

# 基于 Thue-Morse 透镜的轴向多涡旋光束

刘孟思<sup>1\*\*</sup>, 夏天<sup>2</sup>, 程书博<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>长江大学物理与光电工程学院, 湖北 荆州 434023;

<sup>2</sup>中南大学物理与电子学院, 湖南 长沙 410083

**摘要** 基于 Thue-Morse 非周期数学序列设计了一种新型衍射光子学元件——Thue-Morse 多焦点涡旋透镜。与非涅耳涡旋透镜相比, 该类型透镜沿轴向具有多个聚焦涡旋且对称位置处的聚焦涡旋具有同等强度。理论与实验证明, Thue-Morse 涡旋透镜具有独特的光学性质。该类型透镜可以产生涡旋光束阵列, 实现多平面金属微粒、低折射率介质微粒等的束缚, 在微纳光学领域具有潜在的应用价值。

**关键词** 衍射; Thue-Morse 涡旋透镜; Thue-Morse 序列; 衍射特性; 衍射光学元件

中图分类号 O436

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201838.1105001

## Axial Multi-Vortex Beam Based on Thue-Morse Lens

Liu Mengsi<sup>1\*\*</sup>, Xia Tian<sup>2</sup>, Cheng Shubo<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> School of Physics and Optoelectronic Engineering, Yangtze University, Jingzhou, Hubei 434023, China;

<sup>2</sup> School of Physics and Electronics, Central South University, Changsha, Hunan 410083, China

**Abstract** Based on the Thue-Morse aperiodic mathematical sequence, a new kind of diffractive optical elements (DOEs), which is Thue-Morse multi-focal vortex lens, is proposed. Compared with the Fresnel vortex lens, the generated beam by the Thue-Morse vortex lens possesses the optical vortices embedded at the axial foci and the symmetry optical vortices have the equal intensity. The simulations and experiments verify the unique diffraction properties of the Thue-Morse vortex lens, which can generate vortices array and realize the trappings of metal particles and dielectric particles of low refractive index. The Thue-Morse vortex lens can be potentially applied in the research fields of micro and nanophotonics.

**Key words** diffraction; Thue-Morse vortex lens; Thue-Morse sequence; diffraction property; diffractive optical elements

**OCIS codes** 050.1940; 050.1965; 050.1970

## 1 引 言

涡旋光束能够稳定地捕获和操作微粒, 在与微粒相互作用的过程中, 其所携带的轨道角动量可以传递给微粒并驱动微粒旋转<sup>[1]</sup>。与普通光束相比, 涡旋光束具有很多独特的物理特性, 在光吸收型粒子捕获、低折射率粒子捕获、光学旋转、微流体导引等领域有重要的应用。1996 年, Gahagan 等<sup>[2-3]</sup>利用涡旋光束实现了对低折射率粒子的捕获, 实验中稳定捕获了 20  $\mu\text{m}$  的空心球, 并且实现了对高低折射率粒子的同时捕获。涡旋光束具有独特的相位结构且中心光强为零。高聚焦的涡旋光束对金属粒子

的较大散射力恰好能够将金属微粒束缚在涡旋光束的中心, 从而实现对金属粒子的稳定捕获<sup>[4]</sup>。Dienerowitz 等<sup>[5]</sup>利用涡旋光束首次成功捕获与旋转 100 nm 级别的金属微粒。Shvedov 等<sup>[6]</sup>利用两个相对传输的涡旋光束形成的光阱实现了对空气中光吸收型粒子的稳定捕获。除此以外, Ladavac 等<sup>[7]</sup>利用涡旋光束阵列实现了光学泵的功能, 用来导引微流。与传统涡旋光束相同, 调制的涡旋光束, 如分数型涡旋光束, 也具有轨道角动量, 在光学微操作实验中能够对微粒施加转矩<sup>[8-10]</sup>。Tao 等<sup>[9]</sup>通过全息光学的方法产生了分数型涡旋光束, 并利用该光束实现了对粒子的稳定捕获。分数型涡旋光束在

收稿日期: 2018-04-02; 修回日期: 2018-05-25; 录用日期: 2018-06-19

基金项目: 国家自然科学基金(11747105)、湖北省教育厅青年基金(Q20181312)

