

# 高维非厄米系统奇异点的多样性研究

程时航<sup>1</sup>, 祝可嘉<sup>2</sup>, 丁亚琼<sup>1</sup>

<sup>1</sup>上海理工大学理学院, 上海 200093;

<sup>2</sup>同济大学物理科学与工程学院, 上海 200092

**摘要** 不同于传统的厄米系统, 非厄米系统存在奇异点。当某一参数演化到奇异点时, 非厄米系统发生相变, 即两个本征态合并成一个。利用耦合的超材料人造原子, 研究了二态和四态的非厄米系统。通过记录电磁波开放系统相干吸收峰频率随损耗的变化, 研究了非厄米系统本征值的各种演化轨迹。理论和电磁场仿真结果表明, 四态非厄米系统的本征态通过不同的方式合并, 可以形成五种奇异点; 其中, 由两个以上本征态合并产生的奇异点, 称为高阶奇异点。

**关键词** 物理光学; 奇异点; 非厄米系统; 超材料; 人造原子

**中图分类号** O43 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/AOS201737.0626003

## Diversity Research on Exceptional Points in High Dimensional Non-Hermitian System

Cheng Shihang<sup>1</sup>, Zhu Kejia<sup>2</sup>, Ding Yaqiong<sup>1</sup>

<sup>1</sup>College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

<sup>2</sup>School of Physics Science and Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China

**Abstract** Unlike the traditional Hermitian system, a non-Hermitian system has exceptional points. When one parameter evolves to an exceptional point, a phase transition occurs in the non-Hermitian system, i. e., two eigenstates collapse and their corresponding eigenvalues merge into one. The two-state and four-state non-Hermitian systems are studied by using the coupled metamaterial artificial atoms. Various evolution traces of the eigenvalues of non-Hermitian systems are studied by recording the variation of peak frequency of coherent absorption with the loss parameter in an open system for electromagnetic waves. Theoretical and electromagnetic-field simulated results show that, five kinds of exceptional points can form by different combination ways of eigenstates in the four-state non-Hermitian system. Among them, the exceptional points at which more than two eigenstates merge is called as high-order exceptional points.

**Key words** physical optics; exceptional points; non-Hermitian system; metamaterial; artificial atom

**OCIS codes** 260.2710; 190.4400; 230.4170; 160.3918; 300.1030

## 1 引 言

在量子力学中, 厄米系统是具有实数本征值且本征态完备的系统。与之相对的, 本征态不完备且本征值非实数的系统为非厄米系统<sup>[1]</sup>。非厄米系统本征态的不完备性是由本征态合并造成的, 而本征态合并的点称为奇异点。自 1966 年 Kota 提出奇异点概念以来, 奇异点已经多次在实验上被验证和研究。无论是量子力学、凝聚态物理, 还是光学、声学, 研究人员都可以利用两个耦合的谐振单元, 构建  $2 \times 2$  非厄米矩阵描述的二态系统, 从而实现和研究奇异点。如最早在实验上观察到奇异点的立体圆柱微波腔<sup>[2]</sup>, 到后来的耦合电子

**收稿日期:** 2016-11-11; **收到修改稿日期:** 2017-01-21

**基金项目:** 国家自然科学基金(11504236, 11674247)、中央高校基本科研业务费专项资金

**作者简介:** 程时航(1991—), 男, 硕士研究生, 主要从事光与人工微结构材料相互作用方面的研究。

E-mail: 1255120285@qq.com

**导师简介:** 丁亚琼(1986—), 女, 博士, 讲师, 硕士生导师, 主要从事光与人工微结构材料相互作用方面的研究。

E-mail: dyq192@163.com(通信联系人)

电路<sup>[3]</sup>,以及光学腔、声学腔系统<sup>[4-5]</sup>。通过这些实验,许多由奇异点的产生而诱导的新奇现象得到了验证与研究,如损耗诱导的激光复苏<sup>[4]</sup>、单方向无反射传输<sup>[6]</sup>、相干完美吸收<sup>[7]</sup>等。

$2 \times 2$  非厄米系统通过其固有的两个本征态的合并产生单一的奇异点,即平方根奇点。理论上,作为本征态重合的点,奇异点的种类具有多样性。Ding 等<sup>[5]</sup>利用封闭的耦合声学微腔,研究了由耗散损耗导致的  $4 \times 4$  非厄米系统中的奇异点。本文通过耦合模理论和电磁场仿真,利用超材料<sup>[8-9]</sup>人造原子研究了包含散射损耗的开放电磁波系统中的高维非厄米奇异点。区别于封闭的非厄米系统,多端口激励下的开放系统可实现等效的宇称-时间(PT)对称和 PT 相变。并且,相较于封闭的声学系统,基于人造原子的开放系统的相干吸收谱更容易获得,有利于通过实验揭示非厄米系统本征值随各个参量的演化过程。本文通过分析不同损耗水平下开放的人造原子系统的相干吸收谱,清晰地观察了非厄米系统中本征值随损耗的演化过程。特别是在  $4 \times 4$  的高维非厄米系统中,观察到了多个奇异点的产生以及两个以上本征态合并后形成的高阶奇异点<sup>[10]</sup>。对可调损耗的耦合人造原子系统奇异点的研究,可为进一步探索高阶奇异点的复杂拓扑结构提供了理论基础,且高阶奇异点概念可以指导研发新型的电磁波和声波隐身材料,及高灵敏传感装置等<sup>[11-12]</sup>。

## 2 基本原理

### 2.1 低维非厄米系统

$2 \times 2$  的非厄米(低维)系统理论模型构建可基于一组相互耦合的人造电磁原子,即直接与入射波强耦合的“亮态”原子  $\bar{a} = a \exp(i\omega t)$  和无法直接被入射波激励的“暗态”原子  $\bar{b} = b \exp(i\omega t)$ ,其中  $a, b$  为振幅, $\omega$  为谐振频率, $t$  为时间。假设谐振原子均为单模且“亮态”原子与两个端口均匀耦合,则该系统的动力学方程可以表示为

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = (i\omega_0 - \Gamma_1 - \gamma)\bar{a} + i\kappa\bar{b} + i\sqrt{\gamma}(s_{1+} + s_{2+}), \quad (1)$$

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = (i\omega_0 - \Gamma_2)\bar{b} + i\kappa\bar{a}, \quad (2)$$

