

基于 l^p 空间力学模型的三维点云配准算法

赵敏¹, 舒勤^{1*}, 陈蔚², 杨贇秀²

¹ 四川大学电气信息学院, 四川 成都 610065;

² 西南技术物理研究所, 四川 成都 610041

摘要 为了提高三维激光扫描点云的配准效率和精度, 提出一种基于 l^p 空间力学模型的点云配准算法。针对待配准的两组点云数据, 首先计算两片点云的重心, 通过重心化将两组点云移到以重心为原点的同一坐标系下, 然后利用 l^p 空间力学模型将复杂的两组点云数据分别简化为三个特征向量表示的模型, 再根据两点云特征向量的对应关系利用奇异值分解方法求解刚体变换旋转矩阵, 得到初始配准参数, 最后使用改进的最近点迭代(ICP)算法实现两组点云的精确配准。本文算法可以处理无序散乱点云样本。相比于经典 ICP 算法, 本文算法对 Bunny 点云数据的配准效率提高了 72%, 对 Dragon 点云数据的配准速度提高了 4 倍。实验表明, 本文算法收敛速度较快, 效果优良。

关键词 图像处理; 激光光学; l^p 空间; 力学模型; 点云配准; 奇异值分解; 最近点迭代

中图分类号 TN958.98

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201838.1010005

Three-Dimensional Point Cloud Registration Algorithm Based on l^p Spatial Mechanics Model

Zhao Min¹, Shu Qin^{1*}, Chen Wei², Yang Yunxiu²

¹ College of Electrical Engineering and Information Technology, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610065, China;

² Southwest Institute of Technical Physics, Chengdu, Sichuan 610041, China

Abstract To improve the registration efficiency and accuracy of three-dimensional laser scanning point cloud, we propose a point cloud registration algorithm based on l^p space mechanics model. In the algorithm, the center of gravity of the sets data is calculated first, and two point clouds are moved to the same coordinate system with the center as the origin through gravity-centralizing. The complex point sets to be registered are represented as three eigenvectors respectively with the space mechanics model. Then, the singular value decomposition method is used to solve the rigid body transformation rotation matrix according to the corresponding relationship between two point sets' eigenvectors. Finally, with the initial registration result, the improved iterative closest point (ICP) algorithm leads to perfect registration. The proposed algorithm can deal with disordered and scattered cloud sample. Compared with the classic ICP algorithm, the proposed method increases efficiency by 72% for the Bunny point cloud and is 4 times faster for Dragon scanning data. Experimental results indicate that the proposed algorithm has a fast convergence rate and good effect.

Key words image processing; laser optics; l^p space; mechanics model; point cloud registration; singular value decomposition; iterative closest point

OCIS codes 100.6890; 100.5010; 100.4999

1 引 言

近年来, 光学三维(3D)测量技术^[1-4]与点云数据处理技术^[5]不断发展, 广泛应用于计算机视觉、遥

操作^[6]、大型曲面建模^[7]、三维重构^[8]等领域。在扫描测量过程中, 受物体遮挡、环境因素或测量工具的误差等影响, 需要在不同角度下对物体进行多次扫描^[9], 然后利用配准算法将若干组扫描数据配准拼

收稿日期: 2018-03-08; 修回日期: 2018-04-09; 录用日期: 2018-05-25

基金项目: 四川省重点研发项目(2018GZ0226)

* E-mail: shuchin@163.com

接在一起,形成物体的完整点云表达。点云配准的本质就是将两组不同坐标下的具有重复区域的点云数据统一到同一个坐标系下。

目前,点云配准一般分为两步^[10-11]:粗配准和精配准。粗配准^[12]是为了缩小两点云间的初始位置差,为精确配准提供更好的初始参数;精配准是为了让两片点云的误差达到最小,得到理想配准效果。针对三维点云配准问题,国内外专家学者做了许多研究,其中,常见的初始配准算法包括:1)随机采样一致(RANSAC)算法;2)基于局部特征(法向量、曲率等)提取的配准算法^[13-14];3)主成分分析(PCA)方法^[15];4)点云重心重合法^[16],即简单地将两个点云的重心重合在一起。精配准阶段最常见的自动配准方法就是最近点迭代(ICP)算法及其改进算法^[17]。ICP算法是1992年Besl等^[18]提出的,该方法基于四元素法,反复迭代寻求欧氏距离最小时的最优变换矩阵,实现方便且配准精度较高,但却存在以下问题:对点云的初始位置有一定要求,若两片点云基本不重合,算法容易陷入局部最优,且迭代时间较长。Rusu等^[19]提出用点特征直方图(PFH)来提取点云一点处的16维局部几何特征的配准算法,该算法可以为迭代算法提供较好的初值,并可以有效处理噪声点云配准,但该算法特征描述子维度很高,计算复杂度很高^[20]。卢章平等^[21]提出通过基于共面4点集的RANSAC+ICP算法对点云进行配准,该算法对噪声的稳健性强,但计算量较大,且对点云匹配曲面类型有一定要求。罗楠等^[22]提出一种基于刚体变换欧氏不变特征的距离差分矩阵算法,该算法可以剔除错误匹配点对,提高了二次配准的速度和精度。除了改善点云配准的初始参数外,很多学者也在ICP算法的基础上对最近点搜索策略进行了改进:李彩林等^[23]提出point-point、point-to-plane、point-to-projection等方法搜索最近点,刘江等^[24]提出基于KD树加速最近点的搜索,王育坚等^[25]提出基于八叉树和KD树的多层索引结构。这些方法都能在一定程度上提高ICP算法的配准效率,但是由于KD树存在回溯搜索的过程,在数据维度较高时,搜索效率会逐渐下降。

