

# 波导布拉格光栅时延响应谱的通解

曾祥楷<sup>1\*</sup>, 孙燕斌<sup>2\*\*</sup>

<sup>1</sup>重庆理工大学电气与电子工程学院, 重庆 400054;

<sup>2</sup>重庆工程学院电子信息学院, 重庆 400056

**摘要** 采用波导布拉格光栅(WBG)微扰的傅里叶变换和流守恒定律求解耦合模方程,得到 WBG 相位响应的解析解。通过对该相位响应的解析解进行微分,建立了 WBG 时延谱的半解析型通解。基于该时延谱通解,仿真分析了均匀和线性啁啾 WBG 的时延谱,并与用其他方法得到的时延谱及其实测谱进行对比分析,以验证时延谱通解的分析精度和效率。对比结果表明,基于该时延谱通解的分析结果在整个反射带内与用其他方法得到的时延谱计算值及实测值一致。该时延谱通解可用于快速、精确分析任意复杂 WBG 的时延谱,对有解析型和离散型傅里叶变换的 WBG 分别具有  $O(N)$ ,  $O(N \ln N)$  的线性复杂度( $N$  是计算点数)。该方法可为分析、设计和应用 WBG 的相位和时延特性提供通用的基础理论和解析化方法。

**关键词** 光栅; 波导布拉格光栅; 时延; 相位; 响应谱; 半解析通解

中图分类号 O438.2

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201838.1205001

## General Solution to Delay-Response Spectra of Waveguide Bragg Gratings

Zeng Xiangkai<sup>1\*</sup>, Sun Yanbin<sup>2\*\*</sup>

<sup>1</sup> School of Electrical and Electronic Engineering, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China;

<sup>2</sup> School of Electronic Information, Chongqing Institute of Engineering, Chongqing 400056, China

**Abstract** The study gets a closed form of the phase-response of a waveguide Bragg grating (WBG) by solving its coupled-mode equation with the Fourier transform (FT) of its index perturbation and the law of flux conservation, and then establishes the semi-analytic general solution of its delay spectrum by differentiating the phase response. Based on this delay general solution, the delay spectra of uniform and linearly-chirped WBGs are simulated, which are compared with those delay spectra obtained by other methods and the measured spectra in order to verify the analysis precision and efficiency of delay general solution. The comparison results show that the delay spectra calculated with this general solution agree well with those measured or calculated by other methods in the whole reflection band. Moreover, this general solution can be employed for the fast and exact analysis of arbitrarily complicated delay spectra of WBGs. The WBGs with analytic FT and discrete FT possess the linear complexities of  $O(N)$ , and  $O(N \ln N)$  ( $N$  is the number of calculation points), respectively. This method may provide a universal basic theory and an analytic method for the analysis, design, and application of the delay properties and phases of WBGs.

**Key words** gratings; waveguide Bragg gratings; delay; phase; response spectrum; semi-analytic general solution

**OCIS codes** 050.2770; 070.7345; 070.4790

## 1 引 言

波导光栅在波分复用<sup>[1]</sup>、信号处理<sup>[2-3]</sup>、激光<sup>[4-5]</sup>、传感<sup>[6-7]</sup>、光波的滤波及耦合<sup>[8-9]</sup>等方面得到了广泛研究及应用,这些研究和应用主要基于波导

光栅的功率谱。对于波导光栅的相位谱而言,其具有较复杂的非线性,且对结构变化极其敏感,同时相位谱的获取也相对较难,这些因素束缚了相位谱的研究和应用。时延谱与相位谱、色散谱是密切相关的,可相互表征和转换,存在相近的信息等效性。因

收稿日期: 2018-06-12; 修回日期: 2018-07-16; 录用日期: 2018-07-31

基金项目: 国家自然科学基金(61575035)、重庆市教委科学技术研究项目(KJ1500924)

\* E-mail: zxkai@cqut.edu.cn; \*\* E-mail: icandobetter@sina.com

此,时延谱携带了丰富的相位、时延及色散信息。基于时延应用的波导光栅通常是非均匀的波导布拉格光栅(WBG)。随着非均匀光栅制作<sup>[10]</sup>及其应用技术的发展,更多情况下人们需要分析 WBG 的时延或色散特性,如在超快激光及射频光子滤波<sup>[11-13]</sup>、慢光效应及高灵敏传感<sup>[14-16]</sup>、波分复用及色散补偿<sup>[17-19]</sup>等应用领域,人们需分析 WBG 的时延或相位谱、色散量。目前,分析 WBG 时延谱的方法主要有耦合模理论、传输矩阵法、Riccati 方程数值解法和分层法等<sup>[8,20-23]</sup>。耦合模理论主要用于分析均匀波导光栅,难以直接分析非均匀光栅的时延特性。传输矩阵法是基于耦合模理论的数值分析法<sup>[21]</sup>,通过分段均匀化来建立非均匀光栅的传输矩阵,其分析效率和精度都较低。Riccati 方程数值解法通过数值求解基于折射率微扰的 Riccati 微分方程而得到时延谱。分层法的分层数和计算量远大于传输矩阵法,计算效率最低。上述方法可分析比较规范的非均匀光栅,但没有封闭形式的时延谱通解,不能准确分析非规范的、难以用函数表征的、有随机性折变分布的波导光栅。时延谱的通解或解析解具有通用、直观和准确的特点。然而,WBG 结构的多样性和复杂性以及求解非常系数耦合方程的困难度导致近半个世纪来一直没有时延谱的通解。为此,本文利用傅里叶模式耦合(FMC)理论<sup>[24]</sup>求解波导光栅的相位谱,进而求解出简单、精确、通用、适合各种 WBG 的时延谱半解析通解。通过仿真和实测的相位及时延谱,验证了该时延谱模型的正确性和复杂度,为分析、设计和应用各种 WBG 建立了精确统一的基础理论。