式中  $\gamma$  为“亮态”原子的散射损耗; $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  分别为“亮态”和“暗态”原子的耗散损耗; $\kappa$  为两个谐振原子之间的近场耦合强度; $s_{1+}$  和  $s_{2+}$  分别为从两个方向激励“亮态”原子的相干入射波的振幅;“亮态”、“暗态”的谐振频率均为  $\omega_0$ 。上述模型参数将在实验部分给出拟合的结果。双端口相干激励时<sup>[4,7]</sup>,可以得到此系统的哈密顿量为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \omega_0 - i(\gamma - \Gamma_1) & \kappa \\ \kappa & \omega_0 + i\Gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

通过求解行列式  $\det(\mathbf{H} - \omega\mathbf{I}) = 0$  ( $\mathbf{I}$  为单位矩阵),可以得到哈密顿量  $\mathbf{H}$  的本征值为

$$\omega = \omega_0 + i \frac{\gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2}{2} \pm \sqrt{\kappa^2 - \left( \frac{\gamma - \Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2}. \quad (4)$$

区别于封闭的非厄米系统,开放非厄米系统的本征值受亮态原子散射损耗  $\gamma$  的影响。当散射损耗( $\gamma$ )与耗散损耗( $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$ )平衡时,开放的非厄米系统可在无实际增益的条件下,实现等效 PT 对称与 PT 相变<sup>[7]</sup>。而当  $\Delta\Gamma$  ( $\Delta\Gamma = |\gamma - \Gamma_1 + \Gamma_2|$ ) 逐渐增大时,系统本征值将会显现出平方根合并的奇异点 ( $\Delta\Gamma = 2\kappa$ ),两个本征态会合并成一个,从而产生二维系统的奇异点。因此,在二维系统中,本征值对损耗(或者耦合强度)的依赖关系为平方根关系。

### 2.2 高维非厄米系统

借鉴上述经典的低维非厄米系统,设想通过两组  $2 \times 2$  非厄米结构之间的相互耦合构建  $4 \times 4$  高维非厄米系统。其中两组低维非厄米系统分别具有不同的谐振频率  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ,频率差为  $\Delta\omega$ 。系统的四个谐振单元分别只与相邻的两个谐振单元耦合,其中低维系统内部的耦合称为组内耦合,两组低维系统之间的耦合称为组间耦合。两个“亮态”谐振单元  $\bar{a} = a \exp(i\omega t)$  和  $\bar{c} = c \exp(i\omega t)$  分别由外场激励,两个“暗态”谐振单元  $\bar{b} = b \exp(i\omega t)$  和  $\bar{d} = d \exp(i\omega t)$  则引入相同的损耗,其中  $c, d$  为振幅。四端口相干激励时,系统

的动力学方程为

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = (i\omega_1 - \Gamma_a - \gamma_a)\tilde{a} + ik\tilde{b} + it'\tilde{d} + i\sqrt{\gamma_a}(s_{1+} + s_{2+}), \quad (5)$$

$$\frac{d\tilde{b}}{dt} = (i\omega_1 - \Gamma_b)\tilde{b} + ik\tilde{a} + it'\tilde{c}, \quad (6)$$

$$\frac{d\tilde{c}}{dt} = (i\omega_2 - \Gamma_c - \gamma_c)\tilde{c} + ik\tilde{d} + it'\tilde{b} + i\sqrt{\gamma_c}(s_{3+} + s_{4+}), \quad (7)$$

$$\frac{d\tilde{d}}{dt} = (i\omega_2 - \Gamma_d)\tilde{d} + it'\tilde{a} + ik\tilde{c}, \quad (8)$$

式中  $k, t'$  分别表示组内、组间耦合强度,  $\Gamma_a$  和  $\Gamma_c, \Gamma_b$  和  $\Gamma_d$  分别为两个“亮态”和两个“暗态”原子的耗散损耗,  $\gamma_a$  和  $\gamma_c$  分别为两个“亮态”谐振单元的散射损耗,  $s_{3+}$  和  $s_{4+}$  分别为从两个方向激励“暗态”原子的相干入射波的振幅。调整结构参数, 令两个“亮态”原子散射损耗相同 ( $\gamma_a = \gamma_c$ ), 并加载相同的耗散损耗 ( $\Gamma_a = \Gamma_c$ ), 两个“暗态”原子也加载相同的损耗 ( $\Gamma_b = \Gamma_d$ )。可解得四态非厄米系统本征值为

$$\tilde{\omega}_j = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - i\chi \pm \beta (j = 1, 2, 3, 4), \quad (9)$$

式中

$$\chi = (\gamma_a - \Gamma_a - \Gamma_b)/2, \quad (10)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\beta' \pm 4\sqrt{\beta''}}, \quad (11)$$

$$\beta' = (\Delta\omega)^2 + 4k^2 + 4t'^2 - \Gamma^2, \quad (12)$$

$$\beta'' = 4k^2t'^2 + k^2(\Delta\omega)^2 - \Gamma^2\frac{(\Delta\omega)^2}{4}, \quad (13)$$

$$\Gamma = \gamma_a - \Gamma_a + \Gamma_b. \quad (14)$$

观察本征值解析解可知, 上述高维非厄米系统存在 4 个解析的本征值。若按实部从大到小可将其分别记作  $\tilde{\omega}_1(+, +)$ 、 $\tilde{\omega}_2(+, -)$ 、 $\tilde{\omega}_3(-, -)$  和  $\tilde{\omega}_4(-, +)$ , 其中括号内加减号为本征值解析解(6)式中根号外和根号内计算符号的选择。本系统可得到的奇异点有 5 种, 分别记为  $E_{p-1}$ 、 $E_{p-2}$ 、 $E_{p-3}$ 、 $E_{p-4}$ 、 $E_{p-5}$ 。当  $\beta' - 4\sqrt{\beta''} = 0$  时, 记为  $E_{p-1}$ , 此时本征值  $\tilde{\omega}_2$  和  $\tilde{\omega}_3$  重合; 当  $\beta' + 4\sqrt{\beta''} = 0$  时, 记为  $E_{p-2}$ , 此时本征值  $\tilde{\omega}_1$  和  $\tilde{\omega}_4$  重合; 当  $\beta' \neq 0, \beta'' = 0$  时, 若本征值  $\tilde{\omega}_1$  和  $\tilde{\omega}_2$  重合记为  $E_{p-3}$ , 若本征值  $\tilde{\omega}_3$  和  $\tilde{\omega}_4$  重合记为  $E_{p-4}$ ; 当  $\beta' = \beta'' = 0$  时, 记为  $E_{p-5}$ , 此时 4 个本征值重合, 对应的 4 个本征态合并产生一个高阶奇异点。基于以上理论分析, 高维系统中的奇异点  $E_{p-1}$  和  $E_{p-2}$  在  $\Delta\omega = 0$  的情况下与低维系统的奇异点类似, 都是基于本征值对损耗(或者耦合强度)平方根依赖关系的奇异点。而  $E_{p-3}$ 、 $E_{p-4}$  和  $E_{p-5}$  则都涉及到了四次方根依赖关系, 在这些奇异点附近, 本征值对损耗(或者耦合强度)的变化相比较低维系统的更加敏感。

