

# 激光二极管光束在各向异性非柯氏 大气湍流中的传输质量

李 燕, 戚 俊, 陈斐楠\*

中国科学院合肥物质科学研究院应用技术研究所, 安徽 合肥 230088

**摘要** 以厄米-高斯混合模形式描述激光二极管光束的分布, 利用光束二阶项矩阵进行计算, 研究了光束束宽与光束传输因子之间的关系, 并对各向异性大气湍流中广义指数和各向异性系数对光束传输因子的影响进行了分析。结果表明, 对于不同的湍流强度, 均存在不同的束宽使得光束传输因子最小。此外, 大气湍流模型中各向异性系数的增大使得大气湍流对光束传输因子的影响相应减小。通过二维光束质量轨迹图的仿真, 证实了各向异性系数对光束传输因子轨迹的影响将随着传输距离的增大变得更加明显。所得结果将有利于大气光传输理论的发展, 并对大气光通信、激光雷达探测等应用有着重要意义。

**关键词** 大气光学; 各向异性非柯氏湍流; 光束传输因子; 二阶项矩阵

**中图分类号** O436 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/AOS201737.0701003

## Propagation Quality of Laser Diode Beam in Anisotropic Non-Kolmogorov Atmospheric Turbulence

Li Yan, Qi Jun, Chen Feinan

*Institute of Applied Technology, Hefei Institutes of Physical Science, Chinese Academy of Sciences,  
Hefei, Anhui 230088, China*

**Abstract** The distribution of laser diode beam is described in the form of mixed Hermite-Gaussian mode. We study the relationship between beam waist width and beam propagation factor by using the beam second-order term matrix. The influences of generalized exponent and anisotropy coefficient on beam propagation factor are analyzed. Results show that, for different turbulence intensity, there are different beam widths which make the beam propagation factor minimum. In addition, the increasing of anisotropy coefficient of atmospheric turbulence model reduces the influence of atmospheric turbulence on beam propagation factor. Simulation for the two-dimensional beam quality trace illustrates that the influence of anisotropy coefficient on beam propagation factor trace will be more obvious when the propagation distance is increasing. The result may help the development of atmospheric laser beam propagation theory and has important significance in applications of atmospheric optical communication and lidar detection.

**Key words** atmospheric optics; anisotropic non-Kolmogorov turbulence; beam propagation factor; second-order term matrix

**OCIS codes** 010.4450; 010.4455; 010.7060

## 1 引 言

光束质量的计算与分析是研究激光在科研与工业中应用的重要环节, 1990 年 Siegman<sup>[1]</sup> 利用激光光束的空间宽度和角宽度乘积定义了光束传输因子 ( $M^2$  因子), 以定量衡量实际光束质量。随后, Martínez-Herrero 等<sup>[2-3]</sup> 将  $M^2$  因子作为光束二阶项因子中的重要特征参数来计算激光光束在 ABCD 光学系统中的传

**收稿日期:** 2016-12-12; **收到修改稿日期:** 2017-02-09

**基金项目:** 国家自然科学基金(11504383, 11404086)、安徽省自然科学基金(1508085QA23)、中央高校基本科研业务费专项资金(2014HGQC0009)

**作者简介:** 李 燕(1988—), 女, 硕士, 研究实习员, 主要从事光学测量方面的研究。E-mail: liyan@rntek.cas.cn

\* **通信联系人。** E-mail: feinanchen617@rentek.cas.cn

输变化规律。此后,光束调控技术的日益发展使得研究人员对新型光束的光束质量提出了迫切的理论分析与实验论证需求,因此以  $M^2$  因子为中心的光束质量分析受到了国内外学者广泛而深入地关注与研究,例如 Kardorsh<sup>[4]</sup>对垂直腔面发射激光阵列  $M^2$  因子和其他参数进行了研究;吕百达等<sup>[5-6]</sup>对基于  $M^2$  因子的光束质量控制进行了相关理论研究,并对标准厄米-高斯(H-G)光束和复宗量 H-G 光束的  $M^2$  因子进行了分析比较;Amarande<sup>[7]</sup>对平顶光束的  $M^2$  因子和峭度进行了计算分析,并分析比较了不同光束阶数  $N$  所对应的光束质量分布特征。这些工作为光束质量分析提供了理论基础和实验、应用方法指导。

近 10 年,计算机技术的发展为更复杂情况下的光传输参数模拟提供了软、硬件基础,尤其对激光光束在复杂介质中衍射或散射后的光参量变化的模拟分析有重要作用,例如 Anderws 等<sup>[8]</sup>总结了以柯氏大气湍流折射率功率谱为基础的随机介质中光束二阶和四阶统计特性,并且指出其在激光雷达、激光通信以及图像处理等方面的应用。Cai 等<sup>[9-12]</sup>对于多模高斯光束、部分相干光束以及随机电磁光束在大气湍流干扰下的光束传输进行了大量研究。以  $M^2$  因子为基础,研究人员深入讨论了利用光束二阶项矩阵分析光束在介质中传输的计算方法<sup>[13-15]</sup>。H-G 光束作为典型的光束类型受到广泛关注<sup>[16-19]</sup>。此外,对于大气湍流折射率功率谱模型的研究也引起众多研究人员的兴趣。1995 年,Stribling 等<sup>[20]</sup>提出了用非柯氏湍流折射率功率谱描述在实验中与柯氏模型背离的空间折射率波动,并将其应用于大气光传输参数的计算分析<sup>[21-24]</sup>。2011 年, Toselli 等<sup>[21]</sup>提出了各向异性的湍流模型,并分析了广义指数和各向异性参数对折射率波动的影响,为描述大气湍流涡旋的空间分布和运动形式提供了新的思路。2015 年,饶瑞中等<sup>[25]</sup>指出非柯氏大气湍流中的光传播及其对光电工程的影响已成为当前应用光学的研究热点之一。

本文以激光二极管光束为光源<sup>[26]</sup>,分析了各向异性大气湍流中的光束质量变化规律及其与湍流参数间的关联,所得结果将有助于研究人员对大气光学湍流空间分布和运动规律的深入分析,并在大气激光传输的实际应用等方面具有重要意义。

