子密钥分发; 大气湍流; 轨道角动量

中图分类号 TN918

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201838.1227002

Orbital-Angular-Momentum-Encoded Measurement-Device-Independent Quantum Key Distributions Under Atmospheric Turbulence

Zhu Zhuodan^{1*}, Zhao Shanghong¹, Gu Wenyuan¹, Liu Jing¹, Sun Xiangxiang²

¹School of Information and Navigation, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China;

²No. 93980 Unit of People's Liberation Army, Urumqi, Xinjiang 830005, China

Abstract Based on the Kolmogorov and non-Kolmogorov turbulence models, the scattering effect of atmospheric turbulence on orbital angular momentum (OAM) is analyzed and the probabilities of different OAM modes are obtained at the detecting end. The key generation rates and the maximum propagation distances of OAM-encoded measurement-device-independent quantum key distributions (MDI-QKD) under two atmospheric turbulence conditions are analyzed. The simulation results show that, with the increase of the radial intensity during the light beams are propagating in the atmospheric signal channels, the scattering effect of the turbulence on OAM is gradually enhanced, and the initial OAM states are gradually diverted to the adjacent modes with a tendency of random distribution. The probabilities of initial OAM states at the detecting end decrease gradually. The maximum propagation distance for the OAM-encoded MDI-QKD is about 10 km longer than that for the polarization-encoded MDI-QKD under the atmospheric turbulence.

Key words quantum optics; quantum communication; measurement-device-independent quantum key distribution; atmospheric turbulence; orbital angular momentum

OCIS codes 270.5565; 270.5568

1 引 言

量子密钥分发(QKD)^[1-3]是量子信息科学中最接近实用化的应用之一,能使通信双方(通常称为 Alice 和 Bob)远距离共享一串安全密钥^[4-6]。但实际设备往往无法达到理论的安全假设,黑客能够利

用潜在的安全漏洞进行攻击,攻击方式包括光子数分离攻击^[7]、致盲攻击^[8]等。为了关闭这些漏洞,Lo 等^[9]提出了测量设备无关量子密钥分发(MDI-QKD)协议,将 Bell 态测量过程放在非可信的第三方进行,在移除探测器侧信道漏洞的同时增大了密钥分发距离。

收稿日期: 2018-05-14; 修回日期: 2018-07-12; 录用日期: 2018-08-02

基金项目: 国家自然科学基金(11704412)

* E-mail: zzdkgd@163.com

MDI-QKD 较好地平衡了实用性和安全性,近年来受到了研究者的广泛关注。在理论方面, Ma 等^[10-11]研究了基于弱相干光源(WCS)的 MDI-QKD 协议,得到了接近理想单光子源(SPS)的安全密钥率和最大传输距离。在实验方面,Zhao 等^[12]实现了 15 km 的诱骗态 MDI-QKD 方案;Tang 等^[13]实现了超过 200 km 的长距离相位编码 MDI-QKD 方案,并实现了三节点 MDI-QKD 组网;Yin 等^[14]实现了 404 km 的 MDI-QKD 方案。

然而,受光纤固有损耗的限制,实用的 QKD 系统仅能保证 100 km 级的最大安全距离,无法达到广域量子组网的要求。针对这一问题,最实际的方案是利用衰减远小于光纤的大气信道发展自由空间 QKD。Schmitt-Manderbach 等^[15-16]模拟了多种大气湍流和衰减情况,实现了百公里级的自由空间 QKD,证明了该方案的可行性;Liao 等^[17]利用“墨子号”低轨卫星在地影区实现了 1200 km 的星地 BB84 协议密钥分发。当信号光在大气信道中传输时,大气湍流随机变化引起的折射率起伏会使光束出现波前扭曲和振幅起伏,大气湍流成为自由空间 QKD 特别是星地 QKD 上行链路的主要损耗来源^[18-20]。因此研究大气湍流对单光子态的影响具有重要意义。

