

双腔光纤耦合系统中的纠缠特性

卢道明

武夷学院机电工程学院, 福建 武夷山 354300

摘要 采用负本征值描述两个子系统间的纠缠,研究了光纤耦合腔模型中每个腔囚禁原子系综的情况下,两腔场间和腔场与原子系综间的纠缠特性。讨论了原子系综所含的原子数以及光纤模与腔模间耦合系数对纠缠特性的影响。研究表明,随着原子数的增大,两腔场间纠缠以及腔场与原子系综间纠缠的拉比振荡频率都增大;随着光纤模与腔模间耦合系数的增大,两腔场间纠缠和腔场与原子系综间的纠缠都增强。

关键词 量子光学; 光纤耦合腔系统; 负本征值; 原子系综; 量子纠缠

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201737.0727001

Entanglement Characteristics in Fiber-Coupled Two-Cavity Systems

Lu Daoming

College of Mechanical and Electrical Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China

Abstract By employing the negative eigenvalue to describe the entanglement between two systems, the entanglement characteristics between the two cavities and between the cavity and the atomic ensemble in the fiber-coupled cavity model are studied under the condition that both cavities trap atomic ensembles. The effects of the number of atoms contained in the atomic ensemble and the fiber-cavity coupling coefficient on the entanglement characteristics are discussed. The results show that the Rabi oscillation frequency of the entanglement between the two cavities as well as that between the cavity and the atomic ensemble increases with the increase of the number of atoms. As the fiber-cavity coupling coefficient increases, the entanglement between the two cavities as well as that between the cavity and the atomic ensemble is strengthened.

Key words quantum optics; fiber-coupled cavity system; negative eigenvalue; atomic ensemble; quantum entanglement

OCIS codes 270.2500; 270.5580; 020.5585

1 引 言

量子纠缠是量子信息处理的核心资源,广泛用于量子信息处理和计算任务,如量子密集编码、量子隐形传态和纠缠交换等^[1-3]。有关量子纠缠的研究已有大量报道^[4-7]。Liu 等^[4]研究了二项式光场与两纠缠原子相互作用系统中原子间的纠缠特性,Wu 等^[5]研究了两运动原子与单模场相互作用系统中原子间的纠缠, Kim 等^[6]讨论了(Jaynes-Cummings)模型中的三体纠缠动力学行为。

自 1997 年 Pellizzari^[8]首次提出利用光纤耦合腔系统构建量子网络以来,因为其腔壁能保护原子和光子组成的系统不受外界环境的影响,且其中的光纤提供了传送光信息的理想通道,所以光纤耦合腔系统引起了人们的高度重视,被认为是实现大规模量子网络和分布式量子计算的基础。关于耦合腔系统已有许多研究报告^[9-17]。Zheng 等^[9]提出了一种利用耦合腔系统产生双模压缩态的方案。Peng 等^[10]提出了利用原子与耦合腔相互作用制备原子纠缠态的方法。Zheng 等^[11]设计了一种利用耦合腔系统产生纠缠和量子态转换的方案。初期研究大多数仅讨论每个腔囚禁一个或两个原子的情况,随着研究的深入,研究者们发现,以含有大量相同原子的量子系综作为单量子比特,可为量子信息学的应用提供一条新的途径。因此,近年来研究

收稿日期: 2017-01-03; **收到修改稿日期:** 2017-03-20

基金项目: 福建省自然科学基金(2015J01020)

作者简介: 卢道明(1963—),男,硕士,教授,主要从事量子光学方面的研究。E-mail: daominglu79@hotmail.com

者们开展了关于每个腔囚禁原子系综情况的研究^[18-20]。Zheng^[18]研究了由一个控制原子和原子系综构成的系统的动力学行为。Han 等^[19]提出了产生三原子系综 GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger) 纠缠态的方案。但在囚禁原子系综情况下,有关耦合腔系统中纠缠特性的研究鲜有报道。为此,本文开展了在每个腔囚禁原子系综的情况下耦合腔系统中纠缠特性的研究。