## 2 主要研究内容与结果

### 2.1 激光二极管光束的 $M^2$ 因子计算

半导体激光物理研究表明:激光二极管输出的光波在  $x$  方向(平行于结平面方向)为 H-G 模式,在  $y$  方向(垂直于结平面方向)为波导模式<sup>[26]</sup>。激光二极管运行时,通常出现高阶模式振荡,这时可用 H-G 横电磁( $TEM_{m0}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ )混合模的叠加来模拟光束分布。设  $z = 0$  平面上的  $TEM_{m0}$  模的光场分布  $E_{m0}(x, y, 0)$  和强度分布  $I(x, y, 0)$  为

$$E_{m0}(x, y, 0) = E_m(x, 0)E_0(y, 0), \quad (1)$$

$$I(x, y, 0) = \sum_m C_m |E_m(x, 0)E_0(y, 0)|^2, \quad (2)$$

式中  $C_m$  为  $m$  阶模的权重因子;  $E_m(x, 0)$  和  $E_0(y, 0)$  为两个方向上的光场分量,可以分别表示为

$$E_m(x, 0) = A_m H_m(x\sqrt{2}/\omega_{0x}) \exp(-x^2/\omega_{0x}^2), \quad (3)$$

$$E_0(y, 0) = A_0 \exp(-y^2/\omega_{0y}^2), \quad (4)$$

式中  $H_m$  为厄米多项式,  $A_m = [2/(\pi\omega_{0x}^2)]^{1/4} (2^m m!)^{-1/2}$ ,  $A_0 = [2/(\pi\omega_{0y}^2)]^{1/4}$ ,  $\omega_{0x}$  和  $\omega_{0y}$  分别为基模高斯光束在  $x$ 、 $y$  方向的束腰宽度,  $m$  为激光二极管光束多模运行时的模阶次。当  $m = 0$  时,  $H_0(x) = 1$ ,  $x$  方向的光场变为高斯光束的分布形式。

根据 Siegman 所提的方法,将  $x$  方向的空间二阶矩定义为<sup>[1]</sup>

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int x^2 I(x, y; 0) dx}{\int I(x, y; 0) dx}. \quad (5)$$

根据文献[14-17]可得激光二极管光束在  $z = 0$  处的二阶矩为

$$\langle x^2 \rangle_0 = \left( \frac{\omega_{0x}^2}{4} \right) \sum_m C_m (2m + 1), \quad (6)$$

$$\langle y^2 \rangle_0 = \frac{\omega_{0y}^2}{4}, \quad (7)$$

$$\langle \theta_x^2 \rangle_0 = \left( \frac{1}{k^2 \omega_{0x}^2} \right) \sum_m C_m (2m + 1), \quad (8)$$

$$\langle \theta_y^2 \rangle_0 = \left( \frac{1}{k^2 \omega_{0y}^2} \right), \quad (9)$$

式中  $\langle x^2 \rangle_0$ 、 $\langle y^2 \rangle_0$  分别为  $z=0$  平面上  $x$ 、 $y$  方向的空间二阶矩,  $\langle \theta_x^2 \rangle_0$ 、 $\langle \theta_y^2 \rangle_0$  分别为  $z=0$  平面上  $x$ 、 $y$  方向的空间频率域二阶矩;  $k$  为波数,  $k=2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为波长。

交叉矩可表示为

$$\langle xy \rangle_0 = \langle x\theta_x \rangle_0 = \langle x\theta_y \rangle_0 = \langle y\theta_x \rangle_0 = \langle y\theta_y \rangle_0 = \langle \theta_x\theta_y \rangle_0 = 0. \quad (10)$$

交叉谱密度函数可用于描述光束的二阶属性, 根据激光二极管光束的光场分布可得到光源平面上光束的交叉谱密度函数为

$$W(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; 0) = \langle E(\mathbf{r}'_1, 0)E^*(\mathbf{r}'_2, 0) \rangle_m, \quad (11)$$

式中  $E(\mathbf{r}'_1, 0)$ 、 $E(\mathbf{r}'_2, 0)$  为光场振幅,  $\langle \cdot \rangle_m$  为系综平均,  $E^*(\mathbf{r}'_2, 0)$  为  $E(\mathbf{r}'_2, 0)$  的共轭,  $\mathbf{r}'_1$ 、 $\mathbf{r}'_2$  分别为  $z=0$  平面上任意两点的二维横向矢量。

在近轴条件下, 根据广义惠更斯-菲涅耳原理, 激光二极管光束通过大气湍流在任意传输距离  $z$  处的交叉谱密度为<sup>[8,10]</sup>

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d; z) = \left( \frac{k}{2\pi z} \right)^2 \iint W(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_d; 0) \exp \left\{ \frac{ik}{z} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}'_d) - H(\mathbf{r}_d, \mathbf{r}'_d; z)] \right\} d^2 \mathbf{r}' d^2 \mathbf{r}'_d, \quad (12)$$

式中  $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$  为距离光源面  $z$  处的接收面上任意两点的二维横向矢量;  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ ;  $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ;  $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2)/2$ ;  $\mathbf{r}'_d = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2$ ;  $H(\mathbf{r}_d, \mathbf{r}'_d; z)$  为湍流介质扰动引起的相位起伏, 其表达式为

$$H(\mathbf{r}_d, \mathbf{r}'_d; z) = 4\pi^2 k^2 z \int_0^1 d\xi \int_0^\infty \{1 - J_0[\kappa |\mathbf{r}'_d \xi + (1 - \xi)\mathbf{r}_d|]\} \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa, \quad (13)$$

式中  $J_0$  为零阶贝塞尔函数,  $\Phi_n(\kappa)$  为大气湍流折射率起伏谱函数,  $\kappa$  为与湍流尺度相关的波数,  $\xi$  为归一化距离系数。

Wigner 分布函数(WDF)是  $W(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; z)$  的二维空间傅里叶变换, 适用于处理部分相干光束的传输特性<sup>[3]</sup>, 其表达式为

$$h(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}; z) = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d; z) \exp(-ik\boldsymbol{\theta}\mathbf{r}_d) d^2 \mathbf{r}_d, \quad (14)$$

式中  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y)$ ,  $k\theta_x$  和  $k\theta_y$  分别为波矢沿  $x$ 、 $y$  轴的分量。基于 WDF 的二阶矩定义, 可得到 WDF 的  $s_1 + s_2 + q_1 + q_2$  阶矩为

$$\langle x^{s_1} y^{s_2} \theta_x^{q_1} \theta_y^{q_2} \rangle = \frac{1}{P} \iint x^{s_1} y^{s_2} \theta_x^{q_1} \theta_y^{q_2} h(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}; z) d^2 \mathbf{r} d^2 \boldsymbol{\theta}, \quad (15)$$

式中  $P$  为光束总功率,  $P = \iint h(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}; z) d^2 \mathbf{r} d^2 \boldsymbol{\theta}$ 。当  $s_1 + s_2 + q_1 + q_2 = 2$  时, 根据(2)、(5)、(6)式, 并应用狄拉克函数公式, 可以得到大气湍流中部分相干光束在传输距离  $z$  处全部的二阶矩表达式。根据文献[13-15]的推导可得到  $x$  方向的空间二阶矩  $\langle x^2 \rangle$ 、空间频率域二阶矩  $\langle \theta_x^2 \rangle$  以及混合矩  $\langle x\theta_x \rangle$  分别为

$$\langle x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_0 + 2 \langle x\theta_x \rangle_0 z^2 + \langle \theta_x^2 \rangle_0 z^2 + \frac{2}{3} \pi^2 z^3 \int_0^\infty \Phi_n(\kappa) \kappa^3 d\kappa, \quad (16)$$

$$\langle \theta_x^2 \rangle = \langle \theta_x^2 \rangle_0 + 2\pi^2 z \int_0^\infty \Phi_n(\kappa) \kappa^3 d\kappa, \quad (17)$$

$$\langle x\theta_x \rangle = \langle x\theta_x \rangle_0 + \langle \theta_x^2 \rangle_0 z + \pi^2 z^2 \int_0^\infty \Phi_n(\kappa) \kappa^3 d\kappa. \quad (18)$$