## 2 通 解

### 2.1 相位谱通解

设 WBG 是在波导横截面上均匀的、在光传播方向上周期或准周期变化的折射率微扰分布。它可将波导内的传导模式反向耦合到同一波导内,其模式耦合情况如图 1 所示。

当 WBG 无过耦合时,在仅考虑原传输模和耦合模两个模式的耦合的情况下,根据 FMC 理论,传输模和耦合模本征电场的振幅系数  $A_m$  和  $B_s$  同时满足反向耦合方程和流守恒定律<sup>[24-25]</sup>,即

$$\int_{B_s(0)}^0 \frac{dB_s(z)}{A_m(z)} = jk \int_0^L \delta_n(z) \exp(-j2\pi\nu z) dz, \quad (1)$$

$$[A_m(z)]^2 = [B_s(z)]^2 + [A_m(L)]^2, \quad (2)$$

式中: $z$  为光波的传输方向; $L$  为光栅长度;下标  $m$

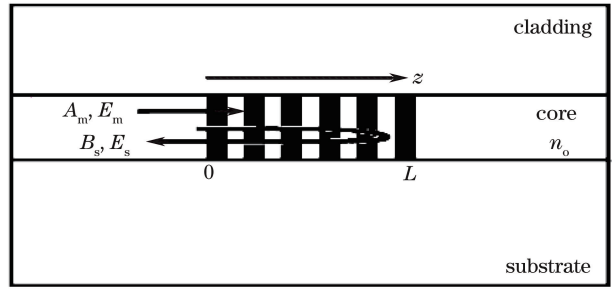


图 1 波导布拉格光栅中的模式耦合示意图

Fig. 1 Schematic of mode coupling in WBG

和  $s$  分别为原传输模和耦合模; $\delta_n(z)$  为折射率微扰分布; $\nu = (n_m + n_s)/\lambda$  为与波长有关的类频率量, $\lambda$  为波长; $n_m$  和  $n_s$  分别为传输模和耦合模的有效折射率; $k = 0.5\omega\epsilon_0 n_0 \iint_D E_m E_s^* dD$  为耦合常数, $E_m$  和  $E_s$  分别为传输模和耦合模在横截面  $D$  (面积) 上的归一化本征电场分布, $*$  为取共轭, $n_0$  为波导折射率, $\omega$  为光波角频率, $\epsilon_0$  为真空介电常数。实际上,在(1)式右侧的积分是在波导光栅内对  $\delta_n(z)$  的傅里叶变换。设该傅里叶变换的实部和虚部分别为  $\gamma$  和  $\eta$ ,则有

$$\int_0^L \delta_n(z) \exp(-j2\pi\nu z) dz = \gamma(\nu) + j\eta(\nu). \quad (3)$$

WBG 的相位响应是其耦合光相对于入射光的相位变化量。光波的耦合条件是相位匹配,当折射率微扰谐波峰值点的各反射光之间的相位差是  $2\pi$  的整数倍时,各反射光相干叠加。相干叠加后的幅值受谐波分量幅值的调制,与折射率微扰谐波分量的初相位无关。但该谐波分量的初相位决定了耦合光的初始反射点,对 WBG 的相位响应有影响。根据反向耦合的边界条件  $B_s(L) = 0$ ,求解(1)~(3)式的耦合方程可得

$$\frac{A_m(0)}{A_m(L)} = \cosh(k\eta) \cos(k\gamma) - j \cdot \sinh(k\eta) \sin(k\gamma), \quad (4)$$

进而可求得在  $z=0$  处耦合模与传输模的振幅系数比  $B_s(0)/A_m(0)$ 。该振幅系数比包含了 WBG 的相位响应。WBG 中的反向耦合光总是滞后于入射光,其相位响应只能取负值且在  $[-2\pi, 0]$  内变化。如果用振幅系数比的虚部和实部之比的反正切函数来计算相位,其相位值的范围为  $[-\pi/2, \pi/2]$ 。这将使相位谱的计算值与实际值的值域不匹配,需要根据实部和虚部的符号把相位平移到  $[-2\pi, 0]$  内,同时需要保证实部在 0 附近时的连续性。因此,由 WBG 的振幅系数比可得其相位响应  $\varphi(\nu)$  为

$$\phi(v) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \arctan\left\{\frac{\sin[2k\gamma(v)]}{\sinh[2k\eta(v)]}\right\}, & \gamma\eta \leq 0 \text{ or } \eta \leq 0 \\ -\frac{3\pi}{2} + \arctan\left\{\frac{\sin[2k\gamma(v)]}{\sinh[2k\eta(v)]}\right\}, & \gamma\eta > 0 \text{ or } \eta > 0 \end{cases} \quad (5)$$