2 双腔耦合系统及其态矢演化

双耦合光学腔模型如图 1 所示,两光学腔通过光纤耦合,每个腔囚禁含有 N 个全同二能级原子的原子系综。

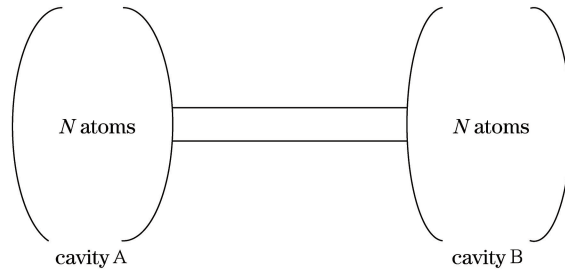


图 1 系统框图

Fig. 1 Block diagram of system

引入腔 l ($l=A, B$) 中原子系综的跃迁算符:

$$J_l^\pm = \sum_{i=1}^N \sigma_i^\pm, \quad (1)$$

式中 $\sigma_i^+ = |e\rangle_i \langle g|$ 和 $\sigma_i^- = |g\rangle_i \langle e|$ 表示第 i 个原子的跃迁算符, $|e\rangle$ ($|g\rangle$) 表示原子的激发态(基态)。

考虑原子与腔场发生共振的情况,在旋波近似下原子和腔场体系相互作用的哈密顿量为

$$H_{ac} = \sum_{l=A, B} g_l (J_l^+ a_l^- + \text{H.C.}), \quad (2)$$

式中 g_l 为原子与腔场间的耦合系数, a_l^+ (a_l^-) 表示腔场的产生(湮没)算符, H.C 表示厄密共轭项。为简单起见,设 $g_A = g_B = g$ 。

在短光纤条件下,腔模与光纤模间相互作用的哈密顿量^[9]为

$$H_{cf} = f[b(a_A^+ + a_B^+) + \text{H.C.}], \quad (3)$$

式中 b 表示光纤模, f 为腔模与光纤模间的耦合系数,则在相互作用绘景中整个系统的哈密顿量为

$$H = H_{ac} + H_{cf}. \quad (4)$$

考虑系统激发数等于 1 的情况,系统将在如下基矢构成的子空间中演化:

$$\begin{cases} |\varphi_1\rangle = |0, N\rangle_A |1, N-1\rangle_B |00\rangle_c |0\rangle_f \\ |\varphi_2\rangle = |1, N-1\rangle_A |0, N\rangle_B |00\rangle_c |0\rangle_f \\ |\varphi_3\rangle = |0, N\rangle_A |0, N\rangle_B |00\rangle_c |1\rangle_f \\ |\varphi_4\rangle = |0, N\rangle_A |0, N\rangle_B |01\rangle_c |0\rangle_f \\ |\varphi_5\rangle = |0, N\rangle_A |0, N\rangle_B |10\rangle_c |0\rangle_f \end{cases}, \quad (5)$$

式中下标 A, B, c 和 f 分别表示腔 A, 腔 B, 腔场和光纤模, $|0, N\rangle$ 表示所有原子处于基态, $|1, N-1\rangle$ 表示只有一个原子处于激发态, $|i\rangle$ 表示有 i 个光子的 Fock 态。那么, t 时刻系统的态矢可表示为

$$|\varphi(t)\rangle = C|\varphi_1\rangle + D|\varphi_2\rangle + E|\varphi_3\rangle + F|\varphi_4\rangle + G|\varphi_5\rangle, \quad (6)$$

式中 C, D, E, F, G 为随时间变化的展开系数。

设系统初态为 $|\varphi_2\rangle$ 态,通过解薛定谔方程,并利用初始条件 $D(0)=1, C(0)=E(0)=F(0)=G(0)=0$, 求得

$$\begin{cases} C = \frac{\alpha^2}{1+2\alpha^2} - \frac{1}{2}\cos(g\sqrt{N}t) + \frac{1}{2(1+2\alpha^2)}\cos(\beta t) \\ D = \frac{\alpha^2}{1+2\alpha^2} + \frac{1}{2}\cos(g\sqrt{N}t) + \frac{1}{2(1+2\alpha^2)}\cos(\beta t) \\ E = \frac{\alpha}{1+2\alpha^2}[\cos(\beta t) - 1] \\ F = \frac{i}{2}\sin(g\sqrt{N}t) - \frac{i}{2\sqrt{1+2\alpha^2}}\sin(\beta t) \\ G = -\frac{i}{2}\sin(g\sqrt{N}t) - \frac{i}{2\sqrt{1+2\alpha^2}}\sin(\beta t) \end{cases}, \quad (7)$$