$y$  方向上的空间二阶矩  $\langle y^2 \rangle$ 、空间频率域二阶矩  $\langle \theta_y^2 \rangle$  以及混合矩  $\langle y\theta_y \rangle$  的表达式与  $x$  方向上的一致, 将  $x$  改为  $y$  即可。

根据光束均方根束宽和  $M^2$  因子的定义, 大气湍流中部分相干光在  $x$ 、 $y$  方向的均方根束宽  $\omega_x(z)$ 、

$\omega_y(z)$ 和  $M^2$  因子  $M_x^2$ 、 $M_y^2$  的传输公式分别为

$$\omega_x(z) = \langle x^2 \rangle^{1/2} = \left( \langle x^2 \rangle_0 + 2 \langle x\theta_x \rangle_0 z + \langle \theta_x^2 \rangle_0 z^2 + \frac{2}{3} \pi^2 z^3 T \right)^{1/2}, \quad (19)$$

$$\omega_y(z) = \langle y^2 \rangle^{1/2} = \left( \langle y^2 \rangle_0 + 2 \langle y\theta_y \rangle_0 z + \langle \theta_y^2 \rangle_0 z^2 + \frac{2}{3} \pi^2 z^3 T \right)^{1/2}, \quad (20)$$

$$M_x^2 = 2k (\langle x^2 \rangle \langle \theta_x^2 \rangle - \langle x\theta_x \rangle^2)^{1/2}, \quad (21)$$

$$M_y^2 = 2k (\langle y^2 \rangle \langle \theta_y^2 \rangle - \langle y\theta_y \rangle^2)^{1/2}, \quad (22)$$

式中  $T$  为大气湍流量,  $T = \int_0^\infty \Phi_n(\kappa, \alpha, l_0, L) \kappa^3 d\kappa$  为大气湍流量;  $l_0$  和  $L_0$  分别为湍流内尺度和外尺度;  $\alpha$  为广义指数;  $T$  的大小由大气湍流折射率起伏谱函数决定。将(22)式代入(6)~(10)式, 得到大气湍流中半导体激光光束在  $x$ 、 $y$  方向上的均方根束宽和  $M^2$  因子的传输公式分别为

$$\omega_x(z) = \langle x^2 \rangle^{1/2} = \left\{ \left[ \sum_m C_m (2m+1) \right] \omega_{0x}^2 / 4 + z^2 \left[ \sum_m C_m (2m+1) \right] / (k^2 \omega_{0x}^2) + \frac{2}{3} \pi^2 z^3 T \right\}^{1/2}, \quad (23)$$

$$\omega_y(z) = \langle y^2 \rangle^{1/2} = \left[ \omega_{0y}^2 / 4 + z^2 / (k^2 \omega_{0y}^2) + \frac{2}{3} \pi^2 z^3 T \right]^{1/2}, \quad (24)$$

$$M_x^2 = 2k (\langle x^2 \rangle \langle \theta_x^2 \rangle - \langle x\theta_x \rangle^2)^{1/2} =$$

$$\left\{ \left[ \sum_m C_m (2m+1) \right]^2 + 2k^2 \pi^2 \omega_{0x}^2 T z \sum_m C_m (2m+1) + \frac{8\pi^2 z^3 T \sum_m C_m (2m+1)}{3\omega_{0x}^2} + \frac{4\pi^2 T^2 z^4 k^2}{3} \right\}^{1/2}, \quad (25)$$

$$M_y^2 = 2k (\langle y^2 \rangle \langle \theta_y^2 \rangle - \langle y\theta_y \rangle^2)^{1/2} = \left( 1 + 2k^2 \pi^2 \omega_{0y}^2 z T + \frac{8\pi^2 z^3 T}{3\omega_{0y}^2} + \frac{4k^2 \pi^2 z^4 T^2}{3} \right)^{1/2}. \quad (26)$$

由(23)~(26)式可以看出, 均方根束宽  $\omega(z)$  和  $M^2$  因子除了与光束阶数和束腰宽度有关外, 还受大气湍流量的影响。根据(1)式, 当  $m \neq 0$  时, 激光二极管光束属于非旋转对称光束, 由(25)、(26)式可知激光二极管光束的  $M_x^2$  和  $M_y^2$  是不同的。文献[18-19]采用  $M^2$  因子矩阵  $\mathbf{M}$  来描述二维非旋转对称光束的光束质量, 其形式为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x^2 & M_{xy}^2 \\ M_{yx}^2 & M_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x^2 & 0 \\ 0 & M_y^2 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

在相同的直角坐标系中, 将光场绕  $z$  轴以顺时针旋转角度  $\theta$  后, 得到各个方向上新的  $M^2$  因子, 可表示为

$$\begin{cases} M_{x'}^2 = M_x^2 \cos^2 \theta + M_y^2 \sin^2 \theta \\ M_{y'}^2 = M_x^2 \sin^2 \theta + M_y^2 \cos^2 \theta \\ M_{x'y'}^2 = M_{y'x'}^2 = (M_y^2 - M_x^2) \sin \theta \cos \theta \end{cases}. \quad (28)$$

新的  $M^2$  因子矩阵  $\mathbf{M}'$  可表示为

$$\mathbf{M}' = \mathbf{\Theta}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{\Theta}, \quad (29)$$

式中  $\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 。

## 2.2 各向异性的非柯氏湍流模型

在惯性区间, 各向同性的非柯氏湍流折射率起伏谱函数为<sup>[20]</sup>

$$\Phi_{n_{\text{isotropic}}}(\kappa, \alpha) = A(\alpha) \hat{C}_n^2 \kappa^{-\alpha}, \quad (30)$$

式中  $L_0^{-1} < \kappa < l_0^{-1}$ ;  $3 < \alpha < 4$ ;  $A(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \Gamma(\alpha-1) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$ , 其中  $\Gamma(\cdot)$  为伽马函数;  $\hat{C}_n^2 = \beta C_n^2$  为广义折射率结构常数, 单位为  $\text{m}^{3-\alpha}$ ,  $\beta$  为单位为  $\text{m}^{\frac{11}{3}-\alpha}$  的常量;  $\kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2}$ ,  $\kappa_x$ 、 $\kappa_y$  和  $\kappa_z$  分别为  $\kappa$  在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个方向上的分量。(30)式仅在惯量区间( $L_0^{-1} < \kappa < l_0^{-1}$ )内成立, 在理论研究中, 可假定内尺度中湍流为 0, 外尺度中湍流为  $\infty$ , 则(30)式可扩展到整个区间( $0 < \kappa < \infty$ )。