为提高点云配准精度和速度,本文提出基于 l^p 空间力学模型的点云配准算法。首先通过点云重心化和寻找线性无关的三个特征向量确定初始三维变换,然后利用改进ICP算法进行二次配准。本文方法对点云的扫描顺序没有任何要求,在点数不同(两点云至少相差5%的数据点)且两点云姿态相差较

大的情况下,本文初始算法可实现粗略配准,收敛速度极快。本文整体(粗配准+改进ICP)配准算法相比于经典ICP算法、文献[26]算法,配准均方误差分别减小0.241 mm、0.053 mm。实验结果表明,本文算法简单可行,降低了时间复杂度,提高了配准精度。

2 基于 l^p 空间力学模型的点云初始配准

2.1 点云重心化

激光扫描所得到的不同视角下的两组点云数据可能完全没有重叠区域,如果直接进行配准,难度较大。先对三维点云进行重心化^[5],即求得源点云和目标点云各自相对于重心的平移矩阵,将两片点云的重心平移到同一个坐标系的原点上。设 $p_i(x_i, y_i, z_i)$ 、 $q_i(x'_i, y'_i, z'_i)$ 分别为点云集 P 、 Q 中的点,计算点云 P 、 Q 的重心 u_p 和 u_q :

$$\begin{cases} u_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \\ u_q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i \end{cases}, \quad (1)$$

式中 n 为点云集的点数。再对点云坐标进行重心化:

$$\begin{cases} p'_i = p_i - u_p \\ q'_i = q_i - u_q \end{cases}, \quad (2)$$

式中 p'_i 、 q'_i 分别为重心化后的目标点云和源点云中的点。也就是将 $p_i - u_p$ 、 $q_i - u_q$ 分别作为两点云的初始平移向量进行配准。

2.2 利用 l^p 空间力学模型寻找点云特征向量

由于高维特征计算复杂度高,单一低维特征信息量少,辨识度低^[26],因此本文选取三个基本特征向量来表示点云数据,以此来计算初始配准参数。假设点云样本上的每个点受到相对于坐标原点 O 的万有引力的作用。万有引力经典公式^[27]如下:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3)$$

式中 G 为万有引力常数, m_1 、 m_2 分别为两物体的质量, r 是物体间的距离。此处根据万有引力模型,将 l^p (l^p 空间即 p 次可和的序列空间)中的 p 取为2,则成为 l^2 范数(欧几里得范数),将其作为点云上某点到原点间的距离:

$$r(i) = \|\mathbf{op}'_i\|_2 = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \quad (4)$$

$$r'(i) = \|\mathbf{oq}'_i\|_2 = \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2}. \quad (5)$$

假设点云中每个点的质量相同且为1, G 为常数,设为1。由于无论如何旋转和平移,点云上每个

点相对于原点的引力大小不会改变,只有方向会变化。基于引力旋转不变性,将点云上每个点相对于坐标原点所受到的万有引力矢量累加在一起,最终算出点云的一个引力合力 \mathbf{F}_1 ,作为第一个特征向量,此处以重心化后的目标点云 P' 为例进行说明:

$$\mathbf{F}_1 = \sum_{i=1}^n \frac{m_o m_i}{r(i)^2} \mathbf{e}_{op'_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{r(i)^2} \mathbf{e}_{op'_i}, \quad (6)$$

式中 $\mathbf{e}_{op'_i} = \frac{\mathbf{op}'_i}{\|\mathbf{op}'_i\|_2}$ 为向量 \mathbf{op}'_i 对应的单位向量, $\mathbf{op}'_i = \{op'_{xi}, op'_{yi}, op'_{zi}\}$ 。再根据刚体变换距离不变性,将坐标原点与点云上的某点的欧氏距离矢量累加和作为第二个统计特征向量:

$$\mathbf{F}_2 = \sum_{i=1}^n r(i) \mathbf{e}_{op'_i}. \quad (7)$$

第三个特征向量是根据 \mathbf{F}_1 与 \mathbf{F}_2 构成平面的法向量 \mathbf{F}_3 来表示:

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 =$$

$$\left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{r(i)^2} \mathbf{e}_{op'_i} \right] \times \left[\sum_{i=1}^n r(i) \mathbf{e}_{op'_i} \right]. \quad (8)$$

点云 P' 、 Q' 的特征向量集分别表示为

$$\mathbf{F}_P = [\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3]^T, \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_Q = [\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3]^T. \quad (10)$$

图 1(a)和(b)分别为点云 P' 、 Q' 对应的特征向量集 \mathbf{F}_P 、 \mathbf{F}_Q 。

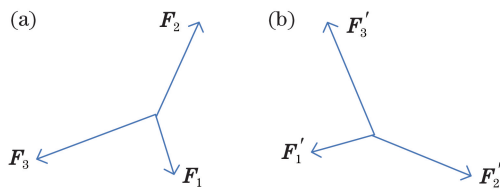


图 1 (a) 目标点云 P' 特征向量集 \mathbf{F}_P ;

(b) 源点云 Q' 特征向量集 \mathbf{F}_Q

Fig. 1 (a) Eigenvector set \mathbf{F}_P of target point cloud P' ;

(b) eigenvector set \mathbf{F}_Q of source point cloud Q'

在实际测量中,源点云与目标点云通常是不同的,存在非重叠区域,但是在三维空间中,任意一个三维向量都可以由三个线性无关的三维向量表示出来。据此,本文采用相同的准则分别找出三个线性无关的特征向量来表征两个待配准的点云,三个特征向量的大小和各自在点云中的相对位置是基本对应的。因此,图 1(a)经过一定角度的旋转,可与图 1(b)大致重合,即只要求出源点云特征向量到目标点云特征向量的旋转矩阵,即可实现点云的初始配准。

2.3 寻找旋转矩阵

寻找到源点云与目标点云的特征向量后,利用两

个特征向量集的对应关系,寻找一个矩阵 \mathbf{R}_c 满足

$$\mathbf{F}_P = \mathbf{R}_c * \mathbf{F}_Q, \quad (11)$$

式中 \mathbf{F}_P 、 \mathbf{F}_Q 分别表示目标点云和源点云的特征向量集, \mathbf{R}_c 是两个特征向量集对应的旋转矩阵。因为特征向量集 \mathbf{F}_Q 列线性无关(具体证明见附录),所以特征向量旋转矩阵为

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{F}_P \mathbf{F}_Q^{-1}. \quad (12)$$

对于重心化后的两点云,要完成粗配准只须寻找一个旋转矩阵满足

$$\mathbf{Q}'' = \mathbf{R} * \mathbf{Q}', \quad (13)$$

式中 \mathbf{Q}' 、 \mathbf{Q}'' 分别是经过重心化、粗配准后的源点云, \mathbf{R} 是初始配准旋转矩阵。为了保证在粗配准后, \mathbf{Q}'' 的能量与 \mathbf{Q}' 的能量相同,即保证 $\|\mathbf{Q}''\|_2 = \|\mathbf{Q}'\|_2$, 需要 $\|\mathbf{R}\|_2 = 1$ 。为此要对 \mathbf{R}_c 进行奇异值分解(SVD):

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T, \quad (14)$$

式中 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 是 3×3 的正交矩阵,故 $\|\mathbf{U} \mathbf{V}^T\|_2 = 1$, 于是 $\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{V}^T$ 。找出旋转矩阵 \mathbf{R} 后,将源点云 \mathbf{Q}' 乘上旋转矩阵,点云粗配准完成。

2.4 初始配准算法步骤

前面已经分析说明算法的原理,下面总结基于 l^p 空间力学模型的点云配准算法的步骤:

1) 点云重心化。求点云 P 、 Q 的重心坐标 u_p 、 u_q ,用两点云各点分别减去对应的重心,对点云进行重心化,重合后的重心作为新坐标系的原点。

2) 寻找特征向量。根据引力大小和距离大小的旋转平移不变性,寻找点云的三个特征向量,用 3×3 矩阵表示。

3) 寻找旋转矩阵。根据特征向量集对应关系,找出两组点云特征向量对应的旋转矩阵 \mathbf{R}_c ,再利用 SVD 得到点云粗配准所需旋转矩阵 \mathbf{R} 。

4) 将重心化后的源点云 \mathbf{Q}' 作旋转变换,即用源点云乘以第三步中的旋转矩阵 \mathbf{R} 。至此,点云基本重合,粗配准结束。

3 基于改进 ICP 算法的精确配准

经过粗配准后的源点云变为 \mathbf{Q}'' ,目标点云仍为 P' ,两片点云已大致重合,但是其精度仍然很难满足要求,所以需要进行精确配准。将粗配准的结果作为 ICP 算法的初始参数。在传统迭代配准过程中,需要寻找两片点云中欧氏距离最为接近的两个点,最直接的方法就是利用遍历搜寻法计算某数据点与另一点云中每个数据点的欧氏距离。一是容易造成错配最近点而出现迭代不收敛的情况,二是在点云数据量很大的情况下,时间代价很大。针对这