### 3 电磁场仿真

自 1999 年 Pendry 等<sup>[13]</sup>提出可以用开口谐振环阵列实现磁导率为负的材料以来, 这种特异材料的基础单元(开口环)就因其形状不限、本征频率可调以及加载损耗方便等优点一直备受关注。本文仿真实验正是以这种开口环结构为基础。首先, 通过电磁场仿真软件 CST 研究了单个“亮态”原子的本征频率以及耗散损耗特性; 然后, 引入“暗态”原子构成耦合的人造原子二态非厄米系统, 实验研究了原子间的耦合强度特性, 并通过“亮态”原子耗散损耗参量的演化获得了二态非厄米系统的奇异点; 最后, 以二态系统为基础构建四态系统, 在理论和实验仿真上, 验证了四态高维非厄米系统的 5 种奇异点。其中 4 个本征态合并产生的奇异点, 称为高阶奇异点<sup>[10]</sup>。这种只有在高维非厄米系统中才能出现的特殊类型奇异点, 可能在手征模式<sup>[14]</sup>和拓扑性能<sup>[15]</sup>上有非凡的表现。

#### 3.1 人造原子结构

电磁场仿真实验选取特异材料开口环结构作为人造原子, 结构如图 1 所示, 它既可以作为“亮态”(与微带线直接耦合), 同时也可以设计为“暗态”(不与微带线直接耦合)。微带线基板相对介电常数  $\epsilon_r = 2.2$ , 厚度

$h=0.787$  mm。开口谐振环大小为  $40\text{ mm}\times 30\text{ mm}$ ,  $a=20\text{ mm}$ ,  $b=40\text{ mm}$ ,  $L=10\text{ mm}$ , 线宽  $w_0=0.5\text{ mm}$ , 谐振环上端两侧设计为  $45^\circ$  斜线, 斜线竖直长度  $d_1=10\text{ mm}$ , 水平高度  $d_2=10\text{ mm}$ , 用于和邻近谐振单元耦合。下端左右两侧方形片大小为  $2\text{ mm}\times 2\text{ mm}$ , 用于焊接集总原件(电容  $C_1$  和电阻  $R_1$ )。  $50\ \Omega$  匹配微带线的宽度为  $2.4\text{ mm}$ , 谐振环与微带线间距  $s=0.3\text{ mm}$ 。

通过电磁场仿真软件, 计算了加载  $1.0\text{ pf}$  电容时“亮态”人造原子的传输特性。如图 2 所示, 随着谐振环加载的电阻从  $1\ \Omega$  增加到  $7\ \Omega$ , 反射谱线宽增加。对测量数据进行线性拟合, 得到谐振环耗散损耗随电阻值增大的比率。反射谱线宽包含散射损耗与耗散损耗两部分, 其中散射损耗  $\gamma_1=0.0102\text{ GHz}$ , 耗散损耗  $\Gamma_1=0.0032R_1$ 。谐振单元本身的损耗极小, 耗散损耗全部来自所加载的电阻。

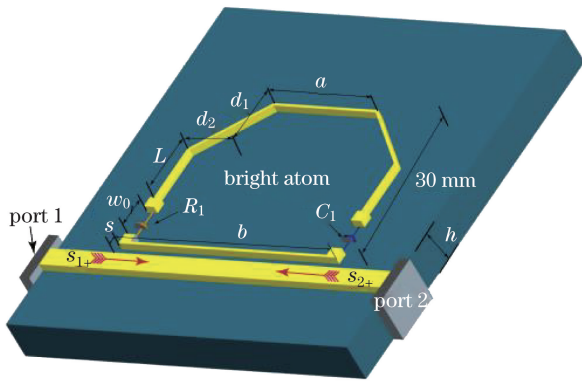


图 1 亮态人造原子电磁场仿真结构示意图  
Fig. 1 Structural diagram of electromagnetic field simulation for bright artificial atoms

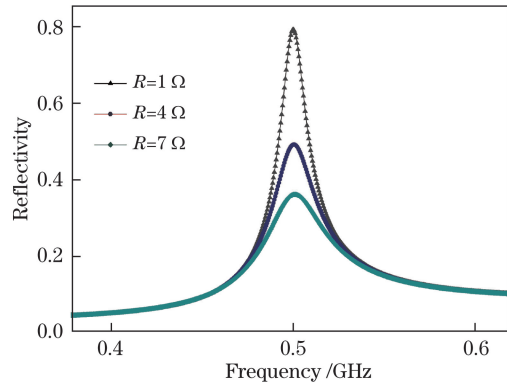


图 2 亮态人造原子加载不同损耗下的反射谱  
Fig. 2 Reflection spectra of bright artificial atoms loaded with different losses

### 3.2 低维开放非厄米系统

在仿真研究“亮态”原子传输及损耗特性之后, 引入“暗态”原子, 构建低维二态开放的非厄米系统。由两个完全一样的谐振环构建的  $2\times 2$  非厄米系统如图 3(a) 所示。由微带线直接激励的谐振环称为“亮态”原子; 不与微带线直接耦合、只能通过亮态耦合激励的谐振环称为“暗态”原子。调节两个环上所接的电容  $C_1$ 、 $C_2$ , 令其具有相同的谐振频率  $\omega$ 。两环之间距离为  $S_{\text{intra}}$ 。使用 CST 电磁波仿真软件, 计算了加载  $1.0\text{ pf}$  电容的开口谐振环  $2\times 2$  非厄米系统的透射谱线, 结果如图 3(b) 所示。随着两环间距  $S_{\text{intra}}$  值的增大, 透射谱线上的两个波峰间的距离减小, 即耦合强度随间距  $S_{\text{intra}}$  的增加而减小。通过对数据进行线性拟合, 得到两环间距与其耦合强度的关系式为  $\kappa=-0.0163S_{\text{intra}}+0.02501$ , 其中  $0.2\text{ mm}<S_{\text{intra}}<0.8\text{ mm}$ 。