类频率  $v$  是波长  $\lambda$  的函数,所以相位  $\phi(v)$  既是类频率的函数,也是波长的函数。对于均匀、相移、超结构、摩尔、高斯和余弦类变迹等 WBG 而言,它们的折射率微扰具有解析型的傅里叶变换结果,这类 WBG 可称为 A 类光栅(A-WBG)。而对于啁啾光栅、难以用数学函数表征微扰的光栅、有随机性相变或折变量的光栅、任意复杂折射率微扰的光栅等,它们的折射率微扰没有解析型的傅里叶变换结果,但都有离散傅里叶变换(DFT)的数值结果,这类 WBG 可称为 B 类光栅(B-WBG)。A 类 WBG 的  $\gamma$  和  $\eta$  是解析型结果,对应的  $\phi(v)$  是解析型相位谱,采用  $\gamma\eta$  符号的判定条件。B 类 WBG 的  $\gamma$  和  $\eta$  是 DFT 的数值结果,其  $\phi(v)$  是半解析型相位谱,采用  $\eta$  符号的判定条件。

### 2.2 时延谱的通解

WBG 的时延  $\tau$  是其反向耦合光相对于输入光的时间延迟,也是相位谱  $\phi$  对角频率  $\omega$  的导数,即  $\tau = d\phi/d\omega$ 。对于 A 类光栅,可由相位随波长变化的相位解析解  $\phi(\lambda)$ ,用相位谱对波长的导数计算出时延谱。根据角频率与波长的关系  $\omega = 2\pi c/\lambda$  (其中  $c$  是真空中光速),时延谱  $\tau = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \cdot \frac{d\phi}{d\lambda}$ 。在  $\pm\pi/2$  及其附近相位的正切函数是不连续的且趋于无穷大,则在  $\eta=0$  处计算的相位是不连续和奇异的,相位的导数也不存在。在计算机中很容易通过差分来计算微分值。为此采用微分值来近似计算相位的导数,即用相位的微分值  $\Delta\phi(\lambda)$  和波长间隔  $\Delta\lambda$  直接计算时延谱  $\tau = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta\lambda}$ 。对于 B 类光栅,只能通过 DFT 得到其半解析型的相位谱。DFT 的自变量是类频率  $v$ ,与角频率的关系为  $\omega = 2\pi v c/(n_m + n_s)$ 。根据(5)式可直接计算类频率  $v$  处的相位值,采用相位对类频率的微分能更好地计算时延谱。另外,在用计算机实现 DFT 时,折射率微扰将被平移到 DFT 的中心位置。设该位置平移量为  $L_0$ ,对应会产生相位移动量  $\pi v L_0$ ,则根据 DFT 结果计算得到的相位量  $\phi_d(v) = \phi(v) + \pi v L_0$ ,用相位微分值  $\Delta\phi_d$  和 DFT 中类频率间隔值  $\Delta v$  可计算得到的时延谱  $\tau(v) = (\Delta\phi_d/\Delta v)(n_m + n_s)/(2\pi c)$ 。因此,WBG 时延谱  $\tau$  的半解析型通解为

$$\tau = \begin{cases} -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \times \frac{\Delta\phi(\lambda)}{\Delta\lambda}, & \text{A-WBG} \\ \frac{(n_m + n_s)L_0}{2\pi c} [\pi + 2\Delta\phi(v)], & \text{B-WBG} \end{cases} \quad (6)$$

类频率  $v$  是波长的函数,所以由(6)式计算的时延响应都是波长的函数。用(5)式计算出随波长  $\lambda$  或类频率  $v$  变化的相位谱,并计算出相邻波长或类频率间的相位微分值  $\Delta\phi$  后,可按(6)式直接计算出 WBG 的时延谱。光波传输时的相位变化是可以连续的,但用反正切函数计算相位时,通解在  $\pm\pi/2$  值域附近存在不连续的奇异点,即在  $\eta=0$  的邻域内相位值会存在伪突变,故需要去除该伪突变量。事实上,目前所有的相位分析方法如耦合模理论、传输矩阵法和 Riccati 方程数值算法等,都存在该相位伪突变的问题。

傅里叶变换(3)式没有限定折射率微扰的分布形式,故所得的通解适合于所有类型的 WBG 或任意的折射率微扰分布。无论是 A-WBG 还是 B-WBG,其折射率微扰的解析型或离散型傅里叶变换总是存在的,可直接代入(5)式得到其相位谱,进而可按(6)式计算得到其时延谱。这说明该时延谱的解适合所有类型的任意 WBG,是 WBG 时延谱的通解。同时,在得到解析或数值化的傅里叶变换结果后,基于该结果的相位谱解和时延谱解,即(5)和(6)式,都是封闭形式的解析型表达式。因此,所得的时延谱解,即(6)式,是适用于各种任意 WBG 的、半解析型的时延谱通解。