式中

$$\alpha = \frac{f}{g\sqrt{N}}, \quad \beta = g\sqrt{N(1+2\alpha^2)}. \quad (8)$$

3 腔场间纠缠的演化

关于两子系统间的纠缠,已有成熟的度量方法,如采用纠缠相对熵、负本征值和共生纠缠度等。这里,采用负本征值方法度量两个子系统间的纠缠^[21],即若描述两个子系统状态的密度矩阵为 ρ ,纠缠可用其部分转置矩阵 ρ^T 的负本征值来定义

$$N' = -2 \sum_i u_i, \quad (9)$$

式中 u_i 为 ρ^T 的负本征值。 N' 等于 0 和 1 分别表示两子系统处于分离和最大纠缠态;而 $0 < N' < 1$ 表示两子系统是纠缠的。

以 $|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle$ 为基矢,利用(6)式,对原子和光纤模求迹,求得描述两腔场子系统的密度矩阵为

$$\rho_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |G|^2 & G^*F & 0 \\ 0 & FG^* & |F|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |E|^2 + |C|^2 + |D|^2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

通过计算不难求得两腔场间的纠缠量为

$$N_c = \sqrt{(|E|^2 + |C|^2 + |D|^2)^2 + 4|GF|^2} - (|E|^2 + |C|^2 + |D|^2). \quad (11)$$

3.1 原子数对两腔场间纠缠的影响

为了讨论每个腔中囚禁的原子数对两腔场间纠缠的影响,根据(11)式,取 $f = g$,分别取原子数 $N = 2, 5, 10, 15$ 时, N_c 随规范时间的演化如图 2 所示。可以看到, N_c 随时间作不规则振荡;随囚禁原子数的增大,振荡的拉比频率增大;当原子数大于一定值后,纠缠度 N_c 随时间的演化呈现崩塌和恢复效应。从(11)式可知, N_c 决定于展开系数 C, D, E, F, G 。(7)式表明,这些展开系数是角频率分别为 $g\sqrt{N}$ 和 β 的正弦函数或余弦函数的叠加,而 $g\sqrt{N}$ 和 β 均随着原子数的增大而增大。因此,随着原子数的增大,纠缠度 N_c 振荡的拉比频率增大。

3.2 光纤模与腔模间耦合系数对两腔场间纠缠的影响

为了讨论光纤模与腔模间耦合系数对两腔场间纠缠的影响,同样根据(11)式,取囚禁原子数 $N = 3$,分别取光纤模与腔模间的耦合系数 f 为 $g, 2g, 5g$ 和 $10g$ 时,腔场间纠缠量 N_c 的数值计算结果如图 3 所示。由图 3 可见,随着光纤模与腔模间耦合系数 f 的增大,演化曲线呈现出从不规则振荡向周期性振荡的转变。当 f 大于一定值后, N_c 表现出周期性的演化行为。并且,随光纤模与腔模间耦合系数的增大,曲线重心上