种情况,本文采用三角网剖分事先对点云数据建立拓扑关系,缩小最近点搜索范围,提高算法效率。

3.1 加速搜索算法

在搜索最近点时,先对点云数据进行 Delaunay 三角网剖分,得到一组单纯形,其中每个单纯形对应点云数据集中的 4 个点,对于粗配准后的源点云 Q'' 中的一点 q_i'' ,要搜寻在目标点云 P' 中的对应最近点,设 q_i'' 的初始最近点为 p_1' ,先求出该点到包含 p_1' 的单纯形 (p_1', p_2', p_3', p_4') 各点的距离,若 q_i'' 到 p_1' 的距离大于 q_i'' 到 p_2' 的距离,则在包含 p_2' 的单纯形里面继续搜索,直到找到 q_i'' 在目标点云中的最近点。这样利用数据点之间的拓扑结构来搜索最近点可以避免直接点对点的计算,能有效加快迭代效率。

3.2 精配准算法步骤

使用基于 Delaunay 的 ICP 算法实现精确配准,具体步骤如下:

1) 设定迭代终止阈值 ϵ ;

2) 为目标点云 P' 建立 Delaunay 三角剖分,以此快速搜索源点云 Q'' 中的最近点,形成 (p_i, q_i) 最近点对;

3) 利用 SVD 法求解最近点对 (p_i, q_i) 相应的旋转矩阵 \mathbf{R}_k 和平移矩阵 \mathbf{T}_k ,并设迭代误差为

$$d_{k+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|p_i - (\mathbf{R}_{k+1}q_i + \mathbf{T}_{k+1})\|^2; \quad (15)$$

4) 将步骤 3) 中的配准参数应用于源点云 Q'' ,计算 $Q''_{k+1} = \mathbf{R}_k Q''_k + \mathbf{T}_k$;

5) 检查步骤 3) 中的两次迭代误差,若 $d_k - d_{k+1} < \epsilon$,则终止迭代,否则转向步骤 2) 继续执行。

4 配准实例与分析

为了验证本文方法的有效性,采用几组点云数

据在实验平台 Intel core CPU、4 GB 内存的计算机上使用 Matlab 对算法进行编程,分为两种情况进行检验:经典例子配准和现场扫描数据配准。

本文经典数据来自于斯坦福大学计算机图形研究组的 Bunny 和 Dragon 多视角数据样本^[5],现场扫描数据利用常州大学 Creafom HandySCAN 700 三维激光扫描仪获取的零件模型数据和实验扫描的牛奶 & 清洁剂点云数据。四组待配准点云的初始位置都是任意的,且重叠比例未知,其中,第 4 个点云是带颜色信息的数据。限于篇幅,每个模型中任意选取两组数据进行配准实验。

4.1 经典例子配准

当两组点云数据量相差较大时(至少相差 5% 的数据点),需要在本文初始配准算法的基础上结合 ICP 迭代算法进行精确配准。图 2 为 Bunny 数据配准结果图。图 2(a) 为配准前的源点云(砖红色)和目标点云(蓝色),分别包含 33947 和 35577 个点。图 2(b) 和 (d) 分别为文献[26]初始配准算法和本文初始配准算法的效果图。由图 2 可以看出,两组点云已初步匹配,仅有边缘处略有些不对整,本文算法初始配准结果优于文献[26]算法结果。再将粗配准结果作为 ICP 算法的初始位置,得出图 2(c) 和 (e) 的精确配准结果。图 3 为 Dragon 数据配准结果图,砖红色源点云包含个 54680 点,蓝色目标点云包含 58213 个点,可以看出,本文算法配准效果最佳,文献[26]算法配准效果次之,经典 ICP 算法配准效果略差。由图 3 可知,先使用粗配准再使用精配准可以提高配准精度,也可以保证迭代不会陷入局部最优,效果良好。表 1 列出了经典 ICP 算法、文献算法[26]和本文初始加精配准算法的配准时间和配准误差。

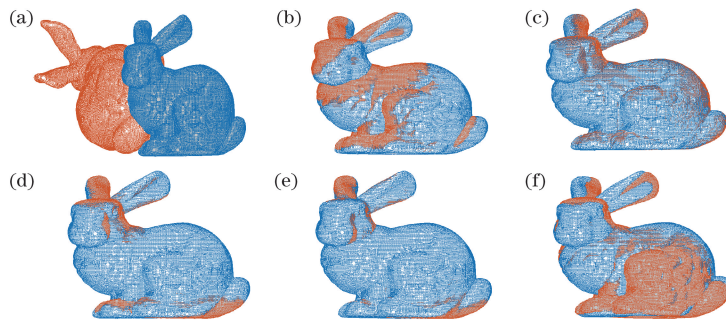


图 2 Bunny 配准图。(a)初始点云;(b)文献[26]算法初始配准;(c)文献[26]算法精确配准;