除了基于偏振编码的自由空间 QKD 方案,Wang 等^[21]提出了一种轨道角动量(OAM)编码的自由空间 MDI-QKD 方案。Goyal 等^[22]在模拟湍流条件下实现了 OAM 编码的 QKD 实验。采用 OAM 编码有两个好处:1)OAM 态在传输方向上具有旋转不变性,能够移除辅助校准系统;2)OAM 理论上具有无限维本征态,利用高维编码能大大提高 QKD 系统的编码效率。

本文基于 Kolmogorov、非 Kolmogorov 两种湍流模型,分析了大气湍流对 OAM 的散射效应,接收端探测到了不同 OAM 量子数的概率。在此基础上,分析了 OAM 编码 MDI-QKD 的密钥生成率和最大传输距离。仿真结果表明,随着湍流强度的增大,湍流对光束 OAM 模式的散射效应不断增强,接收端测得初始 OAM 态的概率减小,密钥生成率也减小。OAM 编码的 MDI-QKD 方案的最大传输距

离比偏振编码方案的长约 10 km。

2 基本原理

2.1 Kolmogorov、非 Kolmogorov 湍流对 OAM 的散射效应

光束经过大气信道传输时会受到大气湍流和大气吸收、散射的影响。光子 OAM 的空间分布性质决定了量子 OAM 易受大气湍流的影响。大气湍流的随机性会在传输光束中产生小角度的前向散射,对光束产生一定影响。前向散射对光子 OAM 的影响远大于对光子自旋的影响,故基于 OAM 的方案受大气湍流的影响不能被忽略。湍流介质随机变化造成的折射率起伏会引起光束的随机相位起伏,使位于有限维 OAM 的输入态散射到邻近 OAM 模式上。当 OAM 为 $l_0\hbar$ (l_0 为量子数, \hbar 为约化普朗克常数)的拉盖尔-高斯光束经过大气湍流时,接收端可能测量到 OAM 为 $l_1\hbar$ 的光子(量子数 l_1, l_0),从而在 QKD 系统中引入误码。

设发散前后 OAM 量子数差值 $\Delta l = l_1 - l_0$,则接收端测得邻阶 OAM 的概率^[23]为

$$P(l_0 + \Delta l) = \frac{1}{2\pi^2 R^2} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta_1 \times \int_0^{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2} \langle [\varphi(r, \theta_1) - \varphi(r, \theta_2)]^2 \rangle\right\} \times \exp[i\Delta l(\theta_1 - \theta_2)] d\theta_2, \quad (1)$$

式中 R 为接收孔径半径; r 和 θ 分别为径向系数和方位角系数,其下标代表不同的阶数; φ 为相位; $\langle [\varphi(r, \theta_1) - \varphi(r, \theta_2)]^2 \rangle$ 为相位结构函数。非 Kolmogorov 湍流的相位结构函数为

$$\langle [\varphi(r_1) - \varphi(r_2)]^2 \rangle_1 = c_1 \left| \frac{r_1 - r_2}{\rho_0} \right|^{\alpha-2}, \quad (2)$$

式中 α 为广义指数; c_1 为系数; ρ_0 为广义大气相干长度。

c_1 的表达式为

$$c_1 = 2 \left[\frac{8}{\alpha-2} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha-2}\right) \right]^{\frac{\alpha-2}{2}}, \quad (3)$$

式中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数。

ρ_0 的表达式为

$$\rho_0 = [A(\alpha)B(\alpha)/(C_n^2 k^2 L)]^{\frac{1}{\alpha-2}}, \quad (4)$$

式中 $A(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha-1) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{4\pi^2}$; $B(\alpha) = -2^{4-\alpha} \pi^2 \Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right) / \left\{ 2 \left[8/(\alpha-2) \Gamma\left(\frac{2}{\alpha-2}\right) \right]^{\frac{2}{\alpha-2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\}$; C_n^2 为大气折射率结构常数; k 为波数; L 为传输距离。