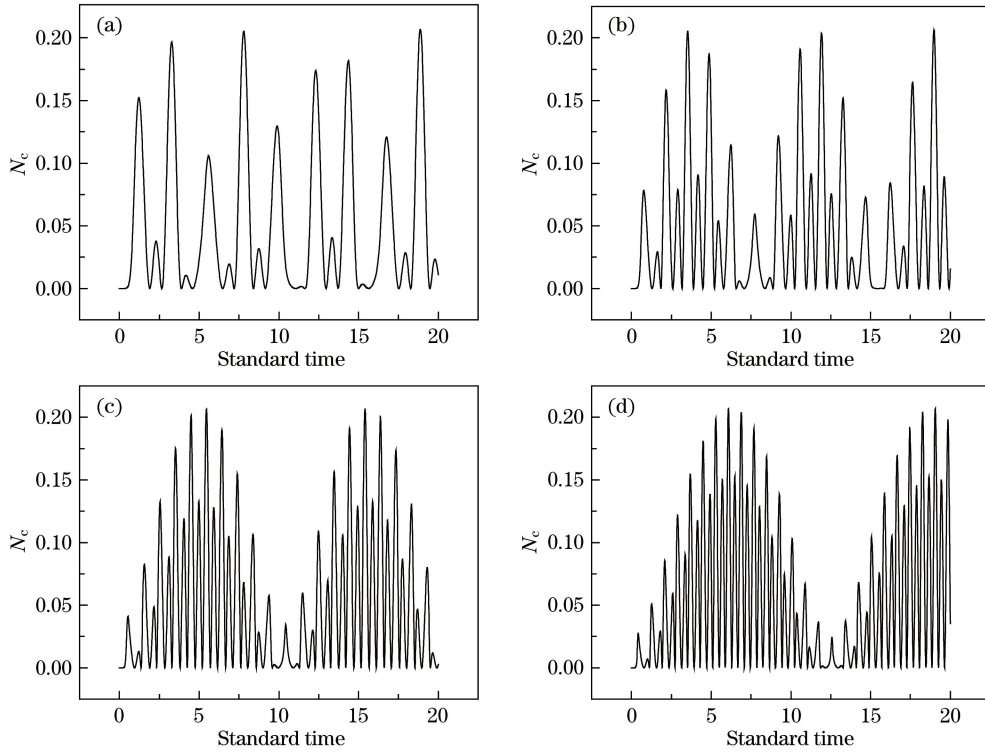


图 2 N_c 随规范时间的演化。(a) $N=2$; (b) $N=5$; (c) $N=10$; (d) $N=15$

Fig. 2 N_c versus standard time. (a) $N=2$; (b) $N=5$; (c) $N=10$; (d) $N=15$

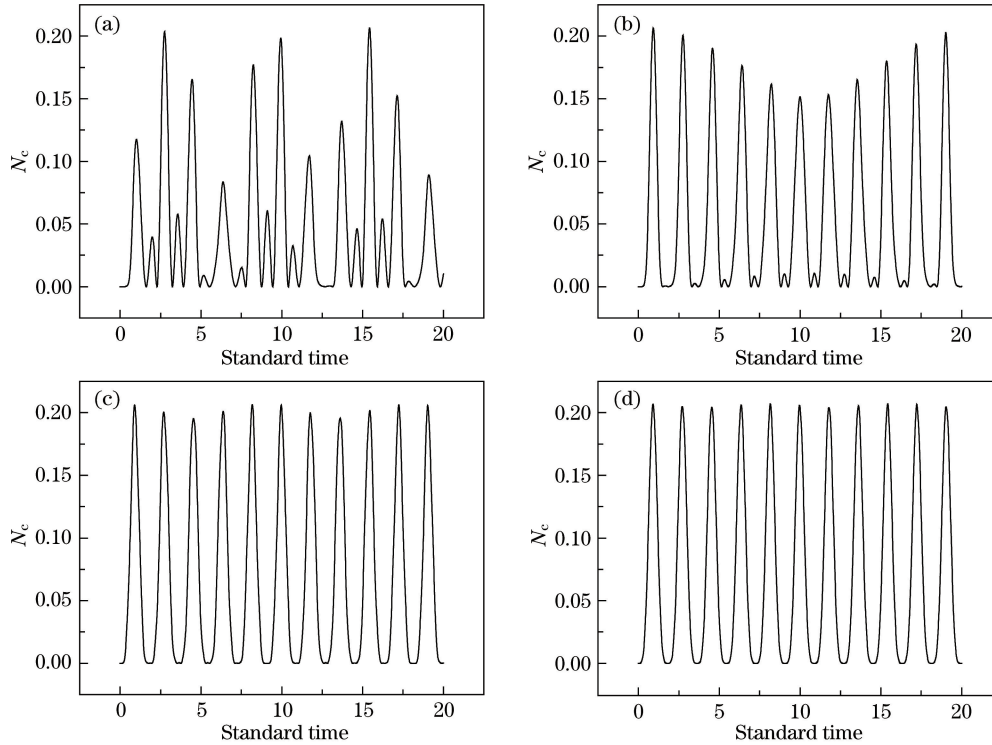


图 3 N_c 随规范时间的演化。(a) $f=g$; (b) $f=2g$; (c) $f=5g$; (d) $f=10g$

Fig. 3 N_c versus standard time. (a) $f=g$; (b) $f=2g$; (c) $f=5g$; (d) $f=10g$

移,平均值增大。数值计算结果为:当 $f=g$ 时,两腔场间纠缠的平均值 $\overline{N_c}=0.04742$;当 $f=2g$ 时, $\overline{N_c}=0.05786$;当 $f=5g$ 时, $\overline{N_c}=0.06867$;当 $f=10g$ 时, $\overline{N_c}=0.07107$ 。可以看出,随着光纤模与腔模间耦合系数的增大,两腔场间的纠缠增强,这是因为两腔场间交换光子的频率增大了。