(d)本文算法初始配准;(e)本文算法精确配准;(f)经典 ICP 算法直接配准

Fig. 2 Registration results of Bunny. (a) Original point cloud; (b) initial registration by algorithm in Ref. [26];

(c) precise registration by algorithm in Ref. [26]; (d) initial registration by proposed algorithm;

(e) precise registration by proposed algorithm; (f) registration by classic ICP algorithm

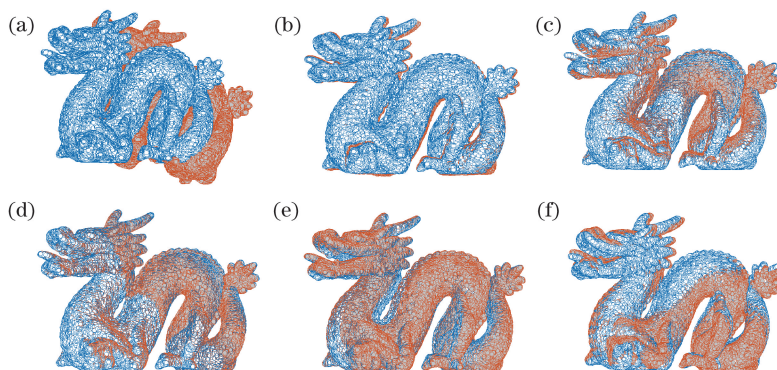


图 3 Dragon 配准图。(a)初始点云;(b)文献[26]算法初始配准;(c)文献[26]算法精确配准;
(d)本文算法初始配准;(e)本文算法精确配准;(f)经典 ICP 算法直接配准

Fig. 3 Registration results of Dragon. (a) Original point cloud; (b) initial registration by algorithm in Ref. [26];
(c) precise registration by algorithm in Ref. [26]; (d) initial registration by the proposed algorithm;
(e) precise registration by proposed algorithm; (f) registration by classic ICP algorithm

表 1 点云配准数据比较

Table 1 Point cloud registration data comparison

Algorithm	t/s		MSE/mm	
	Bunny	Dragon	Bunny	Dragon
Classic ICP algorithm	58.65	73.22	0.27	3.83
Algorithm in Ref. [26]	41.16	49.60	0.082	0.15
Proposed algorithm	16.71	13.35	0.029	0.087

由表 1 可知,对于 Bunny 点云数据,本文算法相比经典 ICP 算法和基于特征提取的算法^[26],配准效率分别提高了 72%、59%,配准精度分别提高了约 8 倍和 2 倍;对于 Dragon 点云数据,本文算法相比经典 ICP 算法和基于特征提取的算法^[26],收敛速度分别提高了 82%、73%,配准均方误差(MSE)分别减小 3.74 mm 和 0.063 mm。可见,本文算法不

仅减少了配准时间,还提高了配准精度。

4.2 实际数据配准

为了验证本文算法在实际应用中的可行性和可靠性,采用现场扫描的数据进行仿真验证。图 4 为常州大学激光扫描仪从不同角度采集到的某零件图,采用 MeshLab 软件绘制而成。取其中任意两幅扫描数据进行配准,并与经典 ICP 算法、文献[26]算法进行对比,结果如图 5 所示。图 5(a)是待配准的扫描点云,其中蓝色为目标点云,记为 p ,砖红色的为源点云,记为 q 。图 5(a)经过文献[26]初始算法、本文初始算法配准后成为图 5(b)、(d)。本文初始配准算法平均只需 0.372 s 即可完成粗配准,且效果良好。图 5(c)、(e)、(f)分别对应的本文精确配准、文献[17]精确配准和经典 ICP 配准结果。具体的配准时间和精度如表 2 所示。

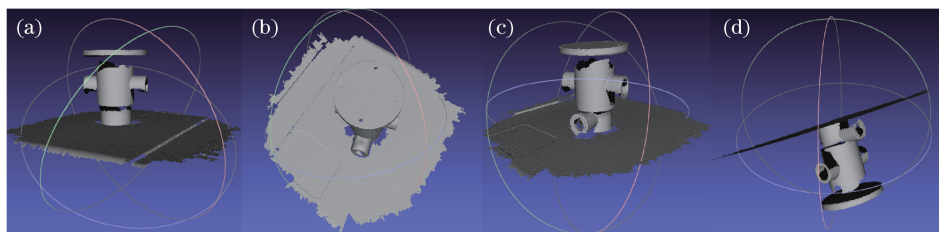


图 4 零件模型多个视角的三维点云数据

Fig. 4 Multi-view 3D point cloud data of part model

由表 2 可以看出,目标点云和源点云的点数分别为 74537 和 78581。本文算法在配准时间上分别比文献[26]算法和经典 ICP 算法减少了 48.83 s 和 78.65 s, MSE 分别减少了 67% 和 94%。