### 3 通解验证

验证时延谱通解的过程是:首先,按(3)式计算 WBG 折射率微扰的傅里叶变换;其次,根据傅里叶变换结果按(5)式计算相位谱及其相位微分值  $\Delta\phi$ ;最后,按(6)式用相位微分值  $\Delta\phi$  计算 WBG 的时延谱。A 类 WBG 的折射率微扰存在解析型傅里叶变换,其相位谱是全解析的且可直接计算出不同波长处的相位,此时采用  $\gamma$  和  $\eta$  为解析值时的时延谱公式。B 类 WBG 只有数值化的 DFT 结果,其相位谱是半解析的且可直接计算出不同类频率的相位,此时采用  $\gamma$  和  $\eta$  为 DFT 值时的时延谱公式。下面以

均匀光纤光栅和线性啁啾光纤光栅为例,分别验证 A 类和 B 类 WBG 时延谱的分析方法的正确性。

### 3.1 A 类 WBG 的时延谱

以单模光纤中的均匀光纤 Bragg 光栅(FBG)为例,说明基于解析傅里叶变换的时延谱分析方法的正确性。均匀 FBG 的折射率  $n(z)$  及其微扰  $\delta_n(z)$  可分别表示为  $n(z) = n_0 + \delta_n(z)$  和  $\delta_n(z) = \delta[1 - \cos(2\pi z/\Lambda)]$ , 式中:  $\delta$  为折射率微扰的幅值;  $\Lambda$  为光栅周期。在单模光纤中,传输模和耦合模都是纤芯的基模,则  $n_m = n_s$  和  $v = 2n_m/\lambda$ 。根据(3)式对均

匀 FBG 的  $\delta_n(z)$  进行傅里叶变换,可得其解析型的实部  $\gamma$  和虚部  $\eta$  为

$$\begin{cases} \gamma = -\frac{\delta L}{2} \text{sinc } \sigma \cos \sigma \\ \eta = \frac{\delta L}{2} \text{sinc } \sigma \sin \sigma \end{cases}, \quad (7)$$

式中:  $\sigma = \pi L(2n_m/\lambda - 1/\Lambda)$  为失谐量;  $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$ , 又称辛格函数。将(7)式代入(5)式可得到均匀 FBG 的相位谱为

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \arctan \left[ \frac{\sin(kL\delta \text{sinc } \sigma \cos \sigma)}{\sinh(kL\delta \text{sinc } \sigma \sin \sigma)} \right], & \sigma \geq 0 \\ -\frac{3\pi}{2} - \arctan \left[ \frac{\sin(kL\delta \text{sinc } \sigma \cos \sigma)}{\sinh(kL\delta \text{sinc } \sigma \sin \sigma)} \right], & \sigma < 0 \end{cases}. \quad (8)$$

根据 FBG 的长度  $L$ 、微扰幅值  $\delta$ 、周期  $\Lambda$ 、有效折射率  $n_m$  等,可直接按(8)式计算各波长处的相位,用该相位谱即可计算出相位微分值,再根据(6)式可计算出时延谱。设单模光纤 FBG 的结构参数为:  $L = 4 \text{ mm}$ 、 $\Lambda = 0.534 \text{ } \mu\text{m}$ 、 $n_m = 1.45131$ 、 $\delta = 0.0001$ 。在  $\lambda = 1550 \text{ nm}$  附近计算的基模耦合常数  $k = 2530.62\pi \text{ N/s}$ , 波长计算范围为  $1548 \sim 1552 \text{ nm}$ , 波长分辨率为  $1 \text{ pm}$ , 用相位解析解(8)式计算所得的相位谱如图 2(a)所示,用传统耦合模理论计算所得的相位谱如图 2(b)所示。由图 2 可知,用相位解析解和传统耦合模理论计算的相位谱结果是一致的,可推断采用相位谱通解分析均匀 WBG 的相位是准确的。在方正 S360R、Vista 操作系统和

Matlab7.1环境下,基于(8)式计算相位谱约需要  $0.5 \text{ s}$ ,具有线性复杂度和最小计算量,与用耦合模理论计算相位的时间相近。

下面计算并比较均匀 FBG 的时延谱。时延谱是用相位谱的微分值计算的,所以比较结果可同时验证相位谱和时延谱通解的正确性。FBG 耦合带以外的光波只有极小或没有反射,用反正切函数计算相位将产生耦合带外时延谱的奇异点,而人们关注的只是耦合带以内的谱特性,故只需比较反射带以内的时延谱。设在单模光纤中均匀 FBG 的结构参数为:  $L = 10 \text{ mm}$ 、 $\Lambda = 0.525 \text{ } \mu\text{m}$ 、 $n_m = 1.4823$ 、 $\delta = 4 \times 10^{-5}$ 。在波长  $1556 \text{ nm}$  附近计算的耦合常数为  $k = 2520.54\pi \text{ N/s}$ , 波长计算范围为  $1554 \sim 1558 \text{ nm}$ , 波长间隔为  $2 \text{ pm}$ , 计算所得的反射率如图 3(a)所示,耦合中心波长约为  $1556.4 \text{ nm}$ ;用相位解析解(8)式和时延通解(6)式计算所得的相位谱和时延谱分别如图 3(b)和(c)所示。与图 3(a)有相近幅值谱、长度为  $10 \text{ mm}$  的均匀 FBG 的时延谱测量结果如图 4 所示。在 FBG 所在位置与测量点之间的一段光纤导致了约  $2 \text{ ns}$  的时延,所以 FBG 的时延谱是时延测量值相对于  $-2 \text{ ns}$  的部分。比较图 3(c)和图 4 可知,相对于时延  $-2 \text{ ns}$  而言,在  $1556.33 \sim 1556.5 \text{ nm}$  反射带内的时延测量值接近于 0 且是慢变的,而时延的计算值也基本上接近于 0 且是慢变的。因此,反射带内时延谱的计算值与其实际测量结果是一致的。

