

均匀椭球形液滴三阶和四阶彩虹条纹特征

管露露, 于海涛, 沈建琪

上海理工大学理学院, 上海 200093

摘要 基于矢量光线追踪(VRT)模型,研究了均匀椭球形液滴三阶和四阶彩虹区域的光学焦散结构,详细探究了光学焦散结构的演化过程,得到了三阶彩虹条纹的模拟结果、条纹曲率以及三阶彩虹和双曲脐条纹尖点焦散位置与椭球度的关系。

关键词 散射; 光散射; 散射颗粒; 彩虹

中图分类号 O436 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201737.0329001

Third- and Fourth-Order Rainbow Fringe Characteristics of Homogeneous Ellipsoid Droplets

Guan Lulu, Yu Haitao, Shen Jianqi

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China

Abstract Based on the vector-ray tracing (VRT) model, the optical caustic structures of homogeneous ellipsoid droplets in the third-order and fourth-order rainbow regions are studied. The evolution process of the optical caustic structure is investigated in detail. The simulated result and fringe curvature of the third-order rainbow fringe as well as the relationship between the cusp location of the third-order rainbow and hyperbolic umbilic fringes and the aspect ratio are obtained.

Key words scattering; light scattering; scattering particle; rainbow

OCIS codes 290.5850; 350.4990

1 引 言

颗粒参数的测量在很多领域中是非常重要的^[1-3]。在众多的颗粒参数测量技术中,彩虹技术的研究已经取得了比较大的进展。迄今为止已实现了对液滴的折射率、粒径、椭球度和温度等参数的测量,针对液滴彩虹特性的研究是彩虹技术的基础。

早期的彩虹技术研究主要针对球形均匀液滴。Roth等^[4]提出了彩虹技术,通过球形液滴一阶彩虹散射测量液滴的粒径和折射率。由于折射率是温度的函数,因此又可以通过折射率获取液滴的温度信息,从而实现液滴粒径和温度的同时测量。van Beeck等^[5]提出了全场彩虹测温方法(GRT),将彩虹技术应用于雾化场中液滴粒径分布、折射率和平均温度的同时测量。文献[5]给出了35~280 μm粒径范围内的液滴测量结果。GRT假定被测液滴均为球形,忽略了雾化场中非球形液滴的影响。在椭球形液滴的研究方面,Marston等^[6]首次探测到椭球形液滴的广义彩虹图样。随后,彩虹散射中其他典型物理现象也得到了深入研究,如双曲脐、尖点张角率和光学焦散等^[7-9]。Xu等^[10-11]采用德拜级数展开理论对椭球液滴的散射和彩虹效应进行了研究。基于矢量光线追踪(VRT)模型,Yu等^[12-13]研究了椭球形液滴的一阶和二阶彩虹散射中光学焦散结构的演化过程。通过分析超声驻波场中较大的椭球形液滴的远场光散射条纹,Onofri等^[14]给出了矢量复射线方法的实验验证。此外,一些研究者分别给出了液滴三阶、四阶、五阶和七阶彩虹的散射图样^[15-18]。

国内也有相关课题组从事彩虹技术的研究。韩香娥等^[19]研究了非均匀球的一阶彩虹角随折射率变化

收稿日期: 2016-09-05; **收到修改稿日期:** 2016-11-04

基金项目: 国家自然科学基金(51506129)

作者简介: 管露露(1985—),男,硕士研究生,主要从事光学测试方面的研究。E-mail: khmily520gll@163.com

导师简介: 于海涛(1980—),男,博士,讲师,主要从事光学测试方面的研究。E-mail: yht1025@yahoo.com(通信联系人)

的情况。潘琦等^[20]在一阶彩虹区域对彩虹测粒技术进行了研究,并提出了一种用于彩虹测粒技术的反演算法。宋飞虎等^[21]针对一阶彩虹区域提出了一种基于米氏散射理论和德拜级数展开方法的液柱参数彩虹反演优化算法,并进行了实验验证。吴迎春等^[22-23]在一阶彩虹区域利用全场彩虹技术测量了喷雾液滴的浓度和粒径分布,并针对一维彩虹技术提出了一个新的光学构型。在高阶彩虹区域,姜会芬等^[24]在理论和实验两方面研究了不同温度下球形液滴的二阶和五阶彩虹强度分布及其在粒度测量中的应用。