在湍流模型中引入各向异性参数  $\zeta$ , 则结构函数为<sup>[21-22]</sup>

$$D_n(\mathbf{R}, \alpha, \zeta) = \hat{C}_n^2 \left( \frac{R_x^2 + R_y^2}{\zeta^2} + R_z^2 \right)^{(\alpha-3)/2}, \quad (31)$$

式中  $\mathbf{R}$  为空间矢量,  $R_x, R_y, R_z$  分别为  $\mathbf{R}$  在  $x, y, z$  三个方向上的分量,  $l_0 < R < L_0$ , 且  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ ;  $\zeta$  表征湍流在水平和垂直方向的不对称性,  $\zeta = 1$  时为各向同性湍流,  $\zeta > 1$  时为各向异性湍流, 且水平方向上的湍流大于垂直方向上的湍流。随着  $\zeta$  的增加, 各向异性会表现得越来越明显。现令  $X = \zeta x', Y = \zeta y', R' = (x', y', z)$ , 此时结构函数为各向同性。利用结构函数得到湍流折射率起伏谱函数为<sup>[21]</sup>

$$\Phi_n(\kappa, \alpha, \zeta) = \frac{1}{4\pi^2 \kappa^2} \int_0^\infty \frac{\sin(\kappa R)}{\kappa R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ R^2 \frac{\partial D_n(R, \alpha, \zeta)}{\partial R} \right] dR = A(\alpha) \hat{C}_n^2 \zeta^2 (\kappa')^{-\alpha} = A(\alpha) \hat{C}_n^2 \zeta^2 [\kappa_z^2 + \zeta^2 (\kappa_x^2 + \kappa_y^2)]^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad (32)$$

式中  $\kappa' = \sqrt{\kappa_x^2 + \zeta^2 (\kappa_y^2 + \kappa_z^2)}$ 。当  $\zeta = 1$  时, 各向异性的非柯氏湍流谱变为各向同性的非柯氏湍流谱。引入 Markov 近似, 假定在传输方向上任意一对点的折射率是  $\delta$  相关的, 此时  $\kappa_z$  可忽略<sup>[23]</sup>, 则各向异性的非柯氏湍流谱为<sup>[24]</sup>

$$\Phi_n(\kappa, \alpha, \zeta) = A(\alpha) \hat{C}_n^2 \zeta^{2-a} \kappa^{-a}, \quad (33)$$

式中  $\kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}$ 。

大气湍流量  $T$  可表示为

$$T = \int_0^\infty \Phi_n(\kappa, \alpha, \zeta) \kappa^3 d\kappa = \int_{1/L_0}^{1/l_0} A(\alpha) \hat{C}_n^2 \zeta^{2-a} \kappa^{3-a} d\kappa = \frac{A(\alpha) \hat{C}_n^2 \zeta^{2-a}}{4-\alpha} \left( \frac{1}{l_0^{4-\alpha}} - \frac{1}{L_0^{4-\alpha}} \right). \quad (34)$$

将(34)式代入(23)~(26)式, 得到各向异性大气湍流中激光二极管光束在  $x, y$  方向上光束宽度和光束质量因子的变化表达式。下面针对不同的湍流条件和光源参数进行分析, 研究光束质量的演化特性。

### 3 数值仿真与分析

由于半导体激光束采用 H-G TEM<sub>m0</sub> 混合模进行模拟,  $y$  方向上的高斯光束可以看作  $x$  方向上 H-G 光束的一个特例, 因此下文均以  $x$  方向上的光束为例。各阶厄米模的权重分别为: 对于 TEM<sub>0</sub> 模,  $C_0 = 0.60$ ; 对于 TEM<sub>1</sub> 模,  $C_1 = 0.20$ ; 对于 TEM<sub>2</sub> 模,  $C_2 = 0.10$ ; 对于 TEM<sub>3</sub> 模,  $C_3 = 0.06$ ; 对于 TEM<sub>4</sub> 模,  $C_4 = 0.04$ 。光束波长  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ <sup>[26]</sup>。

#### 3.1 光束参数对传输特性的影响

根据(23)~(26)式, 理论计算并分析光学参数对  $M_x^2$  因子和均方根束宽的影响。现取大气湍流参数为: 广义指数  $\alpha = 3.3$ , 折射率结构常数  $\hat{C}_n^2 = 10^{-14} \text{m}^{-2/3}$ , 内尺度  $l_0 = 0.01 \text{m}$ , 外尺度  $L_0 = 10 \text{m}$ , 各向异性参数  $\zeta = 2$ 。

对于不同束腰宽度值,  $M_x^2$  因子和均方根束宽  $\omega_x(z)$  随传输距离  $z$  的变化曲线如图 1 所示。由图 1 可看出, 随着传输距离的增大,  $M_x^2$  因子和均方根束宽  $\omega_x(z)$  均增大, 但是在不同的传输距离  $z$  处, 尤其在传输距离小于 200 m 的范围内,  $M_x^2$  因子和均方根束宽呈现出不同的变化规律。  $M_x^2$  因子在较近的距离处变化较为缓慢, 而在较远的距离处则有明显的变化; 均方根束宽则随传输距离始终呈线性变化。此外, 通过对比图 1(a)、(c) 的仿真结果, 可以发现在  $z < 200 \text{m}$  的范围内,  $M_x^2$  因子和均方根束宽  $\omega_x(z)$  随束腰宽度的变化并不完全成正比。

为了深入分析光束传输质量与光源束腰宽度之间的关系, 以束腰宽度为自变量, 分析得到不同距离处  $M_x^2$  因子和均方根束宽  $\omega_x(z)$  随束腰宽度的变化曲线, 如图 2 所示。可见, 随着束腰宽度  $\omega_{0x}$  的增大,  $M_x^2$  因子和均方根束宽  $\omega_x(z)$  均先减小后增大, 且存在极小值, 传输距离越远则变化趋势越明显, 极小值对应的束腰宽度  $\omega_{0x}$  也逐渐增大。

#### 3.2 湍流参数对传输特性的影响

根据(23)~(26)式,  $M_x^2$  因子和均方根束宽  $\omega_x(z)$  不仅与光束参数有关, 还受大气湍流量  $T$  的影响。当不考虑光束参数的影响时, 由于均方根束宽  $\omega_x(z)$  与大气湍流量  $T$  具有相同的变化趋势, 所以此处引入相