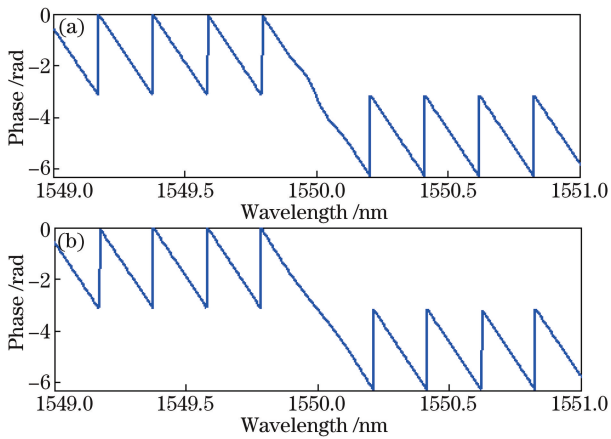


图 2 计算所得的均匀 FBG 相位谱。(a) 解析解; (b) 耦合模理论

Fig. 2 Calculated phase spectra of uniform FBG. (a) Analytic solution; (b) coupled-mode theory

### 3.2 B 类 WBG 的时延谱

B 类 WBG 有半解析型的时延谱解,其时延谱



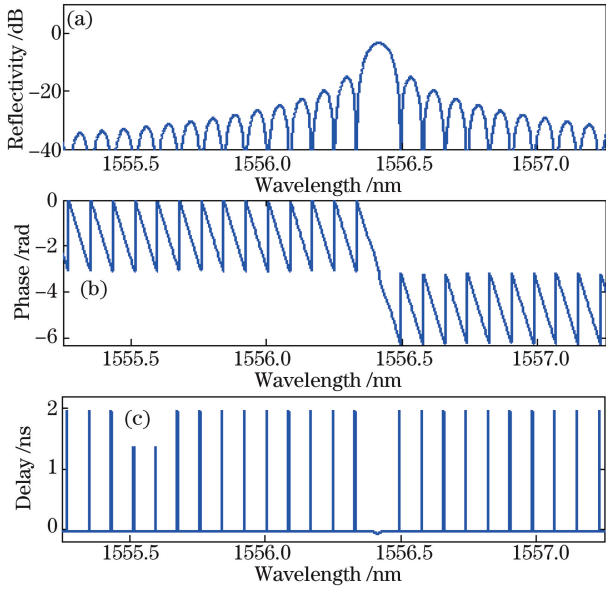


图 3 用解析解计算均匀 FBG 的谱特性。(a) 反射率; (b) 相位谱; (c) 时延谱

Fig. 3 Calculated spectral properties of uniform FBG with analytic solutions. (a) Reflectivity; (b) phase spectrum; (c) delay spectrum

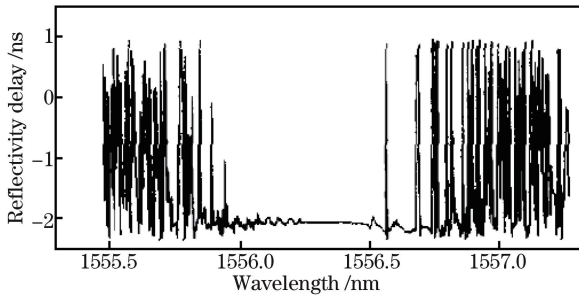


图 4 均匀 FBG 相对时延谱的测量值

Fig. 4 Measured relative delay spectrum of uniform FBG

的验证过程与 A 类 WBG 的过程相似,不同点在于: 1)用 DFT 计算  $\delta_n(z)$  的傅里叶变换; 2)以类频率  $\nu$  为变量计算相位谱及时延谱  $\tau(\nu)$ ,再将  $\tau(\nu)$  转换为基于波长的时延谱  $\tau(\lambda)$ 。线性啁啾 FBG (CFBG) 具有微扰周期随位置线性变化的特点,其时延随波长线性变化,CFBG 的时延谱特性最有代表性,在光纤色散补偿中应用较多。下面以 CFBG 为例,验证 B 类光栅时延谱的分析方法的正确性。CFBG 的折射率微扰可表示为  $\delta_n(z) = \delta \{1 - \cos[2\pi z/\Lambda(1 - Fz/L)]\}$ , 式中  $F$  为光栅周期的啁啾量。设在单模光纤的  $n_m = 1.4774$ , CFBG 的参数为: 折射率微扰量  $5 \times 10^{-5}$ 、初始周期  $\Lambda = 0.5267 \mu\text{m}$ 、啁啾量  $2.45 \times 10^{-4}$ 、长度 108 mm。在波长 1556 nm 附近计算的耦合常数为  $2520.86\pi \text{ N/s}$ , 离散傅里叶变换的计算点数为  $2^{22}$ ,