将(2)~(4)式代入(1)式中,当光束经过非 Kolmogorov 湍流大气后测得不同 OAM 量子数的概率为

$$P(l_0 + \Delta l) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \exp\left\{-2^{\alpha-2} \left[\frac{8}{\alpha-2} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha-2}\right)\right]^{\frac{\alpha-2}{2}} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha-2} \left|\sin \frac{\Delta\theta}{2}\right|^{\alpha-2}\right\} \cos(\Delta l \Delta\theta) d\Delta\theta, \quad (5)$$

式中 $\rho = r/R$; $\Delta\theta$ 为发散前后的方位角系数之差。该概率不依赖于初始光子的 OAM 量子数 l_0 , 而依赖于经过湍流介质前后的量子数差值 Δl 。当广义指数 $\alpha = 11/3$ 时,非 Kolmogorov 模型退化为 Kolmogorov 模型,其相位结构函数为

$$\langle [\varphi(r_1) - \varphi(r_2)]^2 \rangle_2 = 6.88 \left| \frac{r_1 - r_2}{r_0} \right|^{5/3}, \quad (6)$$

式中 $r_0 = 0.1853 \left(\frac{\lambda^2}{C_n^2 L} \right)^{3/5}$ 为大气相干长度(弗里德常数)。接收端测得不同 OAM 量子数的概率为

$$P(l_0 + \Delta l) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \exp\left[-6.88 \times 3^{\frac{2}{3}} \left(\frac{r}{r_0} \sin \frac{\Delta\theta}{2}\right)^{5/3}\right] \cos(\Delta l \Delta\theta) d\Delta\theta. \quad (7)$$

$\Theta(r, \Delta l)$ 表示径向分量为 r 的环面内不同方位角模式之间的散射系数^[24], 该系数同样依赖于差值 Δl , 即

$$\Theta(r, \Delta l) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_\varphi(r, \Delta\theta) \exp(-i\Delta l \Delta\theta) d\Delta\theta, \quad (8)$$

式中 $C_\varphi(r, \Delta\theta) = \exp\left[-\frac{1}{2} D_\varphi |2r \sin(\Delta\theta/2)|\right]$ 为旋转场的相干函数; $D_\varphi(\Delta x)$ 为相位结构函数。故在 Kolmogorov 湍流下, OAM 的散射系数为

$$\Theta(r, \Delta l) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[-6.88 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}} \left|\sin \frac{\Delta\theta}{2}\right|^{\frac{5}{3}}\right] \exp(-i\Delta l \Delta\theta) d\Delta\theta. \quad (9)$$

2.2 大气湍流下的 MDI-QKD 方案

OAM 编码的 MDI-QKD 方案原理图如图 1 所示。通信双方 Alice 和 Bob 各自产生光脉冲, 随机选择 OAM 基或叠加(SUP)基, 通过空间光调制器(SLM)将通信双方的光脉冲调制为相应的 OAM 模式。Alice 和 Bob 进一步将带有 OAM 模式的相位随机弱相干光衰减, 得到信号态和诱骗态, 经过大气信道发送至非可信第三方 Charlie/Eve。

Eve 使用分束器(BS)、模式分类器(MS)以及 4 个单光子探测器(L_0, L_1, R_0, R_1)对收到的光脉冲进行测量并公布测量结果, 当且仅当 4 个探测器的其中两个探测器同时响应时, 对应一次成功测量。在该测量结果的基础上, Alice 和 Bob 进行基比对, 保留成功测量事件中双方基相同的部分。其中, 双方的 SUP 基可能存在缓慢相对漂移, 仅用来测试信道的安全性; OAM 基无需外在对准的稳定基, 可用来提