4 腔场 A 与原子系综间纠缠的演化

与第 3 节一致, 同样采用负本征值度量腔场 A 与本腔中原子系综间的纠缠。利用(6)式, 以 $|1\rangle_c|1, N-1\rangle_A, |1\rangle_c|0, N\rangle_A, |0\rangle_c|1, N-1\rangle_A, |0\rangle_c|0, N\rangle_A$ 为基矢, 可得到由腔 A 和原子系综构成的子系统的密度矩阵为

$$\rho_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |G|^2 & GD^* & 0 \\ 0 & DG^* & |D|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |C|^2 + |E|^2 + |F|^2 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

根据(9)式的定义, 推导出腔场 A 与原子系综间纠缠为

$$N_A = \sqrt{(|C|^2 + |E|^2 + |F|^2)^2 + 4|GD|^2} - (|C|^2 + |E|^2 + |F|^2). \quad (13)$$

4.1 原子数对腔场 A 与原子系综间纠缠的影响

根据(13)式, 同样取 $f=g$, 分别取原子数 $N=2, 5, 10, 15$ 时, N_A 的数值计算结果如图 4 所示。由图可知, N_A 随时间作不规则振荡, 并且出现崩塌和恢复的现象; 随着原子数的增大, 拉比振荡频率增大, 恢复时间延长。