本文基于 VRT 模型研究了均匀椭球形液滴三阶和四阶彩虹区域的光学焦散结构(即彩虹条纹和双曲脐条纹),并将三阶彩虹的模拟结果和实验观察结果作了对比。为了将光学焦散结构应用于液滴的测量,详细讨论了光学焦散结构随液滴形状变化的演化过程。通过模拟发现,三阶和四阶光学焦散结构对液滴的形状变化敏感。通过 VRT 模型得出了三阶彩虹条纹的曲率与椭球度的依赖关系。此外,还研究了三阶彩虹区域的尖点焦散位置,并与 Langley 等^[25]给出的计算结果进行了比较,两者结果一致。

2 VRT 模型

假定一束平行光入射到椭球形液滴上,如图 1 所示,旋转椭球表面可以用 $(x^2 + y^2)/a^2 + z^2/c^2 = 1$ 来表示,其中 a 和 c 分别为椭球液滴的长半轴和短半轴长度, $r = a/c$ 为长轴与短轴之比,也称作椭球度。设入射光沿 y 轴传播,则入射光线传播方向的矢量表达形式为 $\mathbf{L}_0 = (0, 1, 0)$,根据折射定律,入射点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 处的折射光线为^[12]

$$\mathbf{L}_{01} = \frac{1}{m} [\mathbf{L}_0 - (\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{n}_A) \mathbf{n}_A] - \left[1 - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2} (\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{n}_A)^2 \right]^{1/2} \mathbf{n}_A, \quad (1)$$

式中 m 为液滴相对周围介质的折射率, \mathbf{n}_A 为椭球液滴表面 A 点的法线。 B 、 C 、 D 、 E 和 F 点的反射光线、以及 E 和 F 点的折射光线分别表达为

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{12} = \mathbf{L}_{01} - 2(\mathbf{L}_{01} \cdot \mathbf{n}_B) \mathbf{n}_B \\ \mathbf{L}_{23} = \mathbf{L}_{12} - 2(\mathbf{L}_{12} \cdot \mathbf{n}_C) \mathbf{n}_C \\ \mathbf{L}_{34} = \mathbf{L}_{23} - 2(\mathbf{L}_{23} \cdot \mathbf{n}_D) \mathbf{n}_D \\ \mathbf{L}_4 = m [\mathbf{L}_{34} - (\mathbf{L}_{34} \cdot \mathbf{n}_E) \mathbf{n}_E] + [1 - m^2 + m^2 (\mathbf{L}_{34} \cdot \mathbf{n}_E)^2]^{1/2} \mathbf{n}_E \\ \mathbf{L}_{45} = \mathbf{L}_{34} - 2(\mathbf{L}_{34} \cdot \mathbf{n}_E) \mathbf{n}_E \\ \mathbf{L}_5 = m [\mathbf{L}_{45} - (\mathbf{L}_{45} \cdot \mathbf{n}_F) \mathbf{n}_F] + [1 - m^2 + m^2 (\mathbf{L}_{45} \cdot \mathbf{n}_F)^2]^{1/2} \mathbf{n}_F \end{cases}, \quad (2)$$

式中 \mathbf{n}_B 、 \mathbf{n}_C 、 \mathbf{n}_D 、 \mathbf{n}_E 和 \mathbf{n}_F 分别为 B 、 C 、 D 、 E 和 F 点的法线。

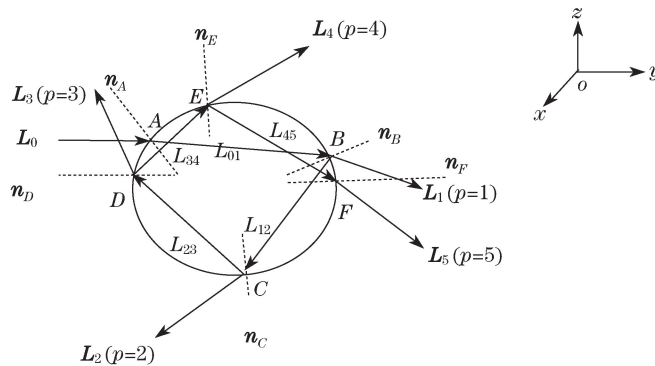
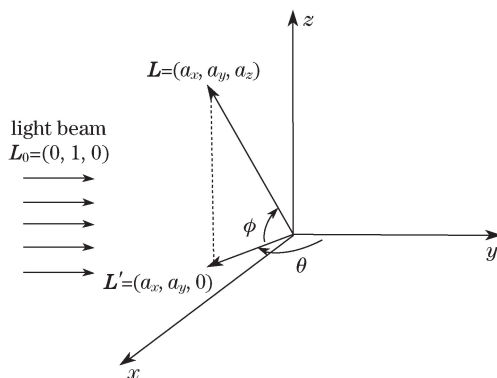