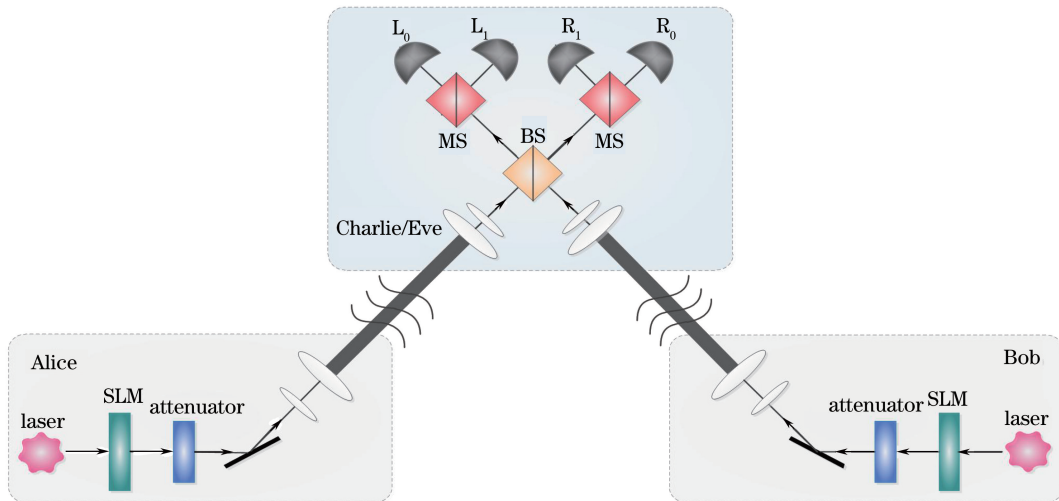


图 1 OAM 编码的 MDI-QKD 原理图

Fig. 1 Schematic of OAM-encoded MDI-QKD

取安全密钥。

设 η_0 ($\bar{\eta}_0$) 为正确 (错误) 传输率, 即接收端光束

的 OAM 态与发送端的一致 (不一致) 的概率, 其表达式分别为

$$\eta_0 = \frac{\exp(-\beta L)}{\pi} \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \exp\left\{-2^{\alpha-2} \left[\frac{8}{\alpha-2} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha-2}\right)\right]^{\frac{\alpha-2}{2}} \left(\frac{r}{\rho_0}\right)^{\alpha-2} \left|\sin \frac{\Delta\theta}{2}\right|^{\alpha-2}\right\} d\Delta\theta, \quad (10)$$

$$\bar{\eta}_0 = \frac{\exp(-\beta L)}{\pi} \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \exp\left\{-2^{\alpha-2} \left[\frac{8}{\alpha-2} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha-2}\right)\right]^{\frac{\alpha-2}{2}} \left(\frac{r}{\rho_0}\right)^{\alpha-2} \left|\sin \frac{\Delta\theta}{2}\right|^{\alpha-2}\right\} \cos(2l\Delta\theta) d\Delta\theta, \quad (11)$$

式中 β 为大气吸收和散射引起的链路衰减系数。总传输率为 $\eta = \eta_0 + \bar{\eta}_0$, 串扰概率为 $t = \bar{\eta}_0 / \eta$ 。

则安全密钥生成率^[10]的计算公式为

$$R' = \mu\nu \exp[-(\mu + \nu)] Y_{11}^{\text{OAM}} [1 - H(e_{11}^{\text{SUP}})] - Q_{\mu\nu}^{\text{OAM}} f H(E_{\mu\nu}^{\text{OAM}}), \quad (12)$$

式中 μ, ν 分别为 Alice、Bob 的信号态强度; Y_{11}^{OAM} 为 OAM 基下的单光子计数率; e_{11}^{SUP} 为 SUP 基下的单光子误码率; f 为纠错效率; $H_2(x)$ 为二元熵函数; $Q_{\mu\nu}^{\text{OAM}} (E_{\mu\nu}^{\text{OAM}})$ 为双方都发送 OAM 基时信号态的总接收率 (总误码率)。采用文献^[21]提出的方法估计

$Y_{11}^{\text{OAM}}, e_{11}^{\text{SUP}}, Q_{\mu\nu}^{\text{OAM}}$ 及 $E_{\mu\nu}^{\text{OAM}}$ 。