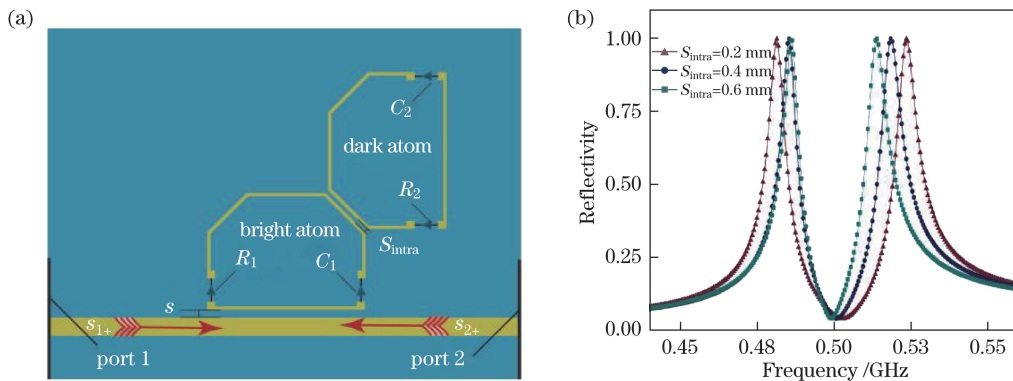


图 3 (a) 基于耦合人造原子的二态非厄米系统; (b) 人造原子不同间距下的反射谱  
Fig. 3 (a) Two-state non-Hermitian system based on coupled artificial atoms; (b) reflection spectra of artificial atoms with different separation distances

与厄米系统的区别是, 非厄米系统随某一参数演化可以出现奇异点, 如图 4(a)、(b) 所示, 二态开放系统随耦合强度或耗散损耗参量演化时, 都可出现本征值实部、虚部重合的点。电磁场仿真中, 令原子间距为  $0.2\text{ mm}$ , 通过损耗参量演化获得了二态开放系统的奇异点。本征值解析解的实部及虚部随损耗参量演化的



数学模拟如图 4(c)所示,其中实线表示实部,数值参照左侧 y 轴;虚线表示虚部,数值参照右侧 y 轴;空心圆点表示电磁场仿真得到的暗态原子在不同损耗水平下的吸收谱的峰值频率; $E_P$ 代表奇异点出现的位置。显然,随着损耗的增加,二态系统的两个本征值实部不断趋近,并在 $R_2=23\ \Omega$ 时重合,产生奇异点。非厄米系统暗态原子在加载不同耗散损耗下的相干吸收谱如图 4(d)所示,相干吸收谱波峰频率对应于本征值解析解的实部<sup>[7]</sup>。计算相干吸收的公式为 $\frac{2-|s_{11}-s_{12}|^2-|s_{22}-s_{21}|^2}{2}$ ,其中散射参数 $s_{ij}$ 为复数,表示两个端口之间的透射与反射系数。从图 4(d)中可以看到,随着损耗 $R_2$ 的增加,两个峰值即本征频率实部逐渐靠近。在 $R_2=23\ \Omega$ 时,本征值的实部和虚部同时重合,产生奇异点。仿真实验结果与理论数学模拟结果基本一致。

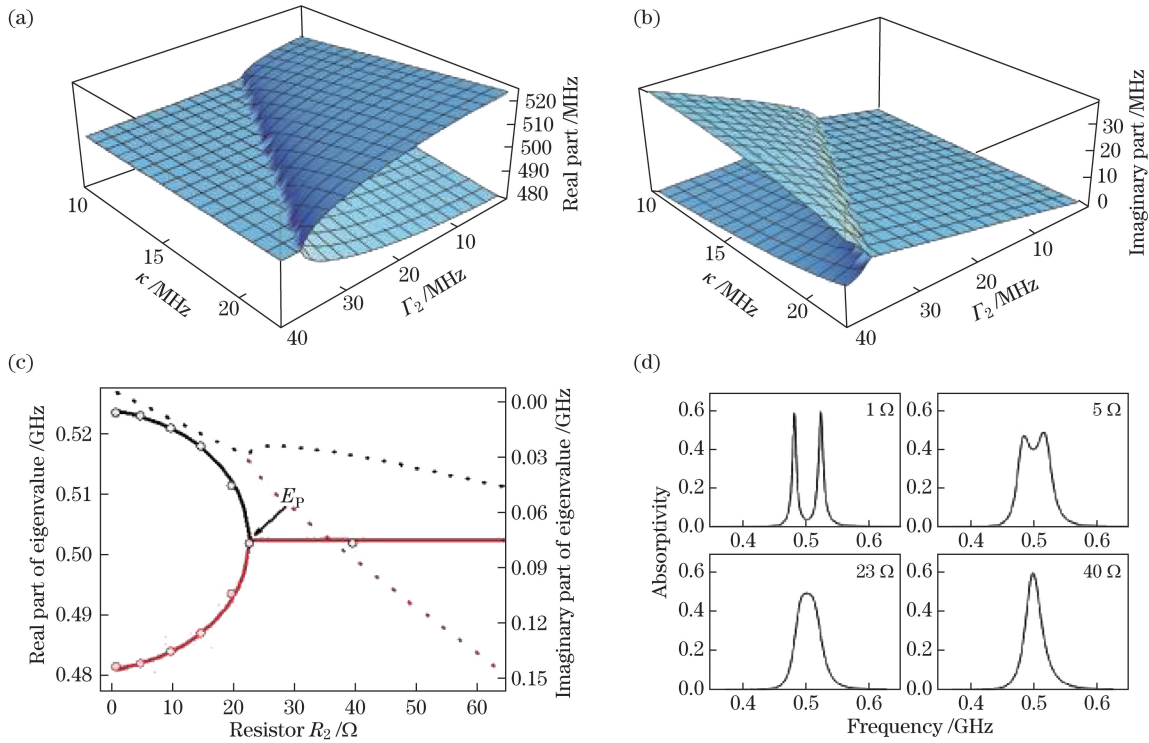


图 4 二态非厄米系统。(a)本征值实部随耦合强度及散射损耗的演化;(b)本征值虚部随耦合强度及散射损耗的演化;

(c)本征值解析解的实部及虚部随损耗的演化;(d) $2\times 2$ 非厄米系统的仿真相干吸收谱

Fig. 4 Two-state non-Hermitian system. (a) Evolution of real part of eigenvalue with coupling strength and scattering loss; (b) evolution of imaginary part of eigenvalue with coupling strength and scattering loss; (c) evolution of real and imaginary parts of eigenvalue with loss; (d) simulated coherent absorption spectra of  $2\times 2$  non-Hermitian system