离散化  $\delta_n(z)$  的采样间隔是初始周期的  $1/9$ , 波长分辨率为  $3.34 \text{ pm}$ , 计算复杂度为  $O(N \ln N)$  ( $N$  为计算点数)。该 CFBG 的反射率和利用 (6) 式计算所得的时延谱分别如图 5(a) 和 (b) 所示, 在反射带内的时延差为  $1.065 \text{ ns}$ , 与其理论时延差  $1.0637 \text{ ns}$  基本一致。在方正 S360R、Vista 操作系统和 Matlab7.1 环境下, 时延谱的平均计算时间约为  $4.17 \text{ s}$ , 小于传输矩阵法和 Riccati 方程数值法的时间 (约  $12 \text{ s}$ )。长度为  $108 \text{ mm}$ 、具有相近反射率分布的 CFBG 的时延谱的测量结果如图 5(c) 所示, 反射带内的时延差约为  $1.06 \text{ ns}$ 。图 4 和图 5(c) 所示的时延谱都是用射频调制方法测量得到的<sup>[20]</sup>。从图 5(b) 和 (c) 的时延谱可知, 用半解析通解计算所得的时延谱与实测的时延谱在时延差、带宽、有效区域、时延随波长的变化率及趋势等方面都是精确一致的。这证明了用时延谱的半解析通解分析 B 类光栅的结果也是正确的。

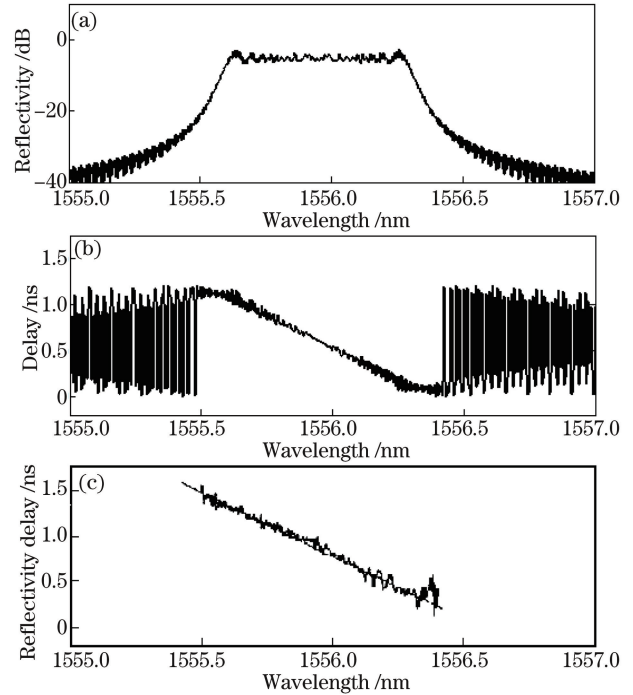


图 5 CFBG 的谱特性。(a) 反射率; (b) 计算时延谱; (c) 测量时延谱

Fig. 5 Spectral properties of CFBG. (a) Reflectivity; (b) calculated delay spectrum; (c) measured delay spectrum

## 4 分析讨论

现有的相位或时延计算方法都采用了反正切函数, 本文的时延谱通解也采用了反正切函数。这将使计算的相位在  $\pm \pi/2$  附近产生不连续的突变, 导致时延谱计算值存在奇异点。分析相位谱及时延谱的通解和仿真数据可知, 产生该现象的原因是: 当折

射率微扰经傅里叶变换后的虚部  $\eta$  从  $+0$  变到  $-0$  或从  $-0$  变到  $+0$  时,计算所得的相位值将从  $\pi/2$  变为  $-\pi/2$  或从  $-\pi/2$  变为  $\pi/2$ ,产生了  $\pi$  相位突变量,故由相位微分计算的时延谱将出现脉冲式突变的奇异值。该相位突变量和时延奇异值是由反正切函数引起的虚假量值,需要被消除以保证时延谱的计算值与实测值是一致的。在图 3(c)和图 4 所示的均匀光纤光栅时延谱中,其计算值与实测值在反射带以内是一致的,但在  $1556\sim 1556.32$  nm 的反射带以外存在一些差异。产生该差异的原因有:1) 基于时延谱通解的时延值在反射带内外都是可计算的,在反射带以外的傅里叶变换虚部  $\eta$  为 0 或为在 0 附近波动的极小值。在 0 附近存在大量的正负符号变化,从而产生大量的相位突变和时延奇异值。2) 在测量时延的射频调制法中,可调谐单色光经射频信号调制和 WBG 反射后,再与射频信号比相从而测得时延量。比相也会产生相位突变和时延奇异值,而且 WBG 在反射带以外将无反射或仅有极其微弱的反射,产生近似于噪声的极弱信号而非有效的比相信号。3) 反射带以外的光波经比相所得的时延值将存在很大的比相(测量)误差和伪奇异值,该测量误差和伪奇异值可使不同波长段的光波的时延有差异或有不同的奇异值,时延谱的计算值和实测值也有不同的误差源及奇异源。上述因素共同导致了反射带外的时延谱计算值与测量值之间的差异。这也表明,在反射带以外的 WBG 时延谱具有较低的实用价值。另外,计算和测量的相位谱对计算误差及测量噪声是极其敏感的,很小的波长间隔在微分相位时也会放大误差和噪声。因此,在实际分析计算时,需要选择合适的波长分辨率并减小误差及噪声。