图 1 椭球形液滴中矢量光线追踪示意图

Fig. 1 Schematic of vector ray tracing in an oblate droplet

通过(1)、(2)式可以计算椭球形液滴的三阶($p=4$)和四阶($p=5$)散射光线。如图 2 所示,若三阶和四阶散射光线表示为 $\mathbf{L} = (a_x, a_y, a_z)$,其中 a_x 、 a_y 、 a_z 分别为 \mathbf{L} 在 x 、 y 、 z 坐标轴上的投影,则其散射角 θ 和方位角 ϕ 分别为

$$\begin{cases} \theta = \arccos[a_y / (a_x^2 + a_y^2)^{1/2}] \\ \phi = \arccos[(a_x^2 + a_y^2)^{1/2} / (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2}] \end{cases}. \quad (3)$$

图2 散射角 θ 和方位角 ϕ 的示意图Fig. 2 Schematic diagram of scattering angle θ and azimuth angle ϕ

3 彩虹光学焦散结构

入射到液滴表面的光线经历三次内反射、两次折射形成三阶彩虹条纹和双曲脐条纹,经历四次内反射、两次折射形成四阶彩虹条纹和双曲脐条纹。需要特别指出,彩虹条纹和双曲脐条纹是指液滴光散射中的光学焦散线,而不是指出射光线的干涉条纹。由于光学焦散结构对液滴形状变化敏感,因此有时液滴椭球度 r 的值需精确到小数点后第五到六位。图 3、4 给出了椭球液滴彩虹条纹和双曲脐条纹的演化过程。模拟计算以水滴为例,相对折射率 $m = 1.333$,赤道($\phi = 0^\circ$)平面半径,即液滴椭球长半轴 $a = 100 \mu\text{m}$,为了清楚展现彩虹条纹和双曲脐条纹随液滴椭球度的变化,方位角 f 显示范围为 $-10^\circ \leq f \leq 10^\circ$ 。需要指出,光线在球形液滴内部不存在全反射现象,但在椭球形液滴内部可出现全反射现象。例如,当椭球液滴的椭球度为 1.56 时,在三阶彩虹区域会有 29.39% 的光线发生全反射。

3.1 三阶彩虹光学焦散结构

图 3(a)给出了椭球度为 1.0(即球形液滴)的彩虹条纹,此时彩虹条纹曲率很小,开口方向沿散射角度 θ 减小的方向,即前向散射。当液滴椭球度 $r = 1.000006$ 时,尖点焦散首次在 $\theta = 0^\circ$ 处出现,如图 3(b)中最左端黑点所示。随着液滴椭球度的进一步增加,尖点焦散扩展为双曲脐条纹,并且尖点焦散的位置向散射角增大的方向移动,如图 3(c)、(d)所示,这与实验观察结果相符^[25]。在尖点焦散不断移动的同时,彩虹条纹的曲率也在不断增加。如图 3(e)所示,当液滴的椭球度达到 1.1054 时,尖点焦散和彩虹焦散在赤道面上完全重合,这与文献[25]的实验观察结果以及计算结果都是一致的。随着椭球度的继续增大,彩虹条纹和双曲脐条纹互相转换,如图 3(e)、(f)所示。同时,图 3(f)的彩虹条纹弯曲方向相较于图 3(a)的发生了反转,如图 3(f)、(g)所示,此时彩虹条纹的弯曲方向沿散射角增大的方向。在液滴椭球度从 1.1054 增大到 1.198982 的过程中,如图 3(g)~(i)所示,尖点焦散的位置不断向散射角减小的方向移动,直至消失在 $\theta = 0^\circ$ 处,此时椭球度为 1.198982。