### 3.3 高维开放非厄米系统

以上述一个 $2\times 2$ 非厄米系统为基础,构建 $4\times 4$ 非厄米系统。4个开口谐振环因其激励方式不同,分别记作“亮态”A、“暗态”B、“亮态”C、“暗态”D,加载的电容分别标记为 $C_1、C_2、C_3、C_4$ ,电阻分别为 $R_1、R_2、R_3、R_4$ 。“亮态”A与“暗态”B为一组,间距为 $S_{intra}$ ,组内耦合系数为 $k$ ,具有相同的谐振频率 $\omega_1$ ;“亮态”C和“暗态”D为一组,间距也等于 $S_{intra}$ ,组内耦合系数亦为 $k$ ,具有相同的谐振频率 $\omega_2$ 。两组 $2\times 2$ 非厄米系统之间的间距为 $S_{inter}$ ,引入组间耦合系数 $t'$ 。两个“亮态”和两个“暗态”之间的间距都大于20 mm,可认为没有近场耦合。基材尺寸长 $x=120\ \text{mm}$ ,宽 $y=120\ \text{mm}$ ,厚度 $h=0.787\ \text{mm}$ 。本结构四个谐振环只与相邻的“暗态”、“亮态”耦合共振。两个“亮态”分别由上下两条微带线直接耦合激励,两个“暗态”则分别加载相同的耗散损耗。

如图 6(a)、(b)所示,四态开放的非厄米系统随耦合强度和损耗参量演化均可获得奇异点,电磁场仿真中,使4个人造原子都加载1.0 pf电容且具有相同的谐振频率 $\omega=0.501\ \text{GHz}$ 。令 $S_{intra}=0.2\ \text{mm}$ 、 $S_{inter}=0.7\ \text{mm}$ ,分别对应四态系统结构的组内耦合强度 $k=0.02175\ \text{GHz}$ 、组间耦合强度 $t'=0.0136\ \text{GHz}$ 。此时

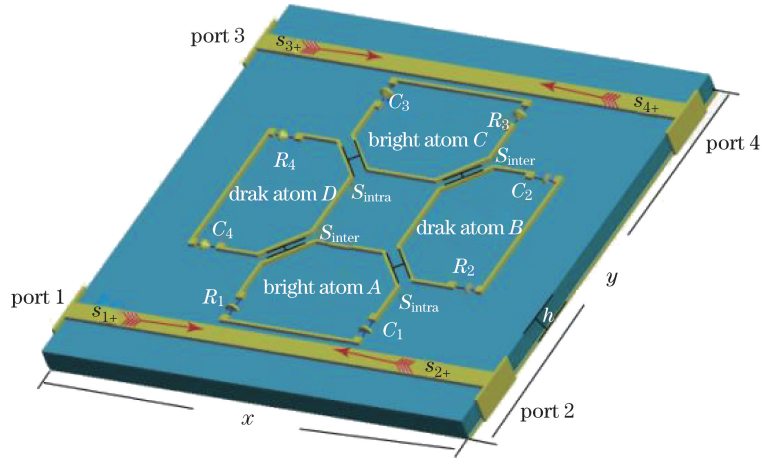


图 5 人造原子  $4 \times 4$  非厄米系统电磁场仿真结构示意图

Fig. 5 Structural diagram of electromagnetic-field simulation of  $4 \times 4$  non-Hermitian system based on artificial atoms

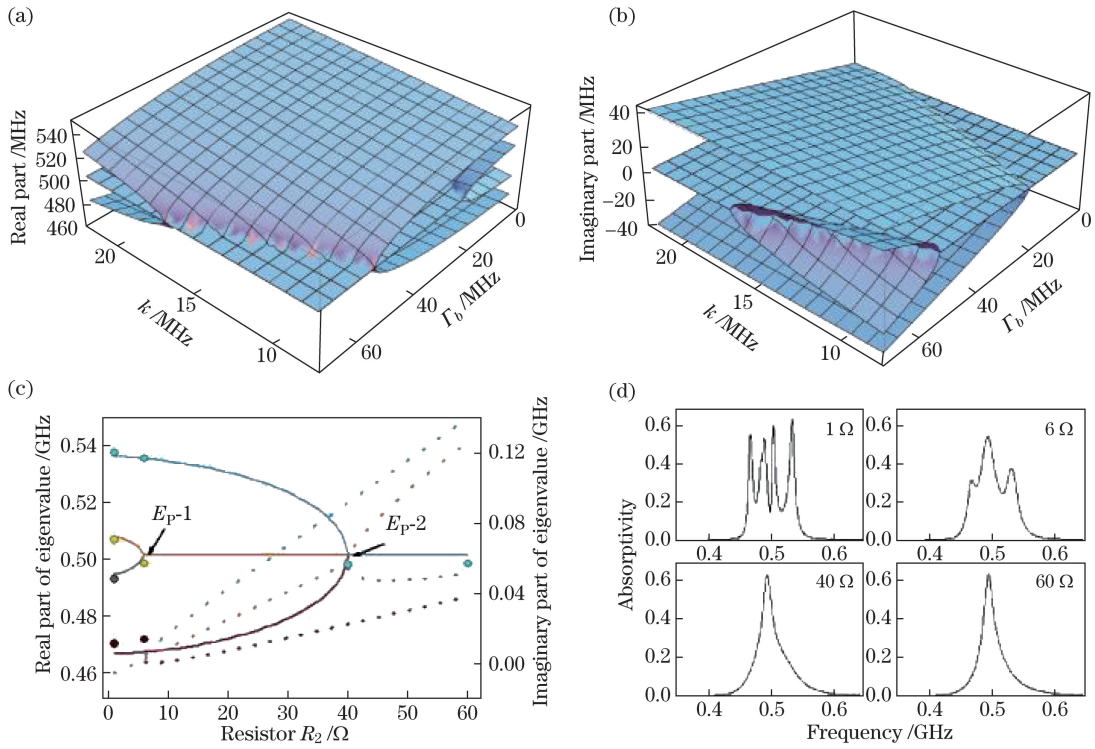


图 6 形成  $E_{p-1}$ 、 $E_{p-2}$  的  $4 \times 4$  非厄米系统。(a) 本征值实部随耦合强度及散射损耗的演化；  
 (b) 本征值虚部随耦合强度及散射损耗的演化；(c) 本征值解析解的实部及虚部随损耗的演化；  
 (d)  $4 \times 4$  非厄米系统的仿真相干吸收谱