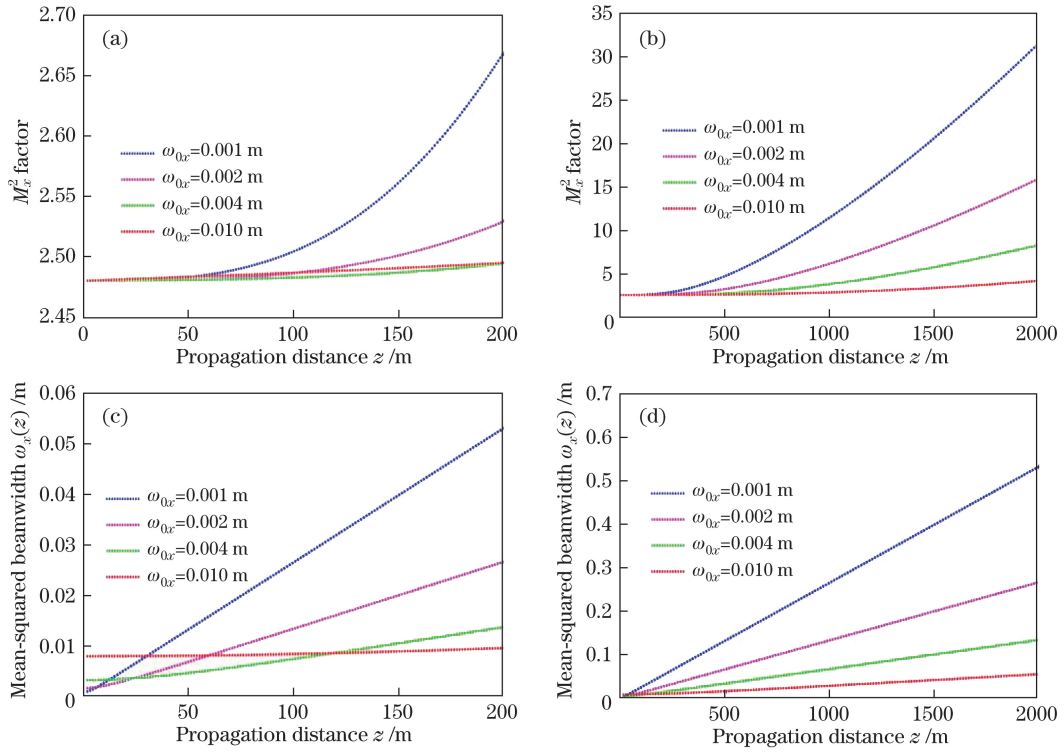


图 1 不同的束腰宽度  $\omega_{0x}$  下, (a)(b)  $M_x^2$  因子和 (c)(d) 均方根束宽  $\omega_x(z)$  随传输距离  $z$  的变化  
 Fig. 1 Variations in (a)(b)  $M_x^2$  factor and (c)(d) mean-squared beamwidth  $\omega_x(z)$  with propagation distance  $z$  under different waist width  $\omega_{0x}$

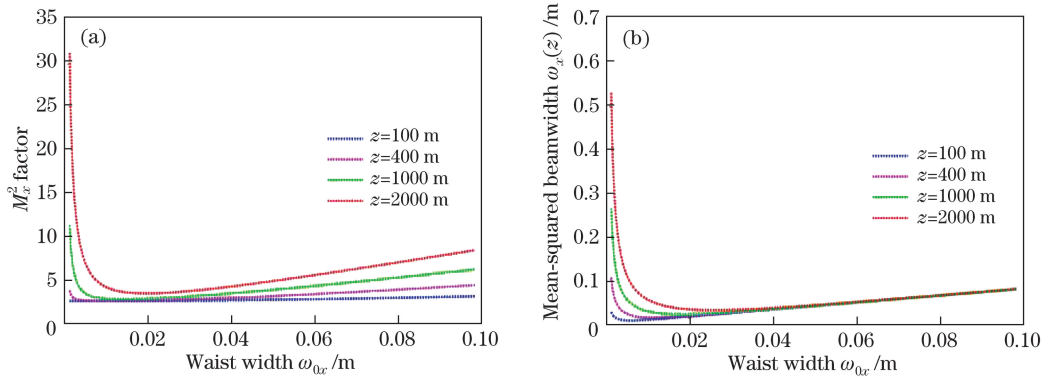


图 2 不同传输距离  $z$  下, (a)  $M_x^2$  因子和 (b) 均方根束宽  $\omega_x(z)$  随束腰宽度的变化  
 Fig. 2 Variations in (a)  $M_x^2$  factor and (b) mean-squared beamwidth  $\omega_x(z)$  with waist width under different propagation distance  $z$

对束宽的概念,用大气湍流中传输光束的束宽与自由空间中传输光束(大气湍流量  $T=0$ )的束宽之比  $\omega_x(z)/\omega_{x,\text{free}}$  来表示。由(34)式可知,大气湍流量与广义指数  $\alpha$ 、广义折射率结构常数  $\hat{C}_n^2$ 、各向异性参数  $\zeta$ 、内尺度  $l_0$  和外尺度  $L_0$  有关,由于  $L_0 \gg l_0$ ,因此外尺度  $L_0$  对大气湍流的影响可忽略,这里主要考虑广义指数  $\alpha$ 、各向异性参数  $\zeta$  和内尺度  $l_0$  对光束传输质量的影响。现取光束参数和其他大气湍流参数分别为:束腰宽度  $\omega_{0x}=0.01$  m,折射率结构常数  $\hat{C}_n^2=10^{-14}$  m<sup>-2/3</sup>,外尺度  $L_0=10$  m,内尺度  $l_0$  分别为0.001 m和0.01 m。

在不同传输距离处,  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,\text{free}}$  随广义指数  $\alpha$  的变化曲线如图 3 所示。可见,  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,\text{free}}$  随广义指数  $\alpha$  的增大先增大后减小,且存在极大值。随着传输距离的增大,  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,\text{free}}$  随广义指数  $\alpha$  的变化越明显,且极大值对应的  $\alpha$  值也逐渐增大。对比图 3(a)、(c)和图 3(b)、(d)可以发现,当内尺度  $l_0$  增大时,  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,\text{free}}$  随广义指数  $\alpha$  的变化幅度整体变小,但极大值减小的速度变缓,广义指数  $\alpha$  对  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,\text{free}}$  的影响变大。