\* E-mail: shubocheng@yangtzeu.edu.cn; \*\* E-mail: msliu@yangtzeu.edu.cn

强度环上出现的缺口,阻碍了粒子的平滑旋转,因此,利用这种特点能够快速向导引粒子。同年, Lin 等<sup>[10]</sup>利用全息光学方法产生了任意形状的调制涡旋光束,并利用调制的光束实现了对微粒的捕获与旋转,证明调制涡旋光束仍然具有轨道角动量。除了涡旋光束可以束缚低折射率介质微粒、金属微粒之外,一种在传播方向上存在暗域的特殊光束——局域空心光束,也可应用于光学的许多领域,如束缚低折射率微粒、激光导管等<sup>[11-13]</sup>。Shvedov 等<sup>[13]</sup>利用空心光束在空气中捕获直径约  $5\ \mu\text{m}$  的石墨微粒。程治明等<sup>[14]</sup>提出了圆顶轴棱锥新型光学元件,并从理论上证明平行光通过圆顶轴棱锥后可以形成多个局域空心光束,从而大幅度提高了囚禁粒子的效率。尽管涡旋光束、局域空心光束等被广泛应用于光镊技术领域,实现了对金属微粒、低折射率微粒的捕获与操作,但是这种技术以及微粒在光场中的捕获稳定性受限于高倍显微物镜聚焦特性,并且不能够产生三维的涡旋光束阵列<sup>[15]</sup>。基于达曼波带片既可产生轴向聚焦涡旋光束,也可在透镜的后场实现按照规则晶格结构排布的聚焦光斑三维阵列,但是这种类型波带片的轴向焦点强度是近似相等的<sup>[16]</sup>。

新型光子学元件分形波带片的产生使得产生轴向多涡旋光束成为可能,分形波带片沿轴向具有多个自相似特性的焦点,而且不同结构的分形波带片轴向焦点位置也不相同<sup>[17]</sup>,这类型光子学元件在三维光镊技术领域有着潜在应用<sup>[18]</sup>。基于康托尔集分形结构的 Devil 透镜沿轴向具有多个焦点,Devil 透镜叠加螺旋相位后形成 Devil 涡旋透镜,该透镜轴向具有一个强度较大的聚焦涡旋光束以及多个次级聚焦涡旋光束<sup>[19]</sup>。将螺旋相位叠加到相位型分形波带片上,即可在分形波带片的每个焦点位置处得到相应的涡旋光束,产生沿传播方向的聚焦涡旋光束阵列<sup>[20]</sup>,但是各个焦点位置处的聚焦涡旋光束光强均不相同。随着更多的非周期数学序列应用于波带片的设计中, Monsori 等<sup>[21]</sup>、Calatayud 等<sup>[22]</sup>基于斐波那契序列并结合螺旋相位,产生了斐波那契涡旋透镜,沿轴向产生了一对强度相等的聚焦涡旋光束,但是轴向聚焦涡旋光束的数目固定,而且聚焦涡旋光束距离波带片之间的距离之比为定值,不能够灵活调整。本文基于 Thue-Morse (T-M) 非周期数学序列以及 T-M 波带片的双焦点分形特性<sup>[23]</sup>,通过叠加螺旋相位产生了一种新型光子学元件——T-M 涡旋透镜,新产生的涡旋透镜沿轴向存在多对强度相等的聚焦涡旋光束,能够实现多平面金属微