Fig. 6  $4 \times 4$  non-Hermitian system with  $E_{p-1}$  and  $E_{p-2}$  formed. (a) Evolution of real part of eigenvalue with coupling strength and scattering loss; (b) evolution of imaginary part of eigenvalue with coupling strength and scattering loss; (c) evolution of real and imaginary parts of eigenvalue as a function of loss; (d) simulated coherent absorption spectra of  $4 \times 4$  non-Hermitian system

(12)、(13)式有如下形式

$$\beta' - 4\sqrt{\beta''} = 4(k - t')^2 - \Gamma^2, \quad (15)$$

$$\beta' + 4\sqrt{\beta''} = 4(k + t')^2 - \Gamma^2. \quad (16)$$

四个端口相干激励,两个“暗态”谐振环同步增加损耗。依靠损耗的增加,可实现本征态的合并。图 6(c)所示是四态非厄米系统本征值的理论数学模拟,其中实线表示实部,数值参照左侧 y 轴;虚线表示虚部,数

值参照右侧  $y$  轴;空心圆点表示电磁场仿真得到的暗态原子不同损耗水平下吸收谱的峰值频率。当  $R_2=R_4$  且小于  $6 \Omega$  时,系统 4 个本征值具有相同的虚部和 4 个不同的实部。损耗增加到  $R_2=R_4=6 \Omega$  时,本征值  $\tilde{\omega}_2$  和  $\tilde{\omega}_3$  的实部重合于  $0.501 \text{ GHz}$ ,产生奇异点  $E_{P-1}$ ,此时系统本征值有相同的虚部和 3 个不同的实部,由于奇异点的产生,系统的本征态变得不完备;继续增加损耗时,由于本征值  $\tilde{\omega}_2$  和  $\tilde{\omega}_3$  的虚部开始分裂,相同的虚部分裂成 3 个不同的虚部;当损耗增加到  $R_2=R_4=40 \Omega$  时,本征值  $\tilde{\omega}_1$  和  $\tilde{\omega}_4$  的实部也重合于  $0.501 \text{ GHz}$ ,产生奇异点  $E_{P-2}$ ,此时系统具有相同的实部和 3 个不同的虚部;继续增加损耗,由于本征值  $\tilde{\omega}_1$  和  $\tilde{\omega}_4$  的虚部开始分裂,3 个虚部分裂成 4 个不同的虚部。图 6(d) 所示是四态非厄米系统对应的“暗态”原子分别加载不同耗散损耗值时的相干吸收谱,吸收的计算公式为 
$$\frac{4 - |s_{11} - s_{12}|^2 - |s_{22} - s_{21}|^2 - |s_{33} - s_{34}|^2 - |s_{44} - s_{43}|^2}{4}$$
,系统的相干吸收峰频率与系统本征值的实部数值

对应得很好。当损耗较小,如  $R_2=R_4=1 \Omega$  时,系统有 4 个不同的吸收峰(即 4 个不同本征值实部),随着损耗的增加,中间的两个吸收峰逐渐靠近并在  $R_2=R_4=6 \Omega$  时重合于  $0.498 \text{ GHz}$ ,对应图 6(c) 中的奇异点  $E_{P-1}$ ,此时吸收谱只有 3 个吸收峰。继续增加损耗,频率最小和频率最大的吸收峰逐渐靠拢,并在  $R_2=R_4=40 \Omega$  时重合于  $0.498 \text{ GHz}$ ,对应图 6(c) 中的奇异点  $E_{P-2}$ ,此时吸收谱只有一个波峰。

实现奇异点  $E_{P-3}$ 、 $E_{P-4}$  需要较大的频率差,仿真实验中令一组谐振环仍加载电容  $1.0 \text{ pf}$ ,另一组谐振环则加载电容  $0.75 \text{ pf}$ ,此时本征值实部、虚部随耦合强度及散射损耗参量的演化情况如图 7(a)、(b) 所示。奇异点  $E_{P-3}$ 、 $E_{P-4}$  的拟合模型及仿真数据如图 7(c) 所示,当  $R_2=R_4$  且小于  $31 \Omega$  时,系统 4 个本征值具有相同的虚部和 4 个不同的实部。损耗增加到  $R_2=R_4=31 \Omega$  时,本征值  $\tilde{\omega}_1$  和  $\tilde{\omega}_2$  的实部重合于  $0.501 \text{ GHz}$ ,产