3 仿 真

主要仿真参数见表 1、2, 其中 λ 为波长, e_d 为基未对准概率, P_d 为探测器的暗计数率。

表 1 Charlie/Eve 的仿真参数^[11]

Table 1 Simulation parameters of Charlie/Eve^[11]

Parameter	$e_d / \%$	$P_d / 10^{-6}$	f
Value	1.5	3	1.16

表 2 Bob and Alice 的仿真参数^[21]

Table 2 Simulation parameters of Bob and Alice^[21]

Parameter	l	R / m	$\lambda / \mu\text{m}$	$\beta / (\text{dB} \cdot \text{km}^{-1})$	$C_n^2 / (10^{-15} \text{m}^{-2/3})$
Value	10	0.075	1.55	0.6	1

首先, 分析大气湍流对 OAM 模式的散射影响。取 $\Delta l = 0, 1, 2, 3$ 代入 (9) 式可得光束传输经过 Kolmogorov 湍流时初始 OAM 发散到相邻各阶 OAM 的散射系数。

弗里德常数 r_0 与光波波前畸变的空相干长度相对应。如图 2 所示, 当径向强度 r 远小于 r_0 时, 由大气湍流引起的光前相位畸变较小, 故 OAM 的散射系数也较小。随着 r 的增大, OAM 发散到相邻模式的散射效应迅速增大。这是因为当光束的横截面积增大时, 湍流对光束的作用范围增大,

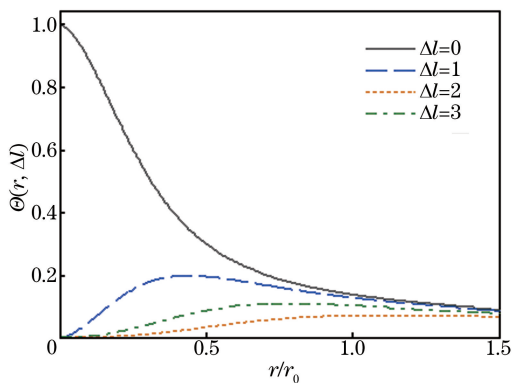


图 2 散射系数 $\Theta(r, \Delta l)$ 随 r/r_0 的变化

Fig. 2 Scattering coefficient $\Theta(r, \Delta l)$ versus r/r_0

OAM 受大气湍流的影响也相应增大。

将 $\Delta l = 0, 1, 2, 3$ 代入 (7) 式, 得到拉盖尔光束经过 Kolmogorov 湍流后光子 OAM 的概率分布图, 如图 3 所示。可以看出, 对于不同阶次的拉盖尔光束, 大气湍流引起的光束相位失常与光束的径向强度有关。随着光束在湍流介质中的传输, 初始光子 OAM 态被散射到邻近的 OAM 态上, 接收端测量得到初始 OAM 态的概率不断减小。探测到临近光子 OAM 态的概率先增大后减小, 这是由于光束在弱湍流中传输时, 闪烁强度随传输距离的增大而

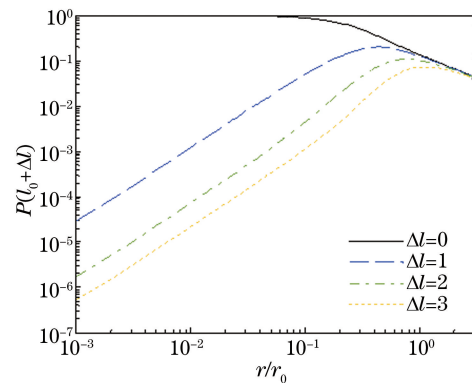


图 3 概率 $P(l_0 + \Delta l)$ 随 r/r_0 的变化

Fig. 3 Probability $P(l_0 + \Delta l)$ versus r/r_0

不断增大,最终所有的光子 OAM 趋于无规则分布。

对于非 Kolmogorov 湍流,将 $\Delta l = 0$ 代入 (5) 式,得到不同谱指数下接收端测得初始 OAM 模式的概率 $P(l_0)$ 随 r/ρ_0 的变化关系,如图 4 所示。