图 6 为带颜色信息的点云配准,点数差距较大,分别为 88723 和 96433。其中图 6(b)是采用本文算法配准后的结果,可以看出,红色瓶子处略有偏差,

经过精确配准后得到图 6(c),能够达到配准的实际要求。经典例子和现场扫描数据配准效果和对比较数据可充分说明本文算法的优良性能。

5 结 论

点云配准是逆向工程、机器视觉^[28]方面的重要基础。在激光扫描采集数据的时候,收集的数据点

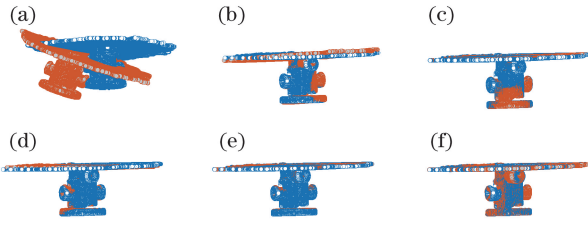


图 5 零件配准图。(a)初始点云;(b)文献[26]算法初始配准;(c)文献[26]算法精确配准;(d)本文算法初始配准;(e)本文算法精确配准;(f)经典 ICP 算法直接配准

Fig. 5 Registration results of part. (a) Original point cloud; (b) initial registration by algorithm in Ref. [26]; (c) precise registration by algorithm in Ref. [26]; (d) initial registration by proposed algorithm; (e) precise registration by proposed algorithm; (f) registration by classic ICP algorithm

表 2 点云配准数据比较

Table 2 Point cloud registration data comparison

Algorithm	Point number of p, q	t / s	MSE /mm
Classic ICP algorithm		102.39	2.593
Algorithm in Ref. [26]	74537 78581	72.57	0.452
Proposed algorithm		23.74	0.148

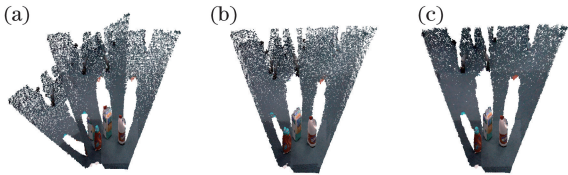


图 6 牛奶 & 清洁剂配准图。(a)初始点云;(b)本文算法初始配准;(c)本文算法精确配准

Fig. 6 Registration result of milk & cleanser. (a) Original point cloud; (b) initial registration by proposed algorithm; (c) precise registration by proposed algorithm

可能是散乱的,针对散乱点云提出一种基于 l^p 空间力学模型的配准算法。本文算法能够在没有任何先验信息的情况下对部分重叠的两组点云数据实现自动配准。首先,根据力学模型寻找两组点云对应的特征向量,通过计算获得最优变换参数,以此进行初始配准;然后,运用改进 ICP 算法进行二次配准。经典例子和现场扫描数据的实验结果充分表明本文算法可行且有效。在点数不同且初始位置相差较大的情况下,本文粗配准算法收敛速度稳定在 0.5 s 内,效果良好,稳健性强。与其他算法相比,本文粗配准+ICP算法耗时更短,配准精度至少提高 1 倍,实用价值高。由于本文算法需要利用欧氏距离作为统计特征,因此若物体过于接近对称,则特征向量矩

阵会接近奇异,初始配准效果会略差一些。

附 录

(16)式是源点云 Q' 对应的 3×3 特征向量矩阵。因为 F_3 向量是 F_1 和 F_2 构成平面的法向量,所以 F_3 与 F_1, F_2 两向量线性无关。若要证明下列矩阵线性无关,只须证明 F_1 和 F_2 不相关即可。

$$F_Q = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r'(i)^2} e_{oq'_i} \\ \sum_{i=1}^n r'(i) e_{oq'_i} \\ \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{r'(i)^2} e_{oq'_i} \right] \times \left[\sum_{i=1}^n r'(i) e_{oq'_i} \right] \end{bmatrix}, \quad (16)$$

式中 $e_{oq'_i} = \frac{oq'_i}{\|oq'_i\|_2}$, $oq'_i = \{oq'_{xi}, oq'_{yi}, oq'_{zi}\}$, $r'(i) = \|oq'_i\|_2$ 。记 $\alpha_i = oq'_i$, $\alpha_i \in \mathbf{R}^3$ 。要证 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\|\alpha_i\|_2^3} \alpha_i$ 与 $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ 线性无关,此处用反证法证明。设两向量相关,即存在 $\lambda \neq 0$,使得下式成立:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\|\alpha_i\|_2^3} \alpha_i = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad (17)$$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 中至少有三个向量线性无关,假设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,那么存在 $\beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, \beta_3^{(i)}$ 使得(17)式成立:

$$\alpha_i = \beta_1^{(i)} \alpha_1 + \beta_2^{(i)} \alpha_2 + \beta_3^{(i)} \alpha_3. \quad (18)$$