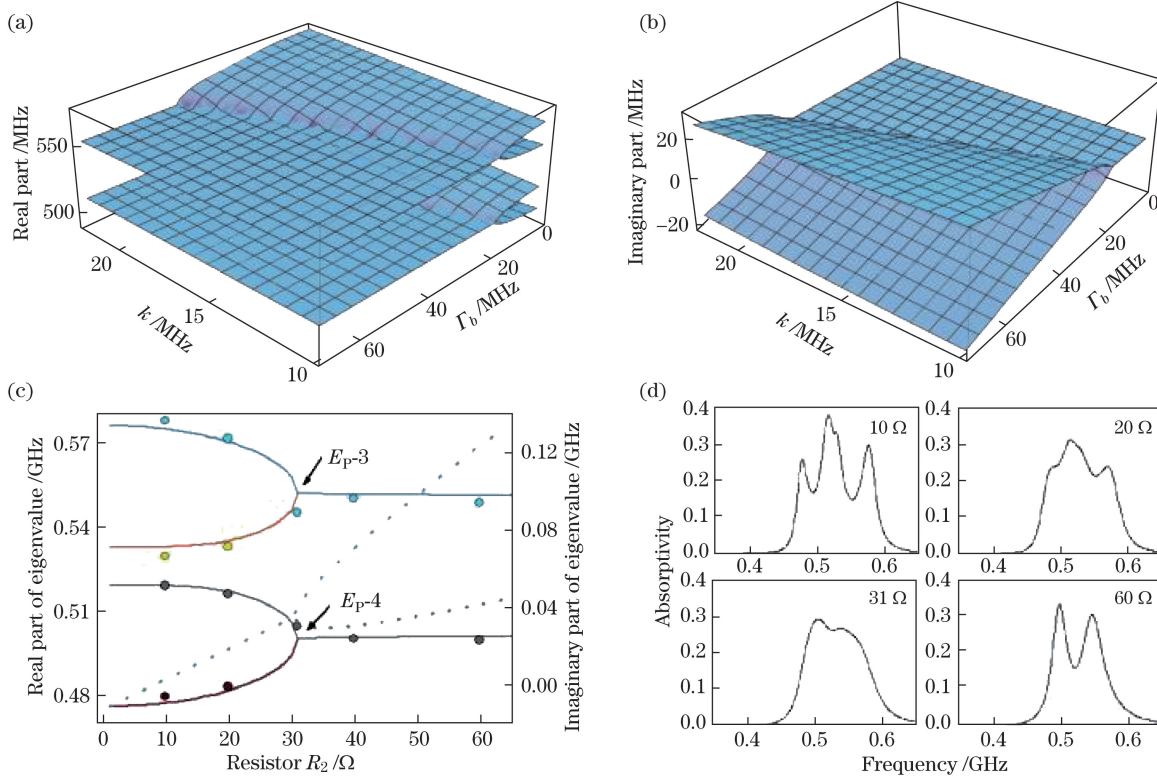


图 7 形成  $E_{P-3}$ 、 $E_{P-4}$  的  $4 \times 4$  非厄米系统。(a) 本征值实部随耦合强度及散射损耗的演化;  
(b) 本征值虚部随耦合强度及散射损耗的演化;(c) 本征值解析解的实部及虚部随损耗的演化;  
(d)  $4 \times 4$  非厄米系统的仿真相干吸收谱

Fig. 7  $4 \times 4$  non-Hermitian system with  $E_{P-3}$  and  $E_{P-4}$  formed. (a) Evolution of real part of eigenvalue with coupling strength and scattering loss; (b) evolution of imaginary part of eigenvalue with coupling strength and scattering loss; (c) evolution of real and imaginary parts of eigenvalue as a function of loss; (d) simulated coherent absorption spectra of  $4 \times 4$  non-Hermitian system



生奇异点  $E_{P-3}$ ;本征值  $\bar{\omega}_3$  和  $\bar{\omega}_4$  的实部重合于 0.551 GHz,产生奇异点  $E_{P-4}$ 。此时系统具有两个不同的实部和相同的虚部。继续增加损耗时,本征值  $\bar{\omega}_1$  和  $\bar{\omega}_2$  及本征值  $\bar{\omega}_3$  和  $\bar{\omega}_4$  的虚部分裂,由拟合模型可知,系统有两个不同的虚部和两个不同的实部。系统的相干吸收谱如图 7(d)所示,当  $R_2=R_4=10 \Omega$  时,有 4 个不同的吸收峰;损耗增加到  $R_2=R_4=31 \Omega$  时,吸收峰两两重合于 0.5045 GHz 和 0.545 GHz,对应奇异点  $E_{P-3}$ 、 $E_{P-4}$ ;继续增加损耗,系统依然只有两个不同的吸收峰。

对于第五类奇异点  $E_{P-5}$ ,需要使  $\beta'$  和  $\beta''$  在引入损耗为某一定值时同时为零。主要参数如下: $\omega_1=0.501 \text{ GHz}$ , $\omega_2=0.529 \text{ GHz}$ , $k=0.0176 \text{ GHz}$ , $t'=0.0162 \text{ GHz}$ ,此时本征值实部、虚部随耦合强度及散射损耗参量的演化情况如图 8(a)、(b)所示。奇异点  $E_{P-5}$  的拟合模型及仿真实验数据如图 8(c)所示,当  $R_2=R_4$  且小于  $6 \Omega$  时,系统 4 个本征值具有相同的虚部和 4 个不同的实部。损耗增加到  $R_2=R_4=6 \Omega$  时,本征值  $\bar{\omega}_2$  和  $\bar{\omega}_3$  的实部重合于 0.5155 GHz,产生奇异点  $E_{P-1}$ ,此时系统有 3 个不同的实部和一个相同的虚部,即由于奇异点的产生,系统的 4 个本征态变成 3 个,本征态不完备。继续增加损耗时,本征值  $\bar{\omega}_2$  和  $\bar{\omega}_3$  的虚部分裂,此时系统本征值有 3 个不同的虚部和 3 个不同的实部;当损耗增加到  $R_2=R_4=34.36 \Omega$  时,本征值态  $\bar{\omega}_1$  和  $\bar{\omega}_4$  的实部重合于 0.5155 GHz,此时分裂的虚部也再次合并,产生奇异点  $E_{P-5}$ ,此时系统只有一个实部和一个虚部。系统的 4 个本征态在这一点处合并为一个,产生一个二态系统中没有的高阶奇异点。继续增加损耗,合并的本征态分裂,系统此时有两个不同的本征值实部和两个不同的本征值虚部,对应相干吸收谱的演化如图 8(d)所示。当损耗较小,如  $R_2=R_4=1 \Omega$  时,系统有 4 个不同的吸收峰(即本征值实部),随着损耗的增加,中间的两个吸收峰逐渐靠近并在  $R_2=R_4=6 \Omega$  时重合于 0.513 GHz,对应图 8(c)的奇异点  $E_{P-1}$ ;继续增加损耗,频率最小和频率最大的吸收峰逐渐靠拢,并在  $R_2=R_4=34.36 \Omega$  时重合于 0.513 GHz,对应图 8(c)的高阶奇异点  $E_{P-5}$ 。继续增加损耗,合并的吸收峰分裂成两个。