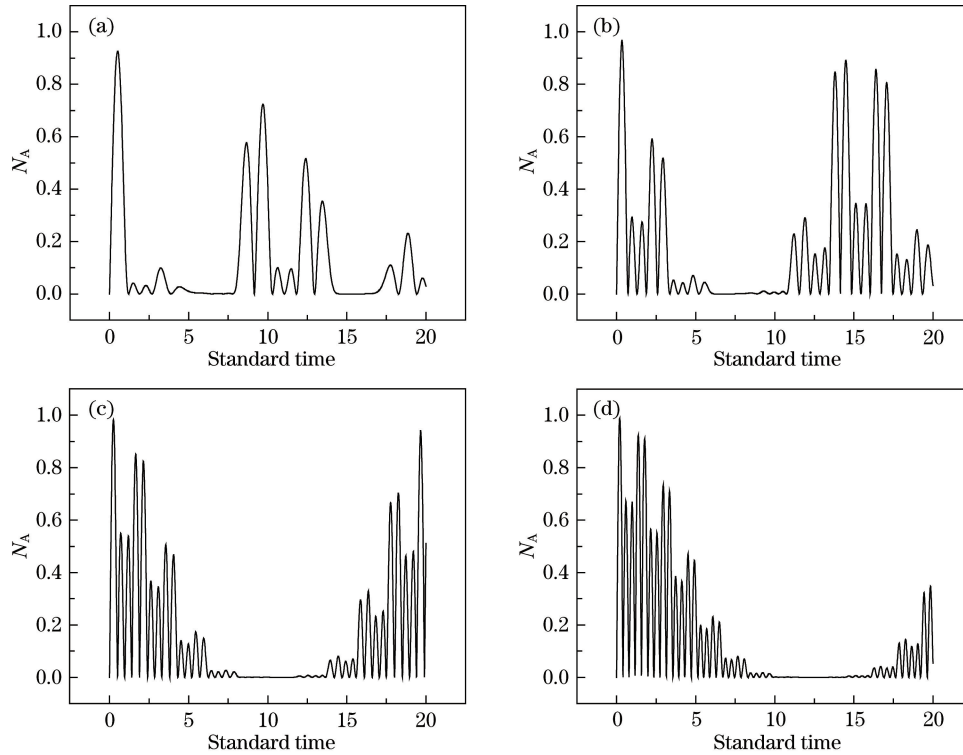


图 4 N_A 随规范时间的演化。(a) $N=2$; (b) $N=5$; (c) $N=10$; (d) $N=15$

Fig. 4 N_A versus standard time. (a) $N=2$; (b) $N=5$; (c) $N=10$; (d) $N=15$

4.2 光纤模与腔模间耦合系数对腔场 A 与原子系综间纠缠的影响

根据(13)式, 同样取囚禁原子数 $N=3$, 分别取耦合系数 f 为 $g, 2g, 5g$ 和 $20g$ 时, 腔场 A 与原子系综间纠缠 N_A 随时间的演化如图 5 所示。由图可知, 当 f 较小时, N_A 的演化呈现崩塌和恢复现象; 随着光纤模与腔模间耦合系数 f 的增大, 演化曲线呈现出从不规则振荡向准周期性振荡的转变, 且曲线重心上移, 平均值增大; 当 f 大于一定值后, N_A 表现出周期性演化行为。数值计算结果为: 当 $f=g$ 时, 平均值 $\bar{N}_A=0.12932$; 当 $f=2g$ 时, $\bar{N}_A=0.15455$; 当 $f=5g$ 时, $\bar{N}_A=0.17566$; 当 $f=20g$ 时, $\bar{N}_A=0.18721$ 。这表明, 随着光纤模与腔模间耦合系数的增大, 腔场 A 与原子系综间的纠缠增强。

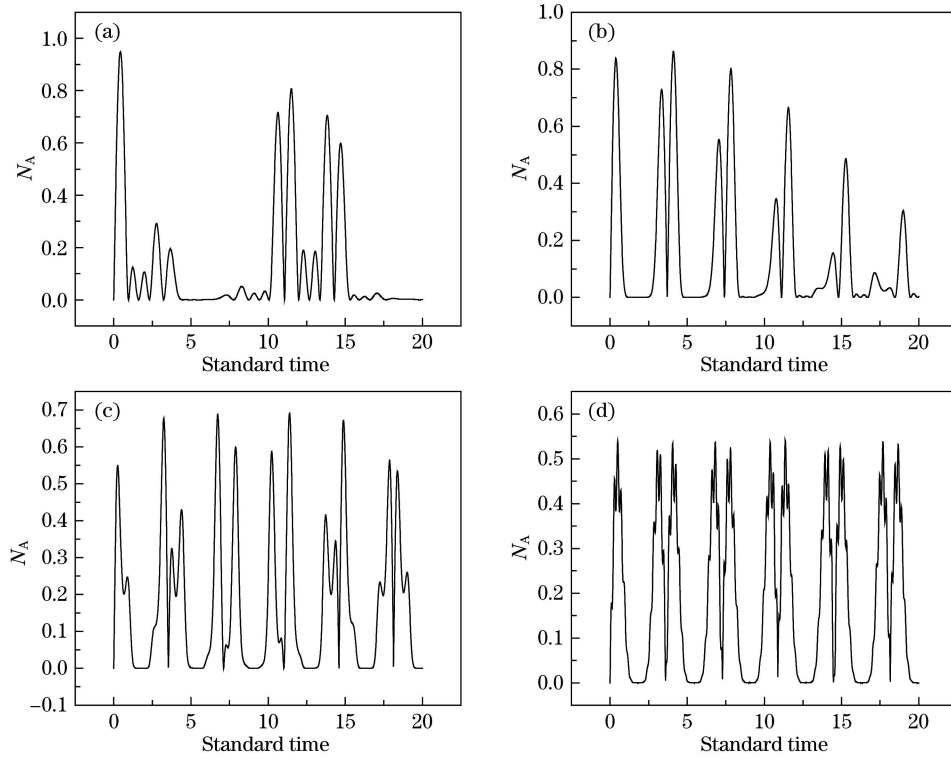


图 5 N_A 随规范时间的演化。(a) $f=g$; (b) $f=2g$; (c) $f=5g$; (d) $f=20g$

Fig. 5 N_A versus standard time. (a) $f=g$; (b) $f=2g$; (c) $f=5g$; (d) $f=20g$

5 结 论

考虑耦合腔模型中每个腔囚禁多个二能级原子的情况,通过解薛定谔方程,导出了系统态矢的演化规律。利用负本征值度量两个子系统间的纠缠,研究了该系统的纠缠特性,讨论了腔中囚禁原子数以及光纤模与腔模间耦合系数对纠缠特性的影响。数值计算结果表明:随着原子数的增大,两腔场间纠缠以及腔场与原子系综间纠缠的拉比振荡频率都增大;随着光纤模与腔模间耦合系数的增大,两腔场间纠缠和腔场 A 与原子系综间的纠缠增强。