将(18)式代入(17)式:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\|\alpha_i\|_2^3} [\beta_1^{(i)} \alpha_1 + \beta_2^{(i)} \alpha_2 + \beta_3^{(i)} \alpha_3] = \lambda \sum_{i=1}^n [\beta_1^{(i)} \alpha_1 + \beta_2^{(i)} \alpha_2 + \beta_3^{(i)} \alpha_3]. \quad (19)$$

(19)式可拆为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\|\alpha_i\|_2^3} [\beta_1^{(i)} \alpha_1] = \lambda \sum_{i=1}^n [\beta_1^{(i)} \alpha_1] \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\|\alpha_i\|_2^3} [\beta_2^{(i)} \alpha_2] = \lambda \sum_{i=1}^n [\beta_2^{(i)} \alpha_2], \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\|\alpha_i\|_2^3} [\beta_3^{(i)} \alpha_3] = \lambda \sum_{i=1}^n [\beta_3^{(i)} \alpha_3] \end{cases} \quad (20)$$

当且仅当下式成立时,

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_1^{(i)}}{\sum_{i=1}^n \frac{\beta_1^{(i)}}{\|\alpha_i\|_2^3}} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_2^{(i)}}{\sum_{i=1}^n \frac{\beta_2^{(i)}}{\|\alpha_i\|_2^3}} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_3^{(i)}}{\sum_{i=1}^n \frac{\beta_3^{(i)}}{\|\alpha_i\|_2^3}}, \quad (21)$$

才能求出满足(17)式的 λ 。当 $\beta_1^{(i)} = \beta_2^{(i)} = \beta_3^{(i)}$ 或者 $\beta_1^{(i)}$ 、 $\beta_2^{(i)}$ 、 $\beta_3^{(i)}$ 成比例时,(21)式肯定成立,但是在这种情况下,所有点都在三维空间的一条直线上,显然这是不可能存在的。在其他情况下,(21)式很难成立,可认为几乎不存在满足式(17)的 λ ,与反证假设矛盾,则 F_1 和 F_2 不相关得证。所以源点云 Q' 对应特征向量矩阵线性无关。

参 考 文 献

- [1] Chen M L, Lu W X, Wan Y C, *et al.* Automatic registration of terrestrial point clouds without additional information[J]. Chinese Journal of Lasers, 2016, 43(4): 0414003.
陈茂霖, 卢维欣, 万幼川, 等. 无附加信息的地面激光点云自动拼接方法[J]. 中国激光, 2016, 43(4): 0414003.
- [2] Xiao Y, Hu S X, Xiao S, *et al.* A fast statistical method of tree information from 3D laser point clouds[J]. Chinese Journal of Lasers, 2018, 45(5): 0510007.
肖杨, 胡少兴, 肖深, 等. 从三维激光点云中快速统计树木信息的方法[J]. 中国激光, 2018, 45(5): 0510007.
- [3] Lü J Z, Da F P, Zheng D L. Projector defocusing profilometry based on Sierra Lite dithering algorithm[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(3): 0312004.
吕江昭, 达飞鹏, 郑东亮. 基于 Sierra Lite 抖动算法的散焦投影光栅测量[J]. 光学学报, 2014, 34(3): 0312004.
- [4] An D, Gai S Y, Da F P. A new model of three-dimensional shape measurement system based on fringe projection[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(5): 0512004.
安冬, 盖绍彦, 达飞鹏. 一种新的基于条纹投影的三维轮廓测量系统模型[J]. 光学学报, 2014, 34(5): 0512004.
- [5] Li Z, Pan X Z, Dong F M, *et al.* Robust point cloud registration algorithm for Taylor series criterion function[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2017, 29(4): 784-790.
李准, 潘幸子, 董方敏, 等. 泰勒级数准则函数鲁棒性点云配准算法[J]. 计算机辅助设计与图形学报, 2017, 29(4): 784-790.
- [6] Ni D J, Song A G, Xu X N, *et al.* 3D-point-cloud registration and real-world dynamics modeling-based virtual environment building method for teleoperation[J]. Robotica, 2017, 35(10): 1958-1974.
- [7] Cheng X, Li Z W, Zhong K, *et al.* An automatic and robust point cloud registration framework based on view-invariant local feature descriptors and transformation consistency verification[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2017, 98: 37-45.
- [8] Nguyen T T, Liu X G, Wang H P, *et al.* 3D model reconstruction based on laser scanning technique[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2011, 48(8): 081201.
Nguyen Tien Thanh, 刘修国, 王红平, 等. 基于激光扫描技术的三维模型重建[J]. 激光与光电子学进展, 2011, 48(8): 081201.
- [9] Lu J, Peng Z T, Xia G H. Point cloud registration algorithm based on neighborhood features of multi-scale normal vectors[J]. Journal of Optoelectronics-Laser, 2015, 26(4): 780-787.
陆军, 彭仲涛, 夏桂华. 点云多法向量邻域特征配准算法[J]. 光电子·激光, 2015, 26(4): 780-787.
- [10] Choi S, Zhou Q Y, Koltun V. Robust reconstruction of indoor scenes[C]//IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2015: 5556-5565.
- [11] Ji S J, Ren Y C, Ji Z, *et al.* An improved method for registration of point cloud[J]. Optik, 2017, 140: 451-458.
- [12] Guo Y L, Bennamoun M, Sohel F, *et al.* A comprehensive performance evaluation of 3D local feature descriptors[J]. International Journal of Computer Vision, 2016, 116(1): 66-89.
- [13] Wilkowski A, Stefańczyk M. Detection and recognition of compound 3D models by hypothesis generation[M]. Warsaw: Springer, 2016: 659-668.
- [14] Chen K, Zhang D, Zhang Y S. Point cloud data processing method of cavity 3D laser scanner[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(8): 0812003.
陈凯, 张达, 张元生. 采空区三维激光扫描点云数据处理方法[J]. 光学学报, 2013, 33(8): 0812003.
- [15] Cheng X, He B W. A fast global registration algorithm based on correcting point cloud principal component coordinate system[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2018, 55(6): 061003.
陈旭, 何炳蔚. 一种基于校正点云主成分坐标系的快速全局配准算法[J]. 激光与光电子学进展, 2018, 55(6): 061003.
- [16] Liu J, Zhu J, Yang J, *et al.* Three-dimensional point cloud registration based on ICP algorithm employing KD tree optimization[C]//Eighth International Conference on Digital Image Processing, 2016, 10033: 100334D.
- [17] He Y, Liang B, Yang J, *et al.* An iterative closest points algorithm for registration of 3D laser scanner point clouds with geometric features[J]. Sensors, 2017, 17(8): 1862.
- [18] Besl P J, McKay N D. A method for registration of 3-D shapes[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(2): 239-256.