在液滴椭球度从 1.198982 增大到 1.38 的过程中,彩虹条纹的曲率渐渐减小。需要注意的是,在 $r = 1.38$ 时,处于 $f = -1.6^\circ$ 和 $f = 1.6^\circ$ 之间的条纹几乎为一条直线,如图 3(j)所示。当液滴椭球度为 1.405 时,如图 3(k)所示,尖点焦散再一次出现在 $\theta = 30.11^\circ$ 处,且 $-4.7^\circ < f < 4.7^\circ$ 区间的彩虹条纹再一次发生弯曲方向反转,而 $-10^\circ < f < -4.7^\circ$ 和 $4.7^\circ < f < 10^\circ$ 区间的条纹弯曲方向却并没有改变,这与文献[25]中的实验结果一致。当液滴椭球度从 1.405 增大到 1.465 时,双曲脐条纹的尖点焦散位置不断向散射角增大的方向移动,而在赤道面附近彩虹条纹的曲率也在不断增大,如图 3(l)~(n)所示。特别是在 $r = 1.465$ 时,尖点焦散和彩虹焦散在赤道面上再一次重合于三阶彩虹角 $\theta = 41.73^\circ$ 处,这与参考文献[25]中的实验观察结果一致。当椭球度为 1.5 时,仅在 $-2.1^\circ < f < 2.1^\circ$ 范围内存在彩虹条纹,如图 3(o)所示。VRT 模型的模拟结果显示,相对于一阶和二阶彩虹条纹,三阶彩虹条纹特别是双曲脐条纹(尖点焦散首次出现时的椭球度为 1.000006)对于椭球度的敏感度更高。这是因为一阶彩虹的尖点焦散首次出现时液滴椭球度为 1.07^[12],而二阶彩虹的尖点焦散首次出现时液滴椭球度为 1.311450^[13]。这也是在某些地方液滴椭球度需要精确到小数点后第五到六位的原因。

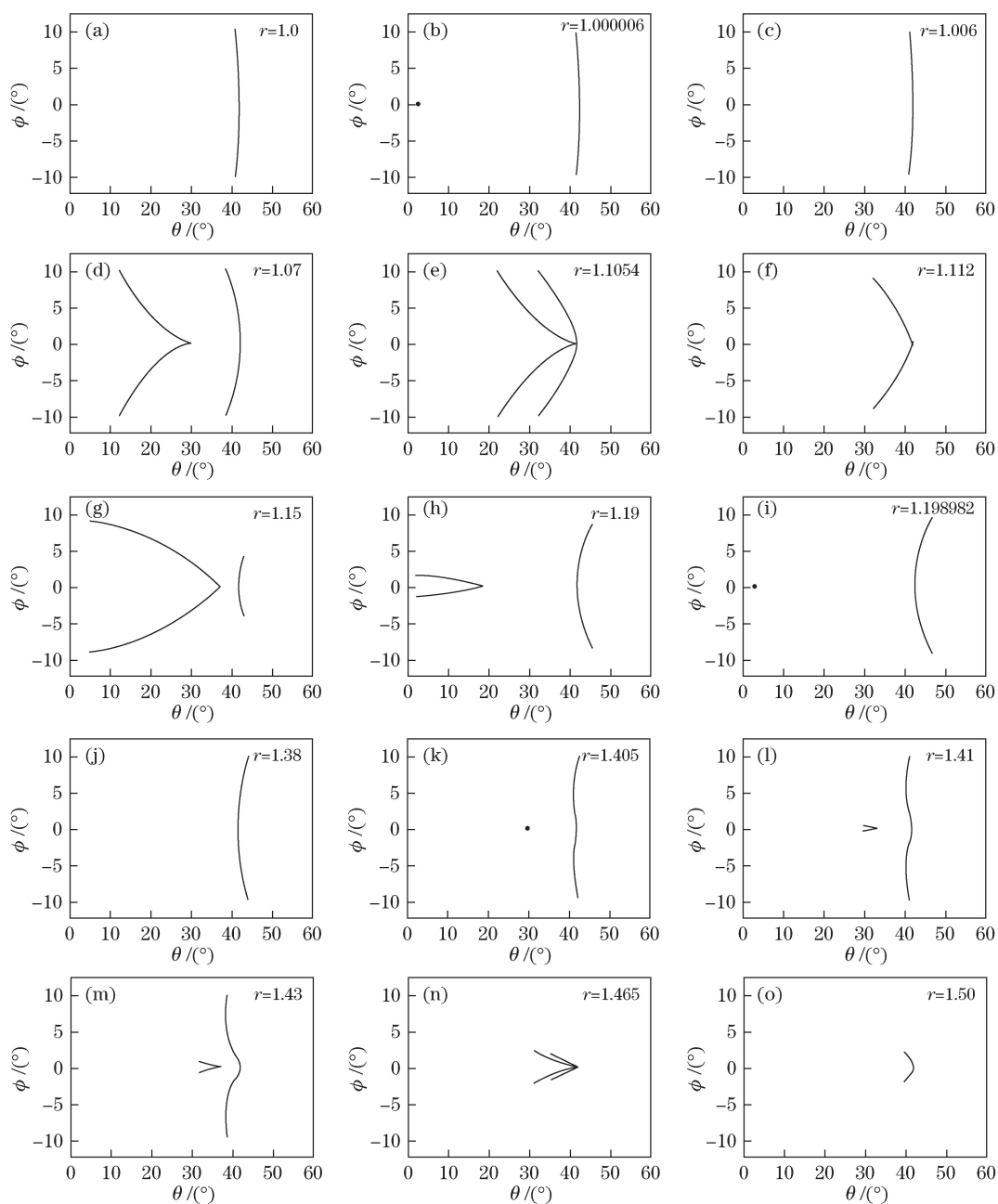


图 3 不同 r 下椭球形液滴三阶彩虹条纹和双曲脐条纹的演化过程

Fig. 3 Evolution process of third-order rainbow fringe and hyperbolic umbilic fringe of ellipsoid droplets under different r

3.2 四阶彩虹的光学焦散结构

图 4 给出了四阶彩虹条纹和双曲脐条纹随液滴椭球度增大的演化过程。图 4(a)给出椭球度为 1.0(即球形液滴)的彩虹条纹,此时彩虹条纹曲率很小,开口方向沿散射角减小的方向,与三阶彩虹的情况相似。当椭球度 $r=1.000006$ 时,尖点焦散首次出现在 $\theta=180^\circ$ 处,如图 4(b)中最右端黑点所示。同三阶彩虹条纹的结果类似,相对于一阶和二阶彩虹条纹,四阶彩虹条纹对于椭球度的敏感度也非常高,特别是双曲脐条纹。随着椭球度的增加,尖点焦散扩展成双曲脐条纹且尖点焦散位置向散射角减小的方向移动,如图 4(c)、(d) 所示。在尖点焦散移动的同时,彩虹条纹的曲率逐渐减小。值得注意的是,图 4(d)中的彩虹条纹并不是一条直线,如图 4(d)插图所示,彩虹条纹放大后在赤道面附近发生明显弯曲,其弯曲方向与图 4(a)比较已发生了反转,沿散射角增大的方向。当椭球度达到 1.24968 时,尖点焦散和彩虹焦散在赤道面上完全重合,如图 4(e)所示。随着椭球度的进一步增大,图 4(e)中彩虹条纹和双曲脐条纹发生互换,如图 4(f)、(g)所示,同时图 4(f)中彩虹条纹的弯曲方向相对于图 4(e)的彩虹条纹弯曲方向再一次发生了反转。此时,彩虹条纹的

弯曲方向沿散射角减小的方向。在椭球度从 1.24968 增大到 1.4065 的过程中,尖点焦散的位置不断向散射角增大的方向移动,如图 4(h)~(j)所示,直至椭球度为 1.4065 时消失在 $\theta=173.67^\circ$ 处。

在椭球度从 1.4065 增大到 1.4343 的过程中,彩虹条纹的曲率渐渐减小,如图 4(j)、(k)所示。需要注意的是,当 $r=1.4343$ 时,在 $-2^\circ < f < 2^\circ$ 范围内条纹近似为直线。当椭球度为 1.44 时,如图 4(l)所示,尖点焦散再一次出现在 $\theta=53.44^\circ$ 处,且在赤道面附近彩虹条纹的弯曲方向又一次反转。在椭球度从 1.44 增大到 1.4815 的过程中,双曲脐条纹的尖点焦散位置不断向散射角减小的方向移动,而在赤道面附近彩虹条纹的曲率也不断增大,如图 4(m)、(n)所示。尤其是当 $r=1.4815$ 时,尖点焦散和彩虹焦散在赤道面上再一次重合于四阶彩虹角 $\theta=43.703^\circ$ 处。当椭球度为 1.50 时,仅在 $-1.29^\circ < f < 1.29^\circ$ 范围内存在彩虹条纹,如图 4(o)所示。双曲脐条纹的尖点焦散继续向散射角增大的方向移动。在实际雾化场中,液滴椭球度一般小于 1.50,因此本文未给出椭球度大于 1.50 的模拟结果。

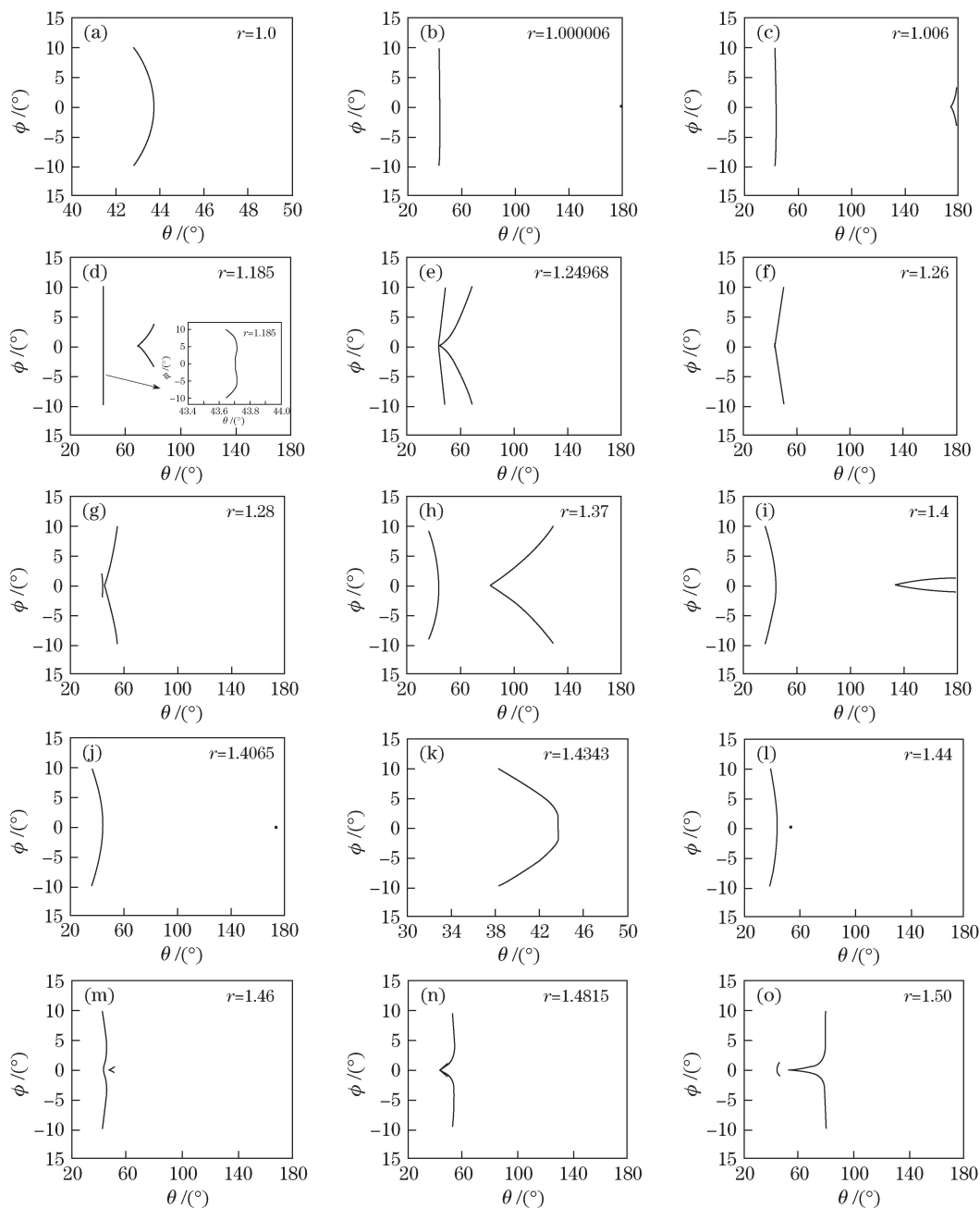


图 4 不同 r 下椭球形液滴的四阶彩虹条纹和双曲脐条纹的演化过程

Fig. 4 Evolution process of fourth-order rainbow fringe and hyperbolic umbilic fringe of ellipