# 基于双自由曲面的 LED 均匀照明准直透镜设计

赵 欢<sup>1,2</sup>,李长庚<sup>1</sup>,陈志涛<sup>2</sup>,张志清<sup>2</sup>,赵 维<sup>2</sup>,王君君<sup>2</sup> <sup>1</sup>中南大学物理与电子学院,湖南 长沙 410012; <sup>2</sup>广东省半导体产业技术研究院,广东 广州 510651

**摘要** 基于几何光学、能量守恒定律及菲涅耳定律等相关理论,提出了一种双自由曲面半导体发光二极管(LED) 准直透镜的光学设计方法,并给出了构建准直透镜模型详细的算法设计。自由曲面是一种关于中心轴旋转对称的 曲面,该曲面的二维轮廓在非均匀有理 B 样条曲线的方法理论基础上,采用 ProE 软件搭建而成。通过蒙特卡罗光 线追迹模拟发现,相比传统的单自由曲面准直透镜,双自由曲面准直透镜不仅提高了照度均匀性,而且在能量利用率 上也有显著的提高。研究结果表明,采用双自由曲面将大大提升准直透镜的设计空间,改善 LED 透镜的光学性能。 关键词 光学设计;双自由曲面;算法设计;蒙特卡罗光线追迹;准直透镜 中图分类号 O439 **文献标识码** A doi: 10.3788/AOS201737.0422001

# Design of Collimating Lens with Uniform Illumination for LED Based on Double Freeform Surface

Zhao Huan<sup>1,2</sup>, Li Changgeng<sup>1</sup>, Chen Zhitao<sup>2</sup>, Zhang Zhiqing<sup>2</sup>, Zhao Wei<sup>2</sup>, Wang Junjun<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Physical Science and Electronics, Central South University, Changsha, Hunan 410012, China; <sup>2</sup> Guangdong Institute of Semiconductor Industrial Technology, Guangzhou, Guangdong 510651, China

**Abstract** An optical design of double freeform surface semiconductor light-emitting diode (LED) collimating lens is proposed based on relevant theories such as geometrical optics, law of energy conservation, and the Fresnel's law. Detailed algorithm design for constructing collimating lens model is presented as well. A freeform surface is a surface that is rotationally symmetric around a central axis. The 2D contour of this surface is constructed on the basis of non-uniform rational B-splines (NURBS) method and by ProE software. Through Monte Carlo ray tracing simulation, it is found that, compared with conventional single freeform surface collimating lens, double freeform surface collimating lens has greatly enhanced the illumination uniformity as well as the energy utilization. The research results have shown that, by using double freeform surface design, the design space can be remarkably extended, and the optical performance of collimating lens can be improved.

Key words optical design; double freeform surface; algorithm design; Monte Carlo ray tracing; collimating lens OCIS codes 220.3620; 220.2945

## 1 引 言

半导体发光二极管(LED)是继白炽灯、荧光灯之后的第三次光源革命,LED具有高效、节能、环保、长寿命、近似点光源等显著特点,可广泛应用于室内和室外照明领域,如投影背光源、道路照明、各种车灯等<sup>[1]</sup>,市场前景广阔。然而 LED 光源发出的光是近似朗伯分布的,即光强呈余弦分布,不能直接满足不同应用场所及应用需求,因此需要对其进行二次光学设计,以改变其光线输出方向,实现光路控制<sup>[1-2]</sup>。

收稿日期: 2016-10-25; 收到修改稿日期: 2016-11-30

基金项目:国家自然科学基金(11304048)、广东省自然科学基金(2015A030310023)、广东省战略性新兴产业发展专项资金 LED 产业项目(2012A080301003,2012A080302002)

作者简介:赵 欢(1991-),女,硕士研究生,主要从事紫外 LED 方面的研究。E-mail: 1404100618@csu.edu.cn

导师简介:李长庚(1970一),男,博士,教授,博士生导师,主要从事无线通信方面的研究。

E-mail: lcgeng@mail.csu.edu.cn(通信联系人)

目前,二次光学设计是 LED 固态照明技术的一个极其重要的研究课题,国内外科研机构已在此领域进行了广泛的研究<sup>[3-4]</sup>。在二次光学设计的诸多方法中,由于自由曲面具有较高的灵活性和自由度,另外还有能够提高系统的光学性能并简化系统的结构等优势,因此通过构建自由曲面进行 LED 二次光学设计以实现 光路控制已发展成为目前的主流设计方案<sup>[5-9]</sup>。在众多光学元件设计方法中,准直光路设计在探照灯、聚光 灯、手电筒、夜视系统等方面具有广泛应用,一直受到科研工作者的青睐<sup>[5]</sup>。目前,研究者成功设计了多款基 于 LED 光源的自由曲面准直透镜,主要有两种类型:一种是非连续自由曲面的菲涅耳透镜<sup>[10]</sup>,另一种是传 统连续的单自由曲面透镜<sup>[8,11-12]</sup>。然而大部分设计结果的光强分布曲线呈类高斯分布,使得大部分能量分 配在照射区域中央,产生明显的眩光。为了实现准直系统的均匀照明,许多光学设计方案被提出,例如 Chen 等<sup>[13]</sup>采用全反射式透镜与双反射镜相结合的思路提出了一种组合透镜的设计。

为了解决照明均匀性的问题,本文发展了双自由曲面光学设计方法在 LED 准直透镜中的应用,给出了 构建准直透镜模型详细的算法设计,并基于该算法实现了一款 LED 准直透镜设计。相比传统的单自由曲面 准直透镜,该款准直透镜不仅提高了照度均匀性,而且在能量利用率上有了显著的提高。

## 2 透镜设计方法及仿真模拟分析

#### 2.1 设计原理

如图 1 所示,本研究设计的准直透镜结构是采用双自由曲线绕中心轴旋转而成的。设计过程中定义透镜材料折射率为 n,空气折射率  $n_0=1$ ,由于 LED 光源近似朗伯光源<sup>[14]</sup>,能量集中在小角度范围内,针对这一特点,在设计过程中,选择的模拟光源光强分布为朗伯分布,即光强  $I=I_0\cos\theta$ ,且只对光源  $0 \sim \theta$  角范围内的光线进行准直控制。 $I_0$ 为光源垂直方向上的发光强度, $\theta$ 为任意方向上的光线与垂直方向上的夹角。



图 1 准直透镜形成示意图 Fig. 1 Schematic of collimating lens formation

#### 2.2 算法设计

算法设计原理如图 2 所示:建立直角坐标系,LED 光源位于 O 点,LED 光线经透镜内表面 A 点与外表面 B 点折射后垂直入射接收面。其中,入射光OA 经内表面折射后形成透射光AB,法向量为NA,切向量为TA,然后透射光AB作为外表面入射光再次折射后形成透射光BR,法向量为NB,切向量为TB。





根据菲涅耳定律可得出:

$$n_{0} \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} \times \overrightarrow{NA} = n \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \times \overrightarrow{NA}, \qquad (1)$$

$$n \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \times \overrightarrow{NB} = n_0 \frac{\overrightarrow{BR}}{|\overrightarrow{BR}|} \times \overrightarrow{NB}_{\circ}$$
<sup>(2)</sup>

化简(1)式与(2)式后,可得出以下方程式:

$$\left[n_{0}^{2}+n^{2}-2n\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}\right)\right]^{1/2}\overrightarrow{NA}=n\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}-n_{0}\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|},$$
(3)

$$\left[n_{0}^{2}+n^{2}-2n\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{BR}}{|\overrightarrow{BR}|}\right)\right]^{1/2}\overrightarrow{NB}=n_{0}\frac{\overrightarrow{BR}}{|\overrightarrow{BR}|}-n\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}.$$
(4)

为了求解(3)、(4)式,定义A、B坐标分别为( $x_a$ , $y_a$ )、( $x_b$ , $y_b$ ),则:

$$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)_{\circ}$$
<sup>(5)</sup>

联立(3)、(4)、(5)式有:

$$\overrightarrow{NA} = \left[\frac{n \cdot (x_b - x_a)}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}} - \frac{n_0 \cdot x_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}, \frac{n \cdot (y_b - y_a)}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}} - \frac{n_0 \cdot y_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}\right], \quad (6)$$

$$R_{1} = \sqrt{\left[\frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}} - \frac{n_{0} \cdot x_{a}}{\sqrt{x_{a}^{2} + y_{a}^{2}}}\right]^{2} + \left[\frac{n \cdot (y_{b} - y_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}} - \frac{n_{0} \cdot y_{a}}{\sqrt{x_{a}^{2} + y_{a}^{2}}}\right]^{2}} \circ (7)$$

$$\left[\begin{array}{c} n \cdot (x_{b} - x_{a}) & n \cdot (y_{b} - y_{a}) \end{array}\right]$$

$$\overrightarrow{NB} = \left[\frac{n_{0} - \frac{n}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}}{R_{2}}, \frac{-\frac{n}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}}{R_{2}}\right],$$
(8)

$$R_{2} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}\right]^{2} + \left[\frac{n \cdot (y_{b} - y_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}\right]^{2}},$$

$$R_{2} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}\right]^{2}},$$

$$R_{2} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}\right]^{2}},$$

$$R_{2} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}\right]^{2}},$$

$$R_{2} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}\right]^{2}},$$

$$R_{2} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}\right]^{2}},$$

$$R_{2} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}\right]^{2}},$$

$$R_{2} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}\right]^{2}},$$

$$R_{3} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}\right]^{2}},$$

$$R_{3} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}\right]^{2}},$$

$$R_{3} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}\right]^{2}},$$

$$R_{4} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}\right]^{2}},$$

$$R_{4} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}\right]^{2}},$$

$$R_{4} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}\right]^{2}},$$

$$R_{4} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}\right]^{2}},$$

$$R_{4} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}\right]^{2}},$$

$$R_{4} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}\right]^{2}},$$

$$R_{5} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}\right]^{2}},$$

$$R_{5} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}\right]^{2}},$$

$$R_{5} = \sqrt{\left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - x_{a})^{2}}\right]^{2$$

1店(0)、(0)式

$$k_{a} = -\left[\frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}} - \frac{n_{0} \cdot x_{a}}{\sqrt{x_{a}^{2} + y_{a}^{2}}}\right] / \left[\frac{n \cdot (y_{b} - y_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}} - \frac{n_{0} \cdot y_{a}}{\sqrt{x_{a}^{2} + y_{a}^{2}}}\right], (10)$$

$$k_{b} = \left[n_{0} - \frac{n \cdot (x_{b} - x_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}\right] / \left[\frac{n \cdot (y_{b} - y_{a})}{\sqrt{(x_{b} - x_{a})^{2} + (y_{b} - y_{a})^{2}}}\right]_{0} (11)$$

为了进一步求出内外表面的离散轨迹坐标点,如图3所示,选取任意内外表面相邻两点分别为A<sub>a</sub>、  $A_{n+1}$ 、 $B_n$ 、 $B_{n+1}$ ,其坐标分别为( $x_{an}$ , $y_{an}$ )、( $x_{an+1}$ , $y_{an+1}$ )、( $x_{bn}$ , $y_{bn}$ )、( $x_{bn+1}$ , $y_{bn+1}$ );接收面的入射点为 $R_n$ 、  $R_{n+1}$ ,对应坐标分别为 $(x_m, y_m)$ 、 $(x_{m+1}, y_{m+1})$ 。并定义 $\overrightarrow{OA_n}$ 与 $\overrightarrow{OA_{n+1}}$ 的夹角为  $\Delta \theta$ , $\overrightarrow{OA_n}$ 与 x 轴的夹角为  $\theta_n$ 。 当  $\Delta \theta$  很小时,可利用欧拉公式根据  $A_n$ 、 $B_n$  两点坐标求出点  $A_{n+1}$ 、 $B_{n+1}$ 的坐标。具体推导如下:





首先根据(10)、(11)式,可求出过点 A<sub>n</sub> 与 B<sub>n</sub> 的切线方程分别为

$$y = k_{an} \cdot (x - x_{an}) + y_{an}, \qquad (12)$$

$$y = k_{bn} \cdot (x - x_{bn}) + y_{bn},$$
 (13)

式中 kan, kbm 分别为过点 An 及 Bn 的切线斜率.

此外,如图 3 所示,容易写出 OA<sub>n+1</sub>的直线方程如下:

$$y = \tan(\Delta\theta + \theta_n) \cdot x_{\circ} \tag{14}$$

利用欧拉公式,当  $\Delta\theta$  很小时,点  $A_{n+1}$  与直线  $OA_{n+1}$  与过点  $A_n$  的切线交点近似重合,则联立(12) 与 (14) 式可求出点  $A_{n+1}$  的坐标:

$$x_{an+1} = \frac{k_{an} \cdot x_{an} - y_{an}}{k_{an} - \tan(\Delta\theta + \theta_n)},$$
(15)

$$y_{an+1} = \tan(\Delta\theta + \theta_n) \cdot \frac{k_{an} \cdot x_{an} - y_{an}}{k_{an} - \tan(\Delta\theta + \theta_n)}$$
(16)

而 B<sub>n+1</sub>坐标可通过能量守恒定律(注:在此忽略菲涅耳损失)以及接收面照度均匀分布得出:

$$\int_{0}^{0} \int_{0}^{2\pi} I_{0} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{y_{rn}^{2}}{y^{2} rn + 1},$$
(17)

化简(17)式有:

$$y_{rn+1} = y_{rn} \cdot \frac{1 - \cos 2(\theta_n + \Delta \theta)}{1 - \cos 2\theta_n}.$$
(18)

由于  $B_{n+1}R_{n+1}$ 、 $B_nR_n$  与 x 轴彼此平行,以及当  $\Delta \theta$  很小时,点  $B_{n+1}$ 与直线  $A_{n+1}R_{n+1}$ 与过点  $B_n$  的切线 交点近似重合,则联立(13)式与(18)式可求出点  $B_{n+1}$ 的坐标:

$$x_{bn+1} = x_{bn} + \frac{y_{bn}}{k_{bn}} \left[ \frac{1 - \cos 2(\theta_n + \Delta \theta)}{1 - \cos 2\theta_n} - 1 \right],$$
(19)

$$y_{bn+1} = y_{bn} \cdot \frac{1 - \cos 2(\theta_n + \Delta \theta)}{1 - \cos 2\theta_n}.$$
(20)

至此,透镜算法推导完成。

#### 2.3 实体模型建立

透镜材料采用高透光材料聚甲基丙烯酸甲酯(PMMA),其折射率n=1.49,引人初值:点 $A_1$ 坐标为(12, 0.012),点 $B_1$ 坐标为(25,0.02),以及初始角 $\angle A_1OX = 0.001^\circ$ ,定义步长  $\Delta \theta = 0.001^\circ$ ,然后代入已推导算法 的迭代关系中计算出各离散坐标点轨迹曲线如图 4(a)所示,然后将计算所得离散坐标数据导入 3D 建模软 件,建立实体透镜模型,如图 4(b)所示。为了验证所设计透镜性能,在此参照 Chen 等<sup>[13]</sup>及 Shen 等<sup>[15]</sup>对准直 透镜的设计方法,设计了一款传统的单自由曲面准直透镜,作为对比,同样只对光源 0~ $\theta$  角范围内光线进行准 直控制,且离光源距离与双曲面透镜离光源距离保持一致,轨迹曲线与实体模型分别如图 4(c)、(d)所示。

### 3 仿真模拟与结果分析

将得到的实体模型导入光学仿真软件 TracePro 中,设置好透镜的材料属性、光源属性以及接收面属性, 其中,0~θ光源是以1 mm×1 mm平面朗伯光源通过周围吸收板吸收大角度光源的方式制成的,总光辐射 量为 0.31858 W,进入透镜的光线约 30 万条,接收面(分析面)为离光源 10 m 的正方形屏。

采用蒙特卡罗光线追迹模拟对上述两透镜实体模型进行验证,光线追迹结果如图 5(a)所示,图中可直 观看到 LED 光源发出的光经透镜后变成近准直光,基本符合准直透镜设计要求。图 5(b)为距离 LED 光源 10 m 处接收面的照度分布图和发光强度分布图。通过两者对照发现,相比传统的单自由曲面透镜,双自由 曲面透镜在照度均匀性(参考照明区域内的照度最小值与照度最大值之间的比值)及能量利用率(参考照明 区域内接收能量与 LED 光源发出的光经透镜表面的入射能量之间的比值)上都有了显著的提高,两模拟结





图 4 双自由曲面透镜的 (a) 旋转坐标点轨迹与 (b) 对应的 3D 实体模型;传统单自由曲面透镜的 (c) 旋转坐标点轨迹与 (d) 对应的 3D 实体模型



果的具体光学性能对比如表1所示。双自由曲面透镜性能提高的原因可归结为:双自由曲面相比单自由曲 面在一定程度上增加了设计的自由度与灵活性,使得中部高光强分布向边缘低光强分布转移而实现整体光 强分布均匀,同时使透镜结构更加紧凑。



图 5 (a) 光线追际模拟结果; (b) 不同距离的照度分布

Fig. 5 (a) Ray tracing simulation results; (b) illuminance distribution with different distances

表 1 透镜光学性能对比

Table 1	Ontical	performance	comparison	of	the	lenses
r abic r	Optical	performance	companison	01	the	iciisco

Lens type	Energy utilization $/ \frac{9}{0}$	Illuminance uniformity / $\%$	Beam divergence half-angle /(°)
Double freeform surface lens	91.3	98	1.7
Single freeform surface lens	86.2	84	2.0

# 4 结 论

基于非成像光学理论,利用能量守恒定律和菲涅耳定律,计算出准直透镜内外自由曲面的离散坐标点, 借助 3D 建模软件和 TracePro 光学仿真软件,设计了一款双自由曲面准直透镜与一款传统的单自由曲面准 直透镜。相比于传统的单自由曲面准直透镜,双自由曲面准直透镜在照度均匀性及能量利用率上有了明显 的提高。

#### 参考文献

- [1] Feng Qibin, Li Ya'ni, Li Qigong, *et al*. Lens array with double freeform surface for LED backlight in LED imaging engine of helmet-mounted display[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(11): 1123003.
  冯奇斌,李亚妮,李其功,等. 用于头显液晶像源 LED 背光的双自由曲面透镜阵列设计[J]. 光学学报, 2015, 35 (11): 1123003.
- [2] Gui Li, Sun Xiuhui, Yin Shaoyun, et al. Modeling error analysis and compensation design for free-form uniform

illumination lens[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(10): 1022008.

桂 立,孙秀辉,尹韶云,等.自由曲面匀光透镜的建模误差分析及补偿设计[J].光学学报,2015,35(10): 1022008.

- [3] Chen H C, Lin J Y, Chiu H Y. Rectangular illumination using a secondary optics with cylindrical lens for LED street light[J]. Optics Express, 2013, 21(3): 3201-3212.
- [4] Pan J W, Su Y C, Chen Y S. Secondary optical element design for intracorporeal LED illumination system [J]. Optics Letters, 2014, 39(2): 224-227.
- [5] Chen J J, Lin C T. Freeform surface design for a light-emitting diode-based collimating lens[J]. Optical Engineering, 2010, 49(9): 093001.
- [6] Ries H, Muschaweck J A. Tailoring freeform lenses for illumination [C]. SPIE, 2001, 4442: 43-50.
- [7] Wang G, Wang L, Li L, et al. Secondary optical lens designed in the method of source-target mapping [J]. Applied Optics, 2011, 50(21): 4031-4036.
- [8] Zhao S, Wang K, Chen F, et al. Lens design of LED searchlight of high brightness and distant spot[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2011, 28(5): 815-820.
- [9] Chen Enguo, Liu Peng, Yu Feihong. Synchronized parameter optimization of the double freeform lenses illumination system used for the CF-LCoS pico-projectors[J]. Optics & Laser Technology, 2012, 44(7): 2080-2087.
- [10] Wang Guangzhen, Wang Lili, Li Fuli, et al. Design of optical element combining Fresnel lens with microlens array for uniform light-emitting diode lighting[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2012, 29(9): 1877-1884.
- [11] Chen J, Wang T, Huang K, et al. Freeform lens design for LED collimating illumination[J]. Optics Express, 2012, 20(10): 10984-10995.
- [12] Aslanov E, Doskolovich L L, Moiseev M A. Thin LED collimator with free-form lens array for illumination applications
   [J]. Applied Optics, 2012, 51(30): 7200-7205.
- [13] Chen Chen, Zhang Xiaohui. Design of optical system for collimating the light of an LED uniformly[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2014, 31(5): 1118-1125.
- [14] Liu Zhengquan, Sun Yaojie, Lin Yandan. Freeform reflector design for rectangular illuminance distribution based on differential geometry[J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(10): 1022006.
   刘正权,孙耀杰,林燕丹. 基于微分几何的矩形照度分布自由曲面反射器设计[J]. 光学学报, 2012, 32(10): 1022006.
- [15] Shen Y N, Huang Y F, Han X. Design of collimating system for LED source[C]. SPIE, 2013, 9042: 90420V.