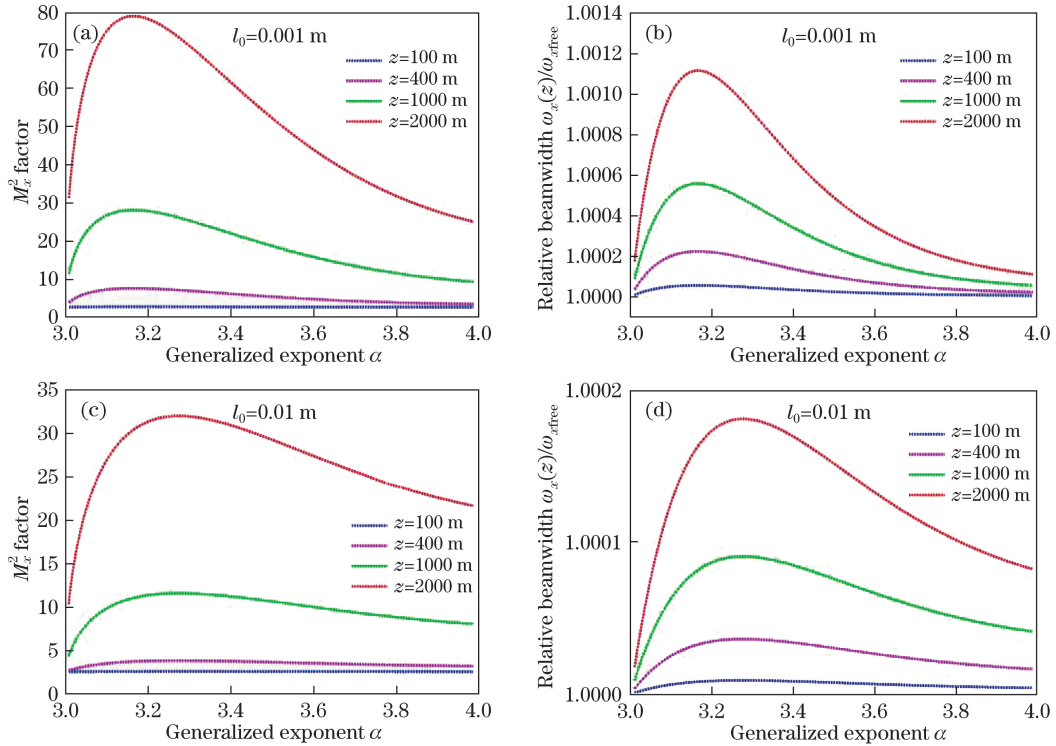


图 3 不同传输距离  $z$  下, (a)(c)  $M_x^2$  因子和 (b)(d) 相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,free}$  随广义指数  $\alpha$  的变化  
 Fig. 3 Variations in (a)(c)  $M_x^2$  factor and (b)(d) relative beamwidth  $\omega_x(z)/\omega_{x,free}$  with generalized exponent  $\alpha$  under different propagation distance  $z$

在不同传输距离处,  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,free}$  随各向异性参数  $\zeta$  的变化曲线如图 4 所示。可见,  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,free}$  随各向异性参数  $\zeta$  的增大而减小。当  $1 \leq \zeta \leq 10$  时, 各向异性参数  $\zeta$  对  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,free}$  的影响较大; 随着传输距离的增大,  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,free}$  随各向异性参数  $\zeta$  的变化越明显。对比图 4(a)、(c) 和图 4(b)、(d) 可以发现, 当内尺度  $l_0$  增大时,  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,free}$  随广义指数  $\alpha$  的变化曲线几乎不变。可见, 内尺度  $l_0$  不影响各向异性参数  $\zeta$  对  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,free}$  的影响。

综合考虑广义指数  $\alpha$  和各向异性参数  $\zeta$  在不同束腰宽度下对光束传输质量的影响, 以  $z=1000$  m、 $1 \leq \zeta \leq 10$  为例, 如图 5 所示。可见, 当  $1 \leq \zeta \leq 5$  时, 大气湍流对光束传输质量的影响较大, 随着各向异性参数  $\zeta$  的增加, 广义指数  $\alpha$  对光束质量的影响逐渐减小。同时, 当广义指数  $\alpha$  趋于 3 或者 4 时, 各向异性参数  $\zeta$  对光束质量的影响也逐渐减小。对比图 5(a)、(c) 和图 5(b)、(d) 可以发现, 当内尺度  $l_0$  增大时,  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,free}$  整体减小, 但是广义指数  $\alpha$  对  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,free}$  的影响增大。

### 3.3 光束传输质量矩阵

根据  $M^2$  因子的表达式可以计算出不同参数下的  $M_x^2$  和  $M_y^2$  的值, 再通过  $M^2$  因子矩阵的旋转变换, 可在二维直角坐标系内画出  $M^2$  因子随旋转角度  $\theta$  变化的轨迹图。为得到相同的光束在不同的各向异性参数下, 不同传输距离上二维  $M^2$  因子的轨迹图, 取光束参数和其他大气湍流参数分别为: 束腰宽度  $\omega_{0,x} = \omega_{0,y} = 0.01$  m, 广义指数  $\alpha = 3.2$ , 折射率结构常数  $\hat{C}_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ , 外尺度  $L_0 = 10$  m, 内尺度  $l_0 = 0.001$  m。

从图 6 中可以看出, 光束轨迹图在短距离范围内为倒 8 字形, 随着传输距离的增大, 光束轨迹图逐渐向椭圆形变化, 且各向异性参数越小, 光束轨迹图变化越快。在 200 m 的传输距离范围内, 不同各向异性参数下光束轨迹图的变化很小; 当传输距离大于 400 m 时, 不同各向异性参数下光束轨迹图的面积均相应地扩大, 说明  $x$ 、 $y$  方向上的光束质量均明显降低。各向异性参数越小, 光束轨迹图的面积扩大得越快, 则光束质量下降得越多。因此, 当传输距离小于 400 m 时, 可近似忽略各向异性参数对光束传输质量的影响。

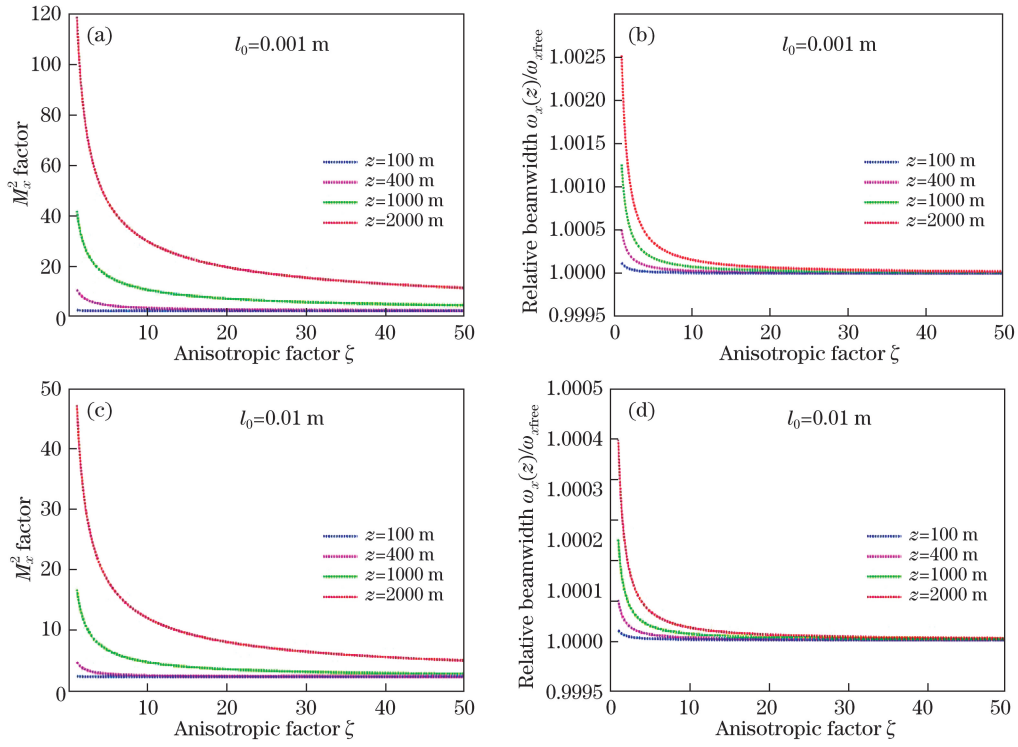


图 4 不同传输距离  $z$  下, (a)(c)  $M_x^2$  因子和 (b)(d) 相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,free}$  随各向异性参数  $\zeta$  的变化