参 考 文 献

- [1] Bennett C H, Wiesner S J. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states[J]. Physical Review Letters, 1992, 69(20): 2881-2884.
- [2] Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, *et al.* Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. Physical Review Letters, 1993, 70(13): 1895-1899.
- [3] Abdi M, Pirandola S, Tombesi P, *et al.* Entanglement swapping with local certification: Application to remote micromechanical resonators[J]. Physical Review Letters, 2012, 109(14): 143601.
- [4] Liu T K, Zhang K L, Tao Y, *et al.* Entanglement properties between two atoms in the binomial optical field interacting with two entangled atoms[J]. Chinese Physics B, 2016, 25(7): 070304.
- [5] Wu C, Fang M F. The entanglement of two moving atoms interacting with a single-mode field via a three-photon process[J]. Chinese Physics B, 2010, 19(2): 020309.
- [6] Kim K I, Li H M, Zhao B K. Genuine tripartite entanglement dynamics and transfer in a triple Jaynes-Cummings model[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2016, 55(1): 241-254.
- [7] Yang Xiuli, Sun Tong, Zhang Bo, *et al.* Classical-field-assisted three-atom quantum entanglement dynamics[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(12): 1227001.
- 杨秀丽, 孙 童, 张 博, 等. 经典场辅助下的三原子量子纠缠动力学[J]. 光学学报, 2016, 36(12): 1227001.
- [8] Pellizzari T. Quantum networking with optical fibres[J]. Physical Review Letters, 1997, 79(26): 5242.

- [9] Zheng S B, Yang Z B, Xia Y. Generation of two-mode squeezed states for two separated atomic ensembles via coupled cavities[J]. *Physical Review A*, 2010, 81(1): 015804.
- [10] Peng P, Li F L. Entanglement two atoms in spatially separated cavities through both photon emission and absorption processes[J]. *Physical Review A*, 2007, 75(6): 062320.
- [11] Zheng B, Shen L T, Chen M F. Entanglement and quantum state transfer between two atoms trapped in two indirectly coupled cavities[J]. *Quantum Information Process*, 2016, 15: 2181-2191.
- [12] Huang X B, Zhong Z R, Chen Y H. Deterministic generation of a four-atom entangled state in a two-dimensional coupled-cavity system[J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 2016, 55(2): 1192-1200.
- [13] Ogden C D, Irish E K, Kim M S. Dynamics in a coupled-cavity array[J]. *Physical Review A*, 2008, 78(6): 063805.
- [14] Ye S Y, Zhong Z R, Zheng S B. Deterministic generation of three-dimensional entanglement for two atoms separately trapped in two optical cavities[J]. *Physical Review A*, 2008, 77(1): 014303.
- [15] Wu H Z, Yang Z B, Zheng S B. Two-photon absorption and emission by Rydberg atoms in coupled cavities[J]. *Physical Review A*, 2013, 88(4): 043816.
- [16] Peng J, Wu Y W, Li X J. Quantum dynamic behaviour in a coupled cavities system[J]. *Chinese Physics B*, 2012, 21(6): 060302.
- [17] Qiu Changdong, Lu Daoming. Entanglement characteristics in two-dimensional coupled cavity systems[J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36(5): 0527001.
邱昌东, 卢道明. 两维耦合腔系统中的纠缠特性[J]. *光学学报*, 2016, 36(5): 0527001.
- [18] Zheng S B. Jaynes-Cummings model with a collective atomic mode[J]. *Physical Review A*, 2008, 77(4): 045802.
- [19] Han C, Xue P, Guo G C. Multipartite entanglement preparation and quantum communication with atomic ensembles[J]. *Physical Review A*, 2005, 72(3): 034301.
- [20] Duan L M. Entangling many atomic ensembles through laser manipulation[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 88(17): 170402.
- [21] Akhtarshenas S J, Farsi M. Negativity as entanglement degree of the Jaynes-Cummings model[J]. *Physica Scripta*, 2007, 75(5): 608-614.