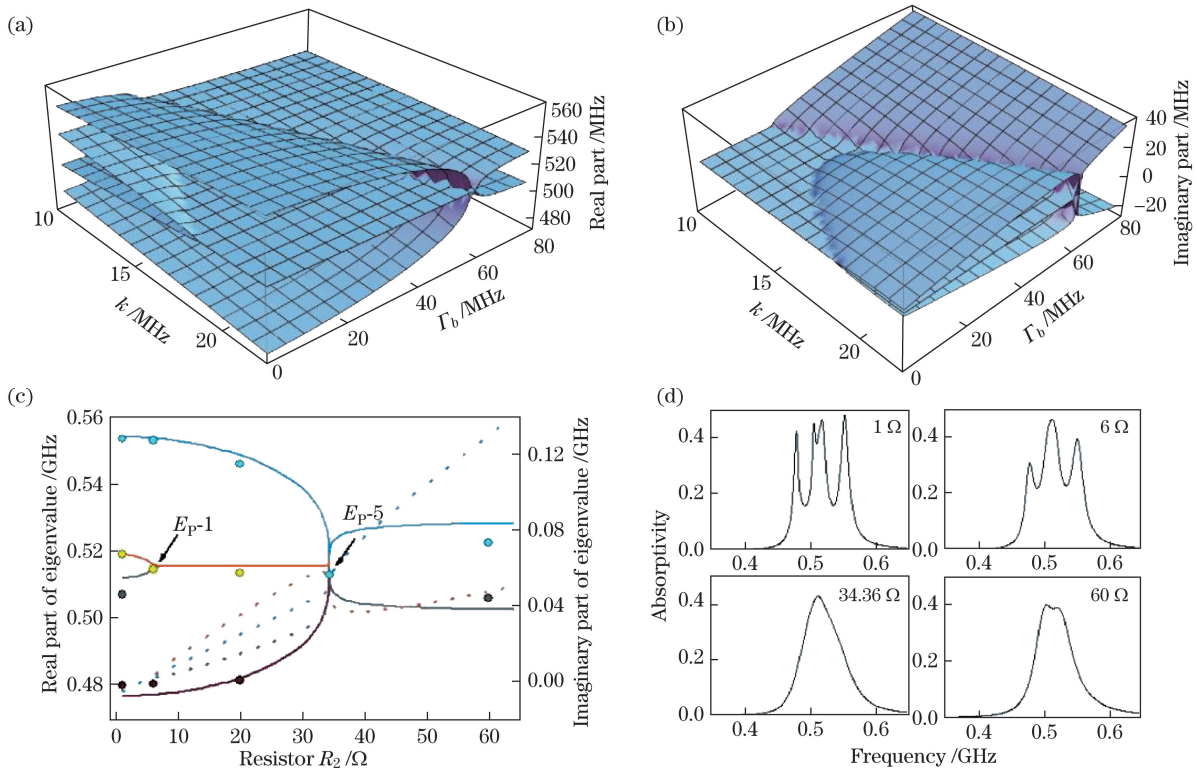


图 8 形成  $E_{P-5}$  的  $4 \times 4$  非厄米系统。(a)本征值实部随耦合强度及散射损耗的演化;(b)本征值虚部随耦合强度及散射损耗的演化;(c)本征值解析解的实部及虚部随损耗的演化;(d) $4 \times 4$  非厄米系统的仿真相干吸收谱

Fig. 8  $4 \times 4$  non-Hermitian system with  $E_{P-5}$  formed. (a) Evolution of real part of eigenvalue with coupling strength and scattering loss; (b) evolution of imaginary part of eigenvalue with coupling strength and scattering loss; (c) evolution of real and imaginary parts of eigenvalue as a function of loss; (d) simulated coherent absorption spectra of  $4 \times 4$  non-Hermitian system



## 4 结 论

基于人造原子结构,研究了  $4 \times 4$  非厄米系统奇异点的多样性,通过仿真四端口开放系统的相干吸收谱,证明了  $4 \times 4$  非厄米系统具有由任意两个不同本征态合并产生的四种奇异点,以及由四个本征态合并产生的高阶奇异点。相比二维系统中由两个本征态合并产生的简单平方根奇点的奇异点,高维系统中的奇异点性质更加丰富。如奇异点  $E_{p-3}$  和  $E_{p-4}$ ,虽然仍是来自于两个本征态的合并,但是其本征值对损耗(或者耦合强度)的依赖关系不再是简单的平方根关系;更加重要的是, $E_{p-5}$  来自于四个本征态的合并,其本征值对损耗(或者耦合强度)的依赖关系是四次方根的关系。这种只有在高阶非厄米系统中才能出现的特殊类型奇异点,可能在手征模式和拓扑性能上具有非凡表现。基于高维系统五种奇异点的性质区别, $E_{p-1}$ 、 $E_{p-2}$  可用于设计基于平方根依赖关系的高灵敏度传感器; $E_{p-3}$ 、 $E_{p-4}$ 、 $E_{p-5}$  则可用于设计基于四次方根依赖关系的传感器,理论上这种传感器将具有更高的灵敏性。采用平面微波超材料,利用可变电容和可变电阻调节人造原子的本征频率和本征损耗,方法简单易操作,可为高维度奇异点的进一步研究提供一个有效的平台。

## 参 考 文 献

- [1] Rotter I. Non-Hermitian Hamilton operator and the physics of open quantum systems[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009, 42(15): 1359-1366.
- [2] Dembowski C, Dietz B, Gräf H D, *et al.* Encircling an exceptional point[J]. Physical Review E, 2004, 69(5): 056216.
- [3] Stehmann T, Heiss W D, Scholtz F G. Guidebook of electronic circuits[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1974: 20-27.
- [4] Peng B, Özdemir Ş K, Rotter S, *et al.* Loss-induced suppression and revival of lasing[J]. Science, 2014, 346(6207): 328-332.
- [5] Ding K, Ma G, Xiao M, *et al.* The emergence, coalescence and topological properties of multiple exceptional points and their experimental realization[J]. Physical Review X, 2015, 6(2): 021007.
- [6] Peng B, Özdemir Ş K, Lei F, *et al.* Parity-time-symmetric whispering-gallery microcavities[J]. Nature Physics, 2014, 10(5): 394-398.
- [7] Sun Y, Tan W, Li H Q, *et al.* Experimental demonstration of a coherent perfect absorber with PT phase transition[J]. Physical Review Letters, 2014, 112(14): 143903.
- [8] Wu Lihua, Wang Zhengping, Zhang Xiangli. Theoretical research on epsilon's nonlinearity of a metamaterial's permittivity[J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(4): 1038-1042.  
武立华, 王政平, 张祥丽. 一种异质材料介电常数的非线性理论研究[J]. 光学学报, 2009, 29(4): 1038-1042.
- [9] Ding Yuan, Zhu Junwei, Guo Yuhan, *et al.* Experimental study of resonance characteristics of split ring resonators in terahertz band[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(2): 0216002.  
丁元, 朱俊伟, 郭宇晗, 等. 开口谐振环阵列在太赫兹波段的谐振特性实验研究[J]. 光学学报, 2015, 35(2): 0216002.
- [10] Demange G, Graefe E M. Signatures of three coalescing eigenfunctions[J]. Journal of Physics A, 2011, 45(2): 25303-25316.
- [11] Wiersig J. Sensors operating at exceptional points: General theory[J]. Physical Review A, 2016, 93(3): 033809.
- [12] Wiersig J. Enhancing the sensitivity of frequency and energy splitting detection by using exceptional points: Application to microcavity sensors for single-particle detection[J]. Physical Review Letters, 2014, 112(20): 203901.
- [13] Pendry J B, Holden A J, Robbins D J, *et al.* Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques, 1999, 47(11): 2075-2084.
- [14] Peng B, Özdemir Ş K, Liertzer M, *et al.* Chiral modes and directional lasing at exceptional points[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2016, 113(25): 6845-6850.
- [15] Dembowski C, Gräf H, Hamey H L, *et al.* Experimental observation of the topological structure of exceptional points[J]. Physical Review Letters, 2001, 86(5): 787-790.