Fig. 4 Variations in (a)(c)  $M_x^2$  factor and (b)(d) relative beamwidth  $\omega_x(z)/\omega_{x,free}$  with anisotropic factor  $\zeta$  under different propagation distance  $z$

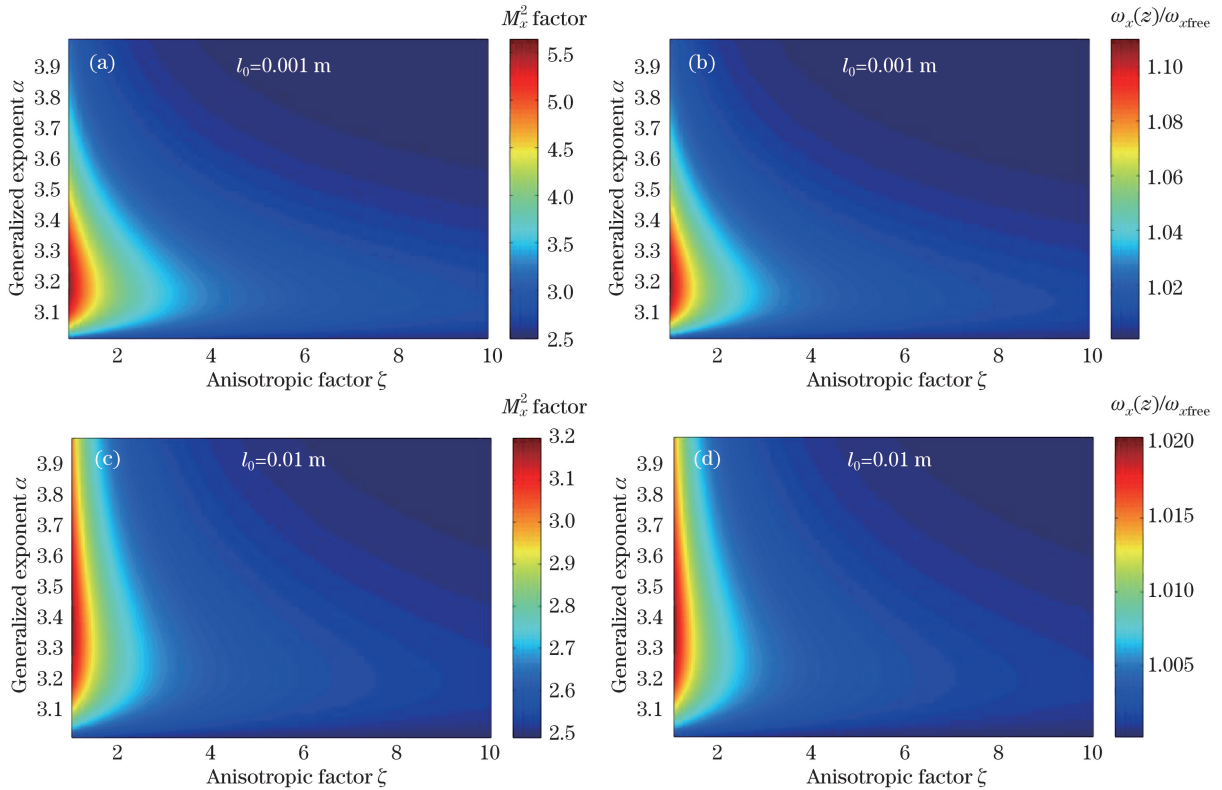


图 5 (a)(c)  $M_x^2$  因子和 (b)(d) 相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,free}$  随广义指数  $\alpha$  和各向异性参数  $\zeta$  的变化

Fig. 5 (a)(c)  $M_x^2$  factor and (b)(d) relative beamwidth  $\omega_x(z)/\omega_{x,free}$  versus generalized exponent  $\alpha$  and anisotropic factor  $\zeta$



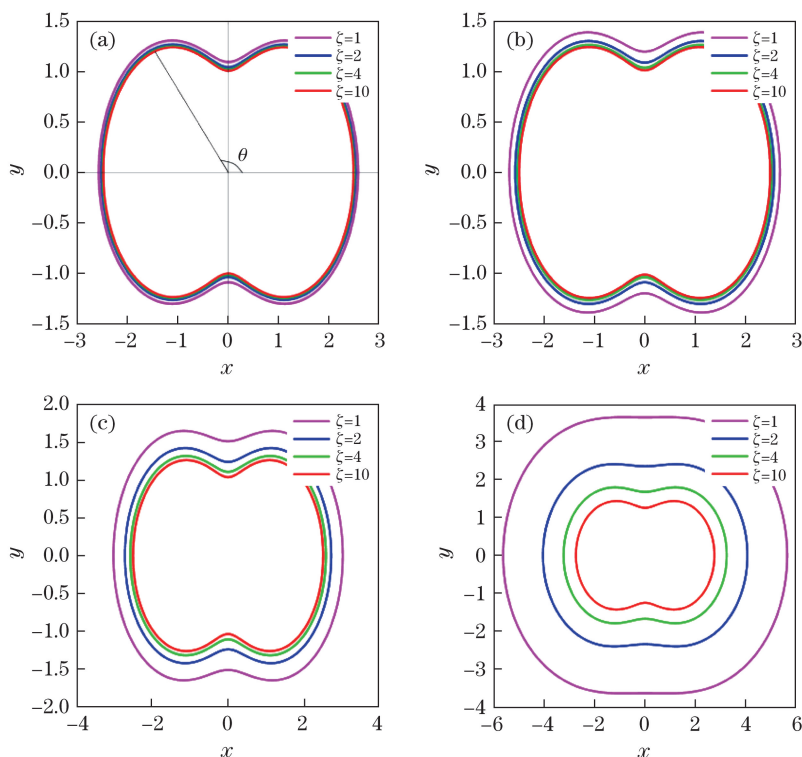


图 6 不同的各向异性参数  $\zeta$  下, 二维  $M^2$  因子轨迹随传输距离  $z$  的变化。

(a)  $z=100$  m; (b)  $z=200$  m; (c)  $z=400$  m; (d)  $z=1000$  m

Fig. 6 Two-dimensional  $M^2$  factor trace versus propagation distance  $z$  under different anisotropic factor  $\zeta$ .