粒、低折射率微粒等的束缚,在光镊、光信息处理和非线性光学等领域具有潜在的应用价值。

## 2 T-M 涡旋透镜

构造 T-M 涡旋透镜,首先基于二值非周期 T-M 序列构造相应的波带片,这种非周期数学序列可用多种方法构造形成,可以由替代规则生成,也可以由迭代关系写出<sup>[24]</sup>。首先定义一个初始种子  $S_0 = A$ , T-M 二值 (A/B) 非周期序列可以通过迭代规律  $A \rightarrow AB$  与  $B \rightarrow BA$  得到,其中“ $\rightarrow$ ”表示“被替换成”。初始种子的共轭元素定义为  $\bar{A} = B$ , 则  $\bar{B} = A$ 。因此,结合上述迭代规律可以得到:第 1 级 T-M 二值 (A/B) 非周期序列可表示为  $S_1 = AB$ ; 第 2 级 T-M 二值 (A/B) 非周期序列可表示为  $S_2 = ABBA$ ; 第 3 级 T-M 二值 (A/B) 非周期序列可表示为  $S_3 = ABBABAAB$ ; 第 4 级 T-M 二值 (A/B) 非周期序列可表示为  $S_4 = ABBABAABBAABABBA$ ; 第 5 级 T-M 二值 (A/B) 非周期序列可表示为  $S_5 = ABBABAABBAABABBABAABABBAABBABAAB$ , 依此类推,第  $n$  级 T-M 二值序列可按照相同迭代规律得到。 $S_n$  是第  $n$  级 T-M 非周期序列,相应序列中二值元素的数目为  $2^n$ 。一个波带片是由透光和不透光的波带按照一定规律交替组成的,设  $A$  代表透光波带、 $B$  代表不透光波带, T-M 非周期波带片的构造可依据相应的透过率函数来完成<sup>[24]</sup>。图 1(d) 展示了基于第 5 级 T-M 非周期序列所构造的波带片,作为对比,图 1(a) 是与图 1(d) 所示波带片具有相同分辨率的非涅耳波带片。将螺旋相位叠加在相位型 T-M 波带片上即可得到 T-M 涡旋透镜<sup>[24]</sup>, T-M 涡旋透镜的相位分布用  $\varphi_{\text{STM}}$  表示,  $\varphi_{\text{STM}} = \varphi_{\text{MT}} + \varphi_s$ , 其中,  $\varphi_{\text{MT}}$  表示二维相位型 T-M 波带片,  $\varphi_s$  表示螺旋相位板的螺旋相位。图 1(e) 与 (f) 展示了拓扑荷数分别为  $l=2$  与  $l=5$  的第 5 级 T-M 涡旋透镜,为了进行对比,图 1(b) 和 (c) 分别展示了与图 1(e) 和 (f) 具有相同分辨率的非涅耳涡旋透镜,相应拓扑荷数也分别为  $l=2$  与  $l=5$ 。

## 3 T-M 涡旋透镜的轴向衍射特性

为了研究 T-M 涡旋透镜的轴向聚焦特性,考虑波长为  $\lambda$  的平面波照射 T-M 涡旋透镜,基于 T-M 涡旋透镜的透过率函数  $t$  表示为

$$t(\zeta, \varphi) = q(\zeta) \exp(i l \varphi), \quad (1)$$

式中:  $q(\zeta)$  为 T-M 波带片的透过率函数,  $\zeta = (r/a)^2$ 。基于 (1) 式,由菲涅耳近似可求出 T-M 涡旋透镜的

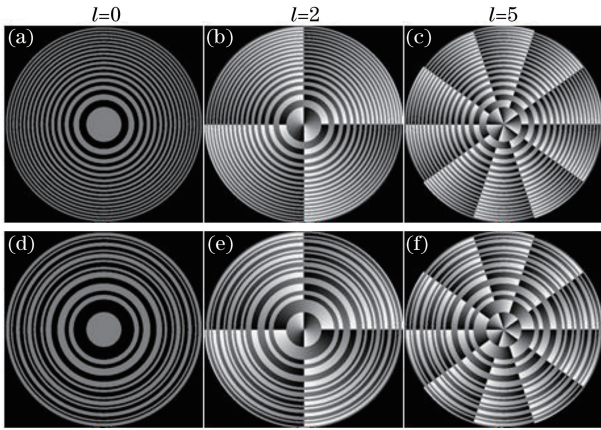


图 1 不同拓扑荷数  $l=0, 2, 5$  下菲涅耳涡旋透镜和涡旋透镜。(a)~(c)与(d)~(f)所示透镜具有相同分辨率的菲涅耳涡旋透镜;(d)~(f)基于第 5 级 T-M 非周期序列的 T-M 涡旋透镜

Fig. 1 Fresnel lenses and T-M vortex lenses with the topological charges of  $l=0, 2, 5$ , respectively. (a)-(c) Equivalent periodic Fresnel vortex lenses with the same number of zones; (d)-(f) T-M vortex lens based on the T-M sequence of order 5