根据折射率微扰的傅里叶变换是否具有全解析型结果,把 WBG 分为了 A 类和 B 类光栅。根据相位及时延谱的通解可知,A 类 WBG 具有全解析型的傅里叶变换和相位谱解。基于全解析型相位解的相位及时延谱计算具有简单、直观、快速、线性复杂度(最小计算量)低等优点,其计算精度、分辨率及效率与傅里叶变换无关。B 类光栅没有解析型的傅里叶变换结果,只有基于 DFT 的相位谱解。用该相位谱解分析计算相位及时延谱时,其分析特性由 DFT 的精度、分辨率和复杂度决定,其计算量至少是 A 类光栅计算量的  $\ln N$  倍。DFT 中的  $N$  值一般都较大,分析 B 类光栅的计算量会远大于 A 类光栅的计算量,且不够简单直观。A 类和 B 类光栅可有不同

形式的相位谱及时延谱解,可采用不同的分析方法,具有不同的分析性能。当然,DFT 可计算任意折射率微扰的傅里叶变换,适用于所有类型的 WBG。所以,B 类光栅的时延谱解和分析方法是通用的,也适用于 A 类光栅。尽管如此,我们仍然把 A 类光栅分类出来,并求解出其独立形式的时延谱解。这样可以充分体现全解析与半解析解的差异性,有助于认识和利用 A 类光栅全解析解的优越性,更好地利用时延谱解去分析和设计 A 类光栅。另外,WBG 时延谱对角频率的变化率决定了其色散特性,所建立的相位或时延谱通解既可用于分析相位及时延谱,又可用于分析色散特性。

## 5 结 论

用 FMC 理论求解 WBG 的相位谱,基于该相位谱建立了 WBG 时延响应的半解析型通解模型。该半解析型时延谱通解具有很强的通用性,适用于各种类型的 WBG 或任意复杂度的折射率微扰分布。对于均匀、相移、超结构、摩尔、高斯和余弦类变迹等 A 类 WBG,可得到全解析型的相位谱解,用该解析型相位谱解可简单、快速地计算其时延谱,所得的时延谱的计算具有线性复杂度(最小计算量)。对于 B 类光栅(包括啁啾光栅、复杂折射率微扰光栅、难以用数学函数表示微扰的光栅、有随机性相变或折变的光栅等),虽然其没有解析型的相位谱解,但可以有基于折射率微扰 DFT 的相位谱解。利用该相位谱也能容易地计算其时延谱,所得的时延谱的计算具有  $O(N \ln N)$  的复杂度。为了验证半解析型时延(或相位)谱通解的正确性和分析效率,用该时延谱通解计算了均匀 FBG 的相位及时延谱,并与基于耦合模理论的相位谱和实际测量的时延谱进行了对比分析。同时,计算了最有代表性的 CFBG 的反射率及时延谱,并和具有相近反射率分布的 CFBG 的实测时延谱进行了比较分析,同时对比了二者计算所需时间。分析结果表明,所建立的时延谱通解能快速、准确地分析各类 WBG 或任意折射率微扰的时延谱,间接表明了分析相位谱的正确性;对 A 类和 B 类光栅的分析复杂度分别是  $O(N)$  和  $O(N \ln N)$ ,分析效率均优于现有的分析方法,而且 A 类光栅的分辨率及效率与傅里叶变换无关。所建立的半解析型时延谱通解更新了对波导光栅响应谱解的传统认知,为分析、设计和应用 WBG 提供了基础理论和分析方法,在基于 WBG 时延特性的更高性能应用中可发挥重要作用。

## 参 考 文 献

- [1] Rebola J L, Cartaxo A V T. Performance optimization of Gaussian apodized fiber Bragg grating filters in WDM systems[J]. Journal of Lightwave Technology, 2002, 20(8): 1537-1544.
- [2] Zhang W F, Yao J P. A fully reconfigurable waveguide Bragg grating for programmable photonic signal processing[J]. Nature Communications, 2018, 9(1): 1396.
- [3] Ma T, Nallapan K, Guerboukha H, *et al.* Analog signal processing in the terahertz communication links using waveguide Bragg gratings: example of dispersion compensation[J]. Optics Express, 2017, 25(10): 11009-11026.
- [4] Dogru N. Effect of grating parameters on mode-locked external cavity lasers[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, 2009, 15(3): 644-652.
- [5] Jiang L Y, Wang L H, Lin Z X, *et al.* Effect of optical feedback on characteristic of the fiber grating external cavity semiconductor laser[J]. Chinese Journal of Lasers, 2016, 43(7): 0701008.  
江璐芸, 王凌华, 林中晞, 等. 光反馈对光纤光栅外腔半导体激光器特性的影响[J]. 中国激光, 2016, 43(7): 0701008.
- [6] Koo K P, LeBlanc M, Tsai T E, *et al.* Fiber-chirped grating Fabry-Pérot sensor with multiple-wavelength-addressable free-spectral ranges[J]. IEEE Photonics Technology Letters, 1998, 10(7): 1006-1008.
- [7] Sun J J, Wang Z F, Wang M, *et al.* Temperature tuning properties of  $\pi$  phase-shifted fiber Bragg gratings[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(10): 1006004.  
孙俊杰, 王泽锋, 王蒙, 等. 相移光纤光栅的温度调谐特性[J]. 光学学报, 2017, 37(10): 1006004.
- [8] Derevyanko S. Design of a flat-top fiber Bragg filter via quasi-random modulation of the refractive index[J]. Optics Letters, 2008, 33(20): 2404-2406.
- [9] Lee M H, Jo J Y, Kim D W, *et al.* Comparative study of uniform and nonuniform grating couplers for optimized fiber coupling to silicon waveguides[J]. Journal of the Optical Society of Korea, 2016, 20(2): 291-299.
- [10] Williams R J, Voigtländer C, Marshall G D, *et al.* Point-by-point inscription of apodized fiber Bragg gratings[J]. Optics Letters, 2011, 36(15): 2988-2990.
- [11] Frankinas S, Michailovas A, Rusteika N, *et al.* Efficient ultrafast fiber laser using chirped fiber Bragg grating and chirped volume Bragg grating stretcher/compressor configuration[J]. Proceedings of SPIE, 2016, 9730: 973017.
- [12] Liu W K, Liu C Y, Dong X W. Ultrashort optical pulse shaping based on integral characteristics of phase-shifted fiber grating[J]. Chinese Journal of Lasers, 2018, 45(3): 0306005.  
刘文楷, 刘成园, 董小伟. 基于相移光纤光栅积分特性的超短光脉冲整形[J]. 中国激光, 2018, 45(3): 0306005.
- [13] Song M. Programmable correction of fiber Bragg grating delay ripple for RF photonic filtering[J]. IEEE Photonics Technology Letters, 2016, 28(12): 1321-1324.
- [14] Skolianos G, Arora A, Bernier M, *et al.* Slow light in fiber Bragg gratings and its applications[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2016, 49(46): 463001.
- [15] Wang Q, Wang P, Du C, *et al.* Theoretical investigation and optimization of fiber grating based slow light[J]. Optics Communications, 2017, 395: 201-206.
- [16] Pei L, Wu L Y, Wang J S, *et al.* Phase shift chirped fiber Bragg grating based distributed strain and position sensing[J]. Acta Physica Sinica, 2017, 66(7): 070702.  
裴丽, 吴良英, 王建帅, 等. 啾啾相移光纤光栅分布式应变与应变点精确定位传感研究[J]. 物理学报, 2017, 66(7): 070702.
- [17] Qu L, Meng Y, Zhuo Z C, *et al.* Study on delay and dispersion characteristics of the fiber Bragg grating Fabry-Perot cavity[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(8): 0806001.  
屈丽, 孟瑜, 卓仲畅, 等. 光纤布拉格光栅法布里-珀罗腔时延和色散特性的研究[J]. 光学学报, 2013, 33(8): 0806001.
- [18] Xu C, Ban D Y. Design of chirped distributed Bragg reflector for octave-spanning frequency group velocity dispersion compensation in terahertz quantum cascade laser[J]. Optics Express, 2016, 24(12): 13500-13510.
- [19] Wang K R, Cheng J L, Chen G, *et al.* Research on time-delay characteristics of solitons in fiber Bragg grating[J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(2): 0219001.  
王葵如, 程洁琳, 陈功, 等. 光纤光栅中孤子时延特性研究[J]. 光学学报, 2011, 31(2): 0219001.
- [20] Shu X W. Optical fiber gratings and their applications in photonics information technology[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2000: 44-134.  
舒学文. 光纤光栅及其在光子信息技术中的应用

- [D]. 武汉: 华中理工大学, 2000: 44-134.
- [21] Erdogan T. Fiber grating spectra[J]. Journal of Lightwave Technology, 1997, 15(8): 1277-1294.
- [22] Chen Y L, Xu J, Shi N N, *et al.* Mode properties of metal-insulator-metal waveguide Bragg grating [J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(11): 1123002.  
陈奕霖, 许吉, 时楠楠, 等. 金属-介质-金属波导布拉格光栅的模式特性[J]. 光学学报, 2017, 37(11): 1123002.
- [23] Qi J F, Zhong Z Q, Wang G N, *et al.* Characteristics of chaotic output from a Gaussian apodized fiber Bragg grating external-cavity semiconductor laser[J]. Acta Physica Sinica, 2017, 66(24): 244207.  
起俊丰, 钟祝强, 王广娜, 等. 高斯切趾型光纤布拉格光栅外腔半导体激光器的混沌输出特性[J]. 物理学报, 2017, 66(24): 244207.
- [24] Zeng X K, Liang K. Analytic solutions for spectral properties of superstructure, Gaussian-apodized and phase shift gratings with short- or long-period [J]. Optics Express, 2011, 19(23): 22797-22808.
- [25] Armstrong J A, Bloembergen N, Ducuing J, *et al.* Interactions between light waves in a nonlinear dielectric [J]. Physical Review, 1962, 127(6): 1918-1939.