(a)  $z=100$  m; (b)  $z=200$  m; (c)  $z=400$  m; (d)  $z=1000$  m

## 4 结 论

基于广义惠更斯-菲涅耳原理和各向异性非柯氏大气湍流折射率起伏谱密度函数, 根据光束均方根束宽和  $M^2$  因子的定义, 计算了半导体激光光束传输质量的变化规律, 分别分析了光束参数和大气湍流参数对光束传输质量变化规律的影响。结果表明: 随着传输距离的增大,  $M_x^2$  因子和均方根束宽  $\omega_x(z)$  均增大;  $M_x^2$  因子和均方根束宽  $\omega_x(z)$  随着束腰宽度的增大先减小后增大, 存在极小值; 随着广义指数  $\alpha$  的增大,  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,\text{free}}$  先增大后减小, 存在极大值; 各向异性参数  $\zeta$  越小,  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,\text{free}}$  越大; 内尺度  $l_0$  越大,  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,\text{free}}$  越小, 但广义指数  $\alpha$  对  $M_x^2$  因子和相对束宽  $\omega_x(z)/\omega_{x,\text{free}}$  的影响越大。当用  $M^2$  因子矩阵将光束传输质量的分析扩展到二维情况时, 结果与一维情况一致, 随着传输距离的增大, 各向异性参数  $\zeta$  越小, 光束传输质量下降越多, 但是在一定的传输距离范围内, 可近似忽略各向异性参数对光束传输质量的影响。研究结果对大气激光通信及探测等相关应用的开发具有一定的参考意义。

## 参 考 文 献

- [1] Siegman A E. New developments in laser resonators[C]. SPIE, 1990, 1224: 2-14.
  - [2] Martínez-Herrero R, Mejías P M, Sánchez M, *et al.* Third- and fourth-order parametric characterization of partially coherent beams propagating through ABCD optical systems[J]. Optical and Quantum Electronics, 1992, 24(9): S1021-S1026.
  - [3] Serna J, Martínez-Herrero R, Mejías P M. Parametric characterization of general partially coherent beams propagating through ABCD optical systems[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1991, 8(7): 1094-1098.
  - [4] Kardosh I. Beam properties and quality factor of VCSELs[R]. University of Ulm, 2003.
  - [5] Lü Baida, Zhang Bin, Cai Bangwei.  $M^2$  factor concept and laser beam quality control[J]. Laser Technology, 1992, 16(5): 278-284.
- 吕百达, 张 彬, 蔡邦维.  $M^2$  因子概念和激光光束质量控制[J]. 激光技术, 1992, 16(5): 278-284.

- [6] Lü B D, Ma H. A comparative study of elegant and standard Hermite-Gaussian beams[J]. Optics Communications, 2000, 174(1/4): 99-104.
- [7] Amarande S A. Beam propagation factor and the kurtosis parameter of flattened Gaussian beams[J]. Optics Communications, 1996, 129(5/6): 311-317.
- [8] Andrews L C, Phillips R L. Laser beam propagation through random media[M]. 2<sup>nd</sup> ed. Bellingham: SPIE Press, 2005.
- [9] Cai Y J, He S L. Average intensity and spreading of an elliptical Gaussian beam propagating in a turbulent atmosphere[J]. Optics Letters, 2006, 31(5): 568-570.
- [10] Dan Y Q, Zhang B. Beam propagation factor of partially coherent flat-topped beams in a turbulent atmosphere[J]. Optics Express, 2008, 16(20): 15563-15575.
- [11] Cai Y J. Propagation of various flat-topped beams in a turbulent atmosphere[J]. Journal of Optics A: Pure and Applied Optics, 2006, 8(6): 537-545.
- [12] Cai Y J, He S L. Propagation of various dark hollow beams in a turbulent atmosphere[J]. Optics Express, 2006, 14(4): 1353-1367.
- [13] Dan Y Q, Zhang B. Second moments of partially coherent beam in atmospheric turbulence[J]. Optics Letters, 2009, 34(5): 563-565.
- [14] Ji X L, Li X Q.  $M^2$ -factor of truncated partially coherent beams propagating through atmospheric turbulence[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2011, 28(6): 970-975.
- [15] Yuan Y S, Cai Y J, Qu J, *et al.*  $M^2$ -factor of coherent and partially coherent dark hollow beams propagating in turbulent atmosphere[J]. Optics Express, 2009, 17(20): 17344-17356.
- [16] Yuan Y S, Cai Y J, Qu J, *et al.* Propagation factors of Hermite-Gaussian beams in turbulent atmosphere[J]. Optics & Laser Technology, 2010, 42(8): 1344-1348.
- [17] Huang Yongping, Zhang Bin, Dan Youquan, *et al.* Changes of  $M^2$  factor for Hermite-Gaussian beams in turbulence atmosphere[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2011, 23(1): 59-64.  
黄永平, 张 彬, 但有全, 等. 湍流大气中部分相干厄米高斯光束  $M^2$  因子的变化[J]. 强激光与粒子束, 2011, 23(1): 59-64.
- [18] Li Wei, Feng Guoying, Huang Yu, *et al.*  $M^2$  factor matrix for two-dimensional Hermite-Gaussian beam[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(4): 2461-2466.  
李 玮, 冯国英, 黄 宇, 等. 厄米-高斯光束的  $M^2$  因子矩阵[J]. 物理学报, 2009, 58(4): 2461-2466.
- [19] Chen Feinan, Chen Yanru, Zhao Qi, *et al.* Change of propagation quality factor of partially coherence Hermite-Gaussian beams traveling through oceanic turbulence[J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(4): 0413002.  
陈斐楠, 陈延如, 赵 琦, 等. 部分相干厄米高斯光束在海洋湍流中光束传输质量的变化[J]. 中国激光, 2013, 40(4): 0413002.
- [20] Stribling B E, Welsh B M, Roggemann M C. Optical propagation in non-Kolmogorov atmospheric turbulence[C]. SPIE, 1995, 2471: 181-196.
- [21] Toselli I, Agrawal B, Restaino S. Light propagation through anisotropic turbulence[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2011, 28(3): 483-488.
- [22] Andrews L C, Phillips R L, Crabbs R, *et al.* Deep turbulence propagation of a Gaussian-beam wave in anisotropic non-Kolmogorov turbulence[C]. SPIE, 2013, 8874: 887402.
- [23] Yao M, Toselli I, Korotkova O. Propagation of electromagnetic stochastic beams in anisotropic turbulence[J]. Optics Express, 2014, 22(26): 31608-31619.
- [24] Cui L Y, Xue B D, Zhou F G. Modified anisotropic turbulence refractive-index fluctuations spectral model and its application in moderate-to-strong anisotropic turbulence[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2016, 33(4): 483-491.
- [25] Rao Ruizhong, Li Yujie. Light propagation through non-Kolmogorov-type atmospheric turbulence and its effects on optical engineering[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(5): 0501003.  
饶瑞中, 李玉杰. 非 Kolmogorov 大气湍流中的光传播及其对光电工程的影响[J]. 光学学报, 2015, 35(5): 0501003.
- [26] Li Binzhong, Zeng Linze, Xue Jinhui, *et al.* Study on the beam characteristic of laser diode[J]. Journal of Sichuan Teachers College (Natural Science), 2003, 24(2): 167-170.  
李宾中, 曾林泽, 薛晋惠, 等. 激光二极管光束特性的研究[J]. 四川师范学院学报(自然科学版), 2003, 24(2): 167-170.