- [19] Rusu R B, Blodow N, Marton Z C, *et al.* Aligning point cloud views using persistent feature histograms[C]// IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2008: 3384-3391.
- [20] Huang G, Li X F. Fully automatic point cloud registration algorithm based on CEGI and Fourier transformation[J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2014, 46(5): 104-109.
黄戈, 李晓峰. 基于 CEGI 和 Fourier 变换的全自动点云配准算法[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2014, 46(5): 104-109.
- [21] Lu Z P, Zheng H, Sha C F, *et al.* Point cloud registration algorithm based on free-form surface[J]. Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition), 2015, 36(3): 319-323.
卢章平, 郑航, 沙春发, 等. 基于自由曲面的点云配准算法[J]. 江苏大学学报(自然科学版), 2015, 36(3): 319-323.
- [22] Luo N, Wang Q. Optimized initial aligning algorithm for point cloud registration[J]. Journal of Xidian University(Natural Science), 2017, 44(5): 69-74.
罗楠, 王泉. 点云配准中初始变换的快速优化求解算法[J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版), 2017, 44(5): 69-74.
- [23] Li C L, Guo B Y, Ji Z. Global optimization and whole registration algorithm of multi-view 3D laser point cloud[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2015, 44(2): 183-189.
李彩林, 郭宝云, 季铮. 多视角三维激光点云全局优化整体配准算法[J]. 测绘学报, 2015, 44(2): 183-189.
- [24] Liu J, Zhang X, Zhu J W. ICP three-dimensional point cloud registration based on K-D tree optimization[J]. Engineering of Surveying and Mapping, 2016, 25(6): 15-18.
刘江, 张旭, 朱继文. 一种基于 K-D 树优化的 ICP 三维点云配准方法[J]. 测绘工程, 2016, 25(6): 15-18.
- [25] Wang YJ, Lian T F, Wu M M, *et al.* Point cloud registration based on octree and KD-tree index[J]. Engineering of Surveying and Mapping, 2017, 26(8): 35-40.
王育坚, 廉腾飞, 吴明明, 等. 基于八叉树与 KD 树索引的点云配准方法[J]. 测绘工程, 2017, 26(8): 35-40.
- [26] Huang Y, Da F P, Tao H J. An automatic registration algorithm for point cloud based on feature extraction[J]. Chinese Journal of Lasers, 2015, 42(3): 0308002.
黄源, 达飞鹏, 陶海跻. 一种基于特征提取的点云自动配准算法[J]. 中国激光, 2015, 42(3): 0308002.
- [27] Newton I. Philosophiae naturalis principia mathematica[M]. Zhao Z J, Transl. 3rd ed. Beijing: The Commercial Press, 2006: 205-237.
牛顿. 自然哲学的数学原理[M]. 赵振江, 译. 3 版. 北京: 商务印书馆, 2006: 205-237.
- [28] Shu C X, He Y T, Sun Q K. Point cloud registration based on convolutional neural network[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(3): 031001.
舒程珣, 何云涛, 孙庆科. 基于卷积神经网络的点云配准方法[J]. 激光与光电子进展, 2017, 54(3): 031001.