轴向强度分布。对轴向坐标  $z$  进行简化,令  $u = a^2 / (2\lambda z)$ ,  $u$  为无量纲的量<sup>[24]</sup>,  $a$  为涡旋透镜的半径;  $v = r/a$  为归一化轴向截面坐标,  $r$  为涡旋透镜的径向坐标。轴向强度分布可以表示为<sup>[22]</sup>

$$I(u, v) = 4\pi^2 u^2 \left| \int_0^1 q(\zeta) \exp(-i2\pi u \zeta) \times J_l(4\pi u v \zeta^{1/2}) d\zeta \right|^2, \quad (2)$$

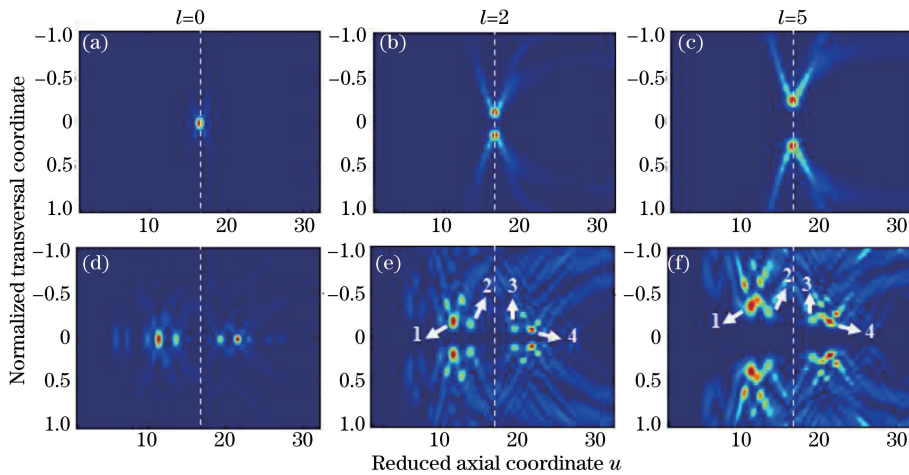


图 2 不同拓扑荷数  $l=0, 2, 5$  下菲涅耳涡旋透镜和涡旋透镜的强度分布。(a)~(c)第 5 级菲涅耳透镜的轴向强度分布;(d)~(f)第 5 级 T-M 透镜轴向纵切面强度分布

Fig. 2 Irradiance evolution of Fresnel lenses and T-M vortex lenses with the topological charges of  $l=0, 2, 5$ , respectively. (a)-(c) Evolution of the transverse irradiance of the Fresnel lens of order 5; (d)-(e) evolution of the transverse irradiance of the T-M vortex lens of order 5

式中:  $J_l$  为  $l$  阶第一类贝塞尔函数。

利用(2)式得到的带有不同拓扑荷数的第 5 级 T-M 涡旋透镜的轴向强度分布,如图 2(d)~(f)所示,对应 T-M 涡旋透镜所携带的拓扑荷数分别为  $l=0, 2, 5$ 。图 2(a)~(c)展示了与图 2(d)~(f)具有相同分辨率的菲涅耳涡旋透镜的轴向强度分布,相应拓扑荷数也分别为  $l=0, 2, 5$ 。图 2(a)所示涡旋透镜由于所携带拓扑荷数为零,其实际为菲涅耳透镜。图 2(b)和(c)中菲涅耳涡旋透镜所携带的拓扑荷数分别为  $l=2, 5$ ,可以看到,菲涅耳涡旋透镜沿轴向在相应菲涅耳透镜的焦点位置处产生一个聚焦涡旋光束,随着携带的拓扑荷数增大,涡旋光束的半径也随之增大。图 2(d)所示 T-M 涡旋透镜由于所携带的拓扑荷数为 0,因此,其实际为 T-M 透镜,从图中能够看出该透镜沿轴向具有多个焦点,且这些焦点对称分布在如图 2(a)所示的菲涅耳透镜的焦点的两侧<sup>[20]</sup>。图 2(e)和(f)中 T-M 涡旋透镜所携带的拓扑荷数也分别为  $l=2, 5$ ,可以看出, T-M 涡旋透镜的焦点位置处可以产生相应的聚焦涡旋光束。因此, T-M 涡旋透镜能够沿轴向产生多个涡旋光束。涡旋光束能广泛地应用于焦点附近微粒的捕捉和旋转<sup>[2-6]</sup>。然而,由于聚焦涡旋光束经过焦平面后迅速发散,如果嵌入式的涡旋光束不集中,那么光束的聚焦深度将难以维持,而聚焦深度会影响对粒子的操控范围。因此, T-M 涡旋透镜产生的多个轴向涡旋光束为多平面束缚低折射率微粒提供了可能。



以携带拓扑荷数为  $l=5$  的第 5 级 T-M 涡旋透镜为例,分析 T-M 涡旋透镜轴向强度分布特性以及多个涡旋光束的强度分布。T-M 涡旋透镜的主焦点位置可表示为

$$f = \frac{a^2}{2^S \lambda}, \quad (3)$$

式中: $S$  为 T-M 涡旋透镜采用的 T-M 数学序列的级数。模拟实验中,入射光的波长  $\lambda=532$  nm,相应 T-M 涡旋透镜的半径  $a=1.15$  mm,选取 T-M 涡旋透镜主焦点两侧对称位置处的涡旋光束进行分析。为了直观展示焦点位置处的螺旋相位与强度分布,以拓扑荷数为 5 的 T-M 涡旋透镜为例,主要分析其相对主焦点位置对称分布的一对涡旋光束[图 2(f)中标示为 1 与 4 的两个焦点]。在研究焦点位置处相位分布时采取了角谱传播理论,图 3(a)与(b)分别展示了图 2(f)中 1 与 4 标示的两个焦平面的相位分布,为了方便观察,只截取了平面焦点的中心区域,中心采集点区域面积的像素数为  $40 \times 40$ ,每个像素大小为  $15 \mu\text{m} \times 15 \mu\text{m}$ 。图 3(c)与(d)分别展示了图 2(f)中 1 与 4 标示的两个焦平面的强度分布,为了方便观察只截取了平面焦点的中心区域,中心采集点区域面积的像素数为  $60 \times 60$ ,每个像素大小为  $15 \mu\text{m} \times 15 \mu\text{m}$ 。为了证明 T-M 涡旋透镜轴向位于主焦点两侧对称位置处的聚焦涡旋光束具有相等的强度,同样选取图 2(f)中 1 与 4 标示的两个聚焦涡旋光束进行分析,并选取其中一个涡旋光束的最大强度值作为标准,对两个涡旋光束的所有强度作归一化处理。图 3(e)与(f)分别展示了图 3(c)与(d)中白色虚线区域内的强度分布,对比图 3(e)与(f)可以看出,两个涡旋光束强度相等,图 2(f)中 1 标示的涡旋光束直径的像素数大约为  $\Delta x_1=30$ ,4 标示的涡旋光束直径的像素数大约为  $\Delta x_4=15$ 。理论模拟结果显示,与 T-M 波带片轴向强度分布相同,T-M 涡旋透镜轴向聚焦涡旋光束相对主焦点位置对称分布,且对称位置处的聚焦涡旋光束的强度相等。除了这些聚焦涡旋光束之外,在轴向其他焦点位置处也存在聚焦涡旋光束。这种 T-M 涡旋透镜沿轴向具有多个聚焦涡旋光束,且相对主焦点对称位置处的聚焦涡旋光束强度相同,这种涡旋透镜通过组合可以产生三维涡旋光束阵列,在三维光镊技术领域有潜在应用价值。

#### 4 实验分析

前面已经对 T-M 涡旋透镜的轴向衍射特性进

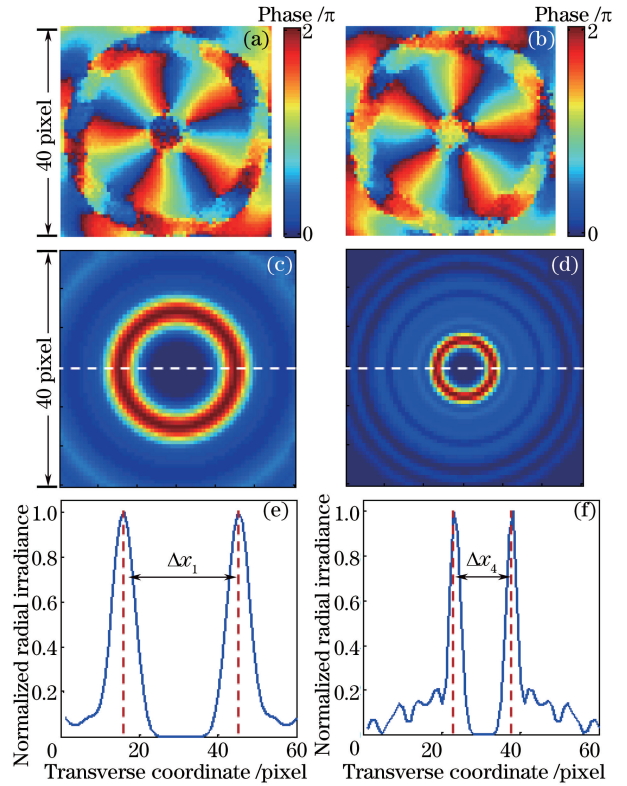


图 3 (a)和(b)图 2(f)中 1 与 4 标示的两个焦平面的相位分布; (c)和(d)图 2(f)中 1 与 4 标示的两个焦平面处强度分布图; (e)和(f)图 3(c)与图 3(d)中白色的虚线区域的强度分布图

Fig. 3 (a)-(b) Phase distribution in the two focal planes marked with 1 and 4 in Fig. 2 (f); (c)-(d) transverse intensity distribution in the two focal planes marked with 1 and 4 in Fig. 2(f); (e)-(f) intensity profiles along the white dotted lines showed in Fig. 3 (c) and Fig. 3 (d)

行了分析,下面将从实验的角度对轴向衍射特性进行探索,实验系统采用了相位型空间光调制器(SLM, Boulder Nonlinear System, P512-532 nm)。实验过程中将拓扑荷数为  $l=2$  的第 5 级相位型 T-M 涡旋透镜加载到如图 4 所示的空间光调制器中,为了使经过空间光调制器反射之后的光束与空间光调制器液晶表面的衍射零级光斑分开,需要在图 1(e)所示的相位型 T-M 涡旋透镜中加入一个闪耀光栅。图 4 展示了实验装置示意图,一束由半导体固体激光器发射并由准直器准直扩束的激光经过滤波之后,入射在 SLM 的表面上并被反射,反射光束最后经一个由透镜  $L_1$  与  $L_2$  构成的倒置望远系统后成倍缩小,其中光束的准直扩束系统由两个透镜组成,CCD (Newport, LBP-2-USB) 用来采集 T-M 涡旋透镜轴向某一位置处的光束强度分布。为了进行对比分析,图 5 分别展示了图 2(e)中 1,2,3,4 标

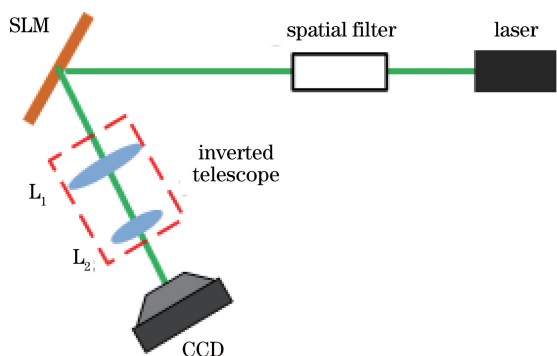


图 4 实验装置示意图

Fig. 4 Schematic of the experimental setup

示的4个聚焦涡旋光束的强度分布。实验中,在距离携带拓扑荷数为 $l=2$ 的第5级T-M涡旋透镜

$u=12.5, 15, 20, 23$  [图 2(e)中 1,2,3,4 标示的位置]处采集到的聚焦涡旋光束的强度分布如图 6(a)~(d)所示,为了便于观察,只截取了平面焦点的中心区域,实验结果验证了理论模拟结果的正确性,随着衍射距离的增加,T-M 涡旋透镜焦点位置处的涡旋光束的半径会随之增大,实验中通过测量发现,T-M 涡旋透镜相对主焦点对称分布的两对聚焦涡旋光束的强度基本一致。除了这 4 个涡旋光束之外,沿着轴向移动 CCD 能够观察到多个聚焦涡旋光束。因此,T-M 涡旋透镜能够产生多个轴向涡旋光束,为三维空间捕获金属微粒、低折射率微粒等提供了可能,这种新型 T-M 涡旋透镜将在三维光镊、微纳光子学领域有潜在应用价值。

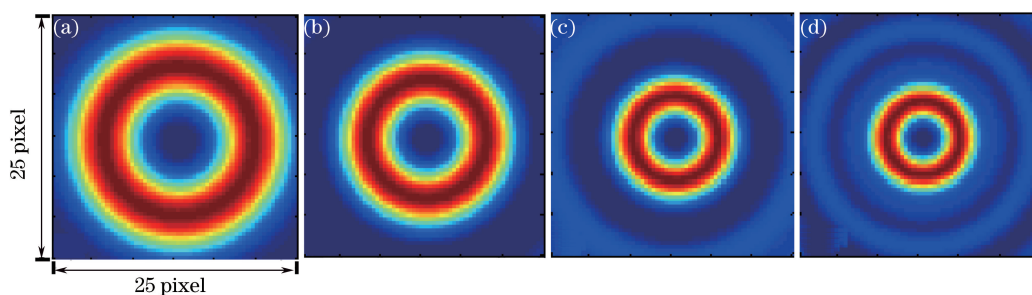


图 5 (a)~(d)图 2(e)中 1,2,3,4 标示的 4 个焦平面上的强度分布的理论模拟图

Fig. 5 (a)-(d) Simulated transverse irradiance distributions at the focal planes marked with 1, 2, 3 and 4 in Fig. 2 (e)

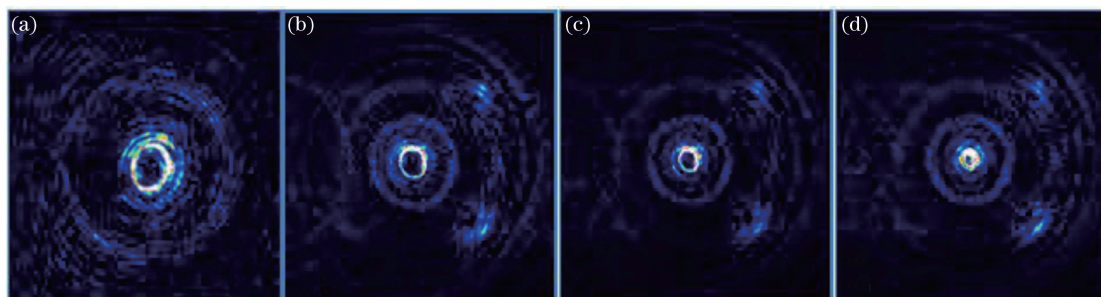


图 6 (a)~(d)图 2(e)中 1,2,3,4 标示的 4 个焦平面处聚焦涡旋光束强度分布实验图

Fig. 6 (a)-(d) Experimental transverse irradiance at the focal planes marked with 1, 2, 3 and 4 in Fig. 2 (e)

## 5 结 论

基于 T-M 非周期性数学序列设计了一种新的光子学元件——T-M 涡旋透镜,轴向衍射特性模拟结果显示,T-M 涡旋透镜轴向具有多个聚焦涡旋焦点,各个焦点相对主焦点位置对称分布,对称位置处的焦点强度相同。实验结果显示距离透镜距离 $u=12.5, 15, 20, 23$ 处分别存在一个聚焦涡旋光束,不同级次 T-M 涡旋透镜具有的聚焦涡旋数目以及距离棱镜的位置也不相同。这种类型的 T-M 涡旋透镜能够产生轴向涡旋阵列,其衍射特性不受被捕获微粒的影响,能够实现空间多平面捕获金属

微粒、低折射率微粒等,在三维光镊技术等领域有着广泛、潜在的应用价值。

## 参 考 文 献

- [1] Simpson N B, Allen L, Padgett M J. Optical tweezers and optical spanners with Laguerre-Gaussian modes[J]. Journal of Modern Optics, 1996, 43(12): 2485-2491.
- [2] Gahagan K T, Swartzlander G A, Jr. Optical vortex trapping of particles [J]. Optics Letters, 1996, 21 (11): 827-829.
- [3] Gahagan K T, Swartzlander G A, Jr. Simultaneous trapping of low-index and high-index microparticles

- observed with an optical-vortex trap[J]. Journal of the Optical Society of America B, 1999, 16(4): 533-537.
- [4] Morris J E, Studies of novel beam shapes and applications to optical manipulation[D]. Scotland: University of St Andrews, 2010.
- [5] Dienerowitz M, Mazilu M, Reece P J, *et al.* Optical vortex trap for resonant confinement of metal nanoparticles[J]. Optics Express, 2008, 16(7): 4991-4999.
- [6] Shvedov V G, Desyatnikov A S, Rode A V, *et al.* Optical vortex beams for trapping and transport of particles in air[J]. Applied Physics A, 2010, 100(2): 327-331.
- [7] Ladavac K, Grier D G. Microoptomechanical pumps assembled and driven by holographic optical vortex arrays[J]. Optics Express, 2004, 12(6): 1144-1149.
- [8] Ponomarenko S A. A class of partially coherent beams carrying optical vortices[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2001, 18(1): 150-156.
- [9] Tao S H, Yuan X C, Lin J, *et al.* Fractional optical vortex beam induced rotation of particles[J]. Optics Express, 2005, 13(20): 7726-7731.
- [10] Lin J, Yuan X C, Tao S H, *et al.* Deterministic approach to the generation of modified helical beams for optical manipulation[J]. Optics Express, 2005, 13(10): 3862-3867.
- [11] Tatarkova S A, Sibbett W, Dholakia K. Brownian particle in an optical potential of the washboard type[J]. Physical Review Letters, 2003, 91(3): 038101.
- [12] Li Q, Feng W L, Hu X M, *et al.* Theoretical study of the trapping efficiency of an optical tweezers array system[J]. Chinese Physics B, 2008, 17(2): 726-735.
- [13] Shvedov V G, Hnatovsky C, Rode A V, *et al.* Robust trapping and manipulation of airborne particles with a bottle beam[J]. Optics Express, 2011, 19(18): 17350-17356.
- [14] Cheng Z M, Wu F T, Fang X, *et al.* Multi-bottle beam generated by vaulted axicon[J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(21): 214201.
- 程治明, 吴逢铁, 方翔, 等. 圆顶轴棱锥产生多个局域空心光束[J]. 物理学报, 2012, 61(21): 214201.
- [15] Luo W, Cheng S B, Yuan Z Z, *et al.* Power-exponent-phase vortices for manipulating particles[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(11): 1109001.
- 罗伟, 程书博, 袁战忠, 等. 幂指数相位涡旋光束用于微粒操控[J]. 光学学报, 2014, 34(11): 1109001.
- [16] Yu J J, Zhou C H, Jia W, *et al.* Three-dimensional dammann array[J]. Applied Optics, 2012, 51(10): 1619-1630.
- [17] Saavedra G, Furlan W D, Monsoriu J A. Fractal zone plates[J]. Optics Letters, 2003, 28(12): 971-973.
- [18] Zhang X Y, Cheng S B, Tao S H. Three-dimensional optical tweezers based on Fibonacci zone plate[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(10): 1035001.
- 张心宇, 程书博, 陶少华. 基于斐波那契波带片的三维光镊[J]. 光学学报, 2017, 37(10): 1035001.
- [19] Furlan W D, Giménez F, Calatayud A, *et al.* Devil's vortex-lenses[J]. Optics Express, 2009, 17(24): 21891-21896.
- [20] Tao S H, Yuan X C, Lin J, *et al.* Sequence of focused optical vortices generated by a spiral fractal zone plate[J]. Applied Physics Letters, 2006, 89(3): 031105.
- [21] Monsoriu J A, Calatayud A, Remón L, *et al.* Bifocal Fibonacci diffractive lenses[J]. IEEE Photonics Journal, 2013, 5(3): 3400106.
- [22] Calatayud A, Ferrando V, Remón L, *et al.* Twin axial vortices generated by Fibonacci lenses[J]. Optics Express, 2013, 21(8): 10234-10239.
- [23] Ferrando V, Giménez F, Furlan W D, *et al.* Bifractal focusing and imaging properties of Thue-Morse zone plates[J]. Optics Express, 2015, 23(15): 19846-19853.
- [24] Ma W Z, Tao S H, Cheng S B. Composite Thue-Morse zone plates[J]. Optics Express, 2016, 24(12): 12740-12747.