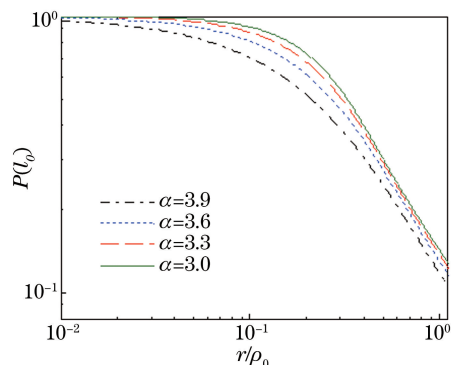


图 4 $P(l_0)$ 随 r/ρ_0 的变化

Fig. 4 Probability $P(l_0)$ versus r/ρ_0

由图 4 可知,在弱湍流且谱指数确定的条件下,随着 r/ρ_0 比值的增大,接收端测得初始 OAM 模式的概率不断减小。这是由于当谱指数确定时, r/ρ_0 比值越大,对应大气折射率结构常数 C_n^2 越大,即湍流强度越强,初始 OAM 受湍流的散射影响也就越大。对于每一确定的 r/ρ_0 ,谱指数越大,测得初始 OAM 模式的概率越大,即 OAM 受湍流的散射影响越小。

图 5 所示为两种编码方式下安全密钥生成率随传输距离的变化关系。相同参数下,OAM 编码方案的最大传输距离为 119 km,比偏振编码的长约 10 km。这是由于基于 OAM 编码的 MDI-QKD 方案采用具有旋转不变性的 OAM 基,与偏振编码协议相比减小了基未对准引起的单光子误码率,从而具有更长的密钥分发距离。

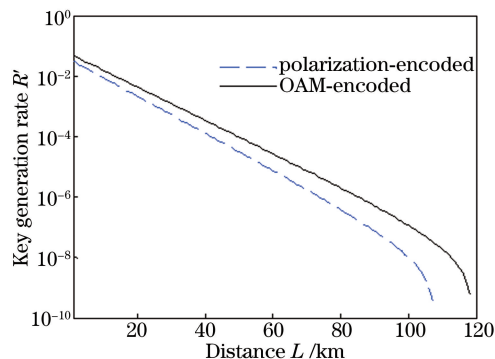


图 5 密钥生成率随传输距离的变化

Fig. 5 Key generation rate versus transmission distance

4 结 论

基于 Kolmogorov 及非 Kolmogorov 湍流模型,分析了这两种湍流条件下 OAM 编码 MDI-QKD 方

案的密钥生成率与最大传输距离。随着光束的径向强度的增大,湍流对光束 OAM 的散射效应增强,接收端探测到初始 OAM 的概率减小。与偏振编码的 MDI-QKD 方案相比,OAM 编码的方案采用具有旋转不变性的 OAM 基提取安全密钥,减小了基未对准引起的单光子误码率,增大了最大传输距离。

参 考 文 献

- [1] Lo H K, Lütkenhaus N. Quantum cryptography: From theory to practice[EB/OL]. (2007-03-13) [2017-06-03]. <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0702202>.
- [2] He Y F, Song C, Li D Q, *et al.* Asymmetric-channel quantum key distribution based on heralded single-photon sources[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(3): 0327001.
何业锋, 宋畅, 李东琪, 等. 基于指示单光子源的非对称信道量子密钥分配[J]. 光学学报, 2018, 38(3): 0327001.
- [3] Liu Y M, Wang C, Huang D, *et al.* Study of synchronous technology in high-speed continuous variable quantum key distribution system[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(1): 0106006.
刘友明, 汪超, 黄端, 等. 高速连续变量量子密钥分发系统同步技术研究[J]. 光学学报, 2015, 35(1): 0106006.
- [4] Gottesman D, Lo H K, Lütkenhaus N, *et al.* Security of quantum key distribution with imperfect devices[C]. International Symposium on Information Theory, 2004, 4(5): 136.
- [5] Sheng Y B, Zhou L, Cheng W W, *et al.* Complete Bell-state analysis for a single-photon hybrid entangled state[J]. Chinese Physics B, 2013, 22(3): 030314.
- [6] Sun Y, Zhao S H, Dong C. Passive measurement device independent quantum key distribution based on parametric down conversion source[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(12): 1227001.
孙颖, 赵尚弘, 东晨. 基于参量下转换光源的被动测量设备无关量子密钥分配[J]. 光学学报, 2015, 35(12): 1227001.
- [7] Brassard G, Lütkenhaus N, Mor T, *et al.* Limitations on practical quantum cryptography[J]. Physical Review Letters, 2000, 85(6): 1330-1333.
- [8] Yuan Z L, Dynes J F, Shields A J. Avoiding the blinding attack in QKD[J]. Nature Photonics, 2010, 4(12): 800-801.
- [9] Lo H K, Curty M, Qi B. Measurement-device-independent quantum key distribution[J]. Physical Review Letters, 2012, 108(13): 130503.

- [10] Ma X F, Fung C H F, Razavi M. Statistical fluctuation analysis for measurement-device-independent quantum key distribution[J]. *Physical Review A*, 2012, 86(5): 052305.
- [11] Sun S H, Gao M, Li C Y, *et al.* Practical decoy-state measurement-device-independent quantum key distribution[J]. *Physical Review A*, 2013, 87(5): 052329.
- [12] Zhao Y, Qi B, Ma X F, *et al.* Experimental quantum key distribution with decoy states[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(7): 070502.
- [13] Tang Y L, Yin H L, Chen S J, *et al.* Measurement-device-independent quantum key distribution over 200 km[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(19): 190501.
- [14] Yin H L, Chen T Y, Yu Z W, *et al.* Measurement-device-independent quantum key distribution over a 404 km optical fiber[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(19): 190501.
- [15] Schmitt-Manderbach T, Weier H N, Fürst M, *et al.* Experimental demonstration of free-space decoy-state quantum key distribution over 144 km[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 98(1): 010504.
- [16] Yin J, Ren J G, Lu H, *et al.* Quantum teleportation and entanglement distribution over 100-kilometre free-space channels[J]. *Nature*, 2012, 488(7410): 185-188.
- [17] Liao S K, Cai W Q, Liu W Y, *et al.* Satellite-to-ground quantum key distribution[J]. *Nature*, 2017, 549(7670): 43-47.
- [18] Bedington R, Arrazola J M, Ling A. Progress in satellite quantum key distribution[J]. *npj Quantum Information*, 2017, 3: 30.
- [19] Capraro I, Tomaello A, Dall'Arche A, *et al.* Impact of turbulence in long range quantum and classical communications[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(20): 200502.
- [20] Vallone G, Marangon D G, Canale M, *et al.* Adaptive real time selection for quantum key distribution in lossy and turbulent free-space channels[J]. *Physical Review A*, 2015, 91(4): 042320.
- [21] Wang L, Zhao S M, Gong L Y, *et al.* Free-space measurement-device-independent quantum-key-distribution protocol using decoy states with orbital angular momentum[J]. *Chinese Physics B*, 2015, 24(12): 120307.
- [22] Goyal S, Ibrahim A H, Roux F S, *et al.* Experimental orbital angular momentum based quantum key distribution through turbulence[EB/OL]. (2014-12-02) [2017-06-03]. <https://arxiv.org/abs/1412.0788>.
- [23] Tyler G A, Boyd R W. Influence of atmospheric turbulence on the propagation of quantum states of light carrying orbital angular momentum[J]. *Optics Letters*, 2009, 34(2): 142-144.
- [24] Paterson C. Atmospheric turbulence and orbital angular momentum of single photons for optical communication[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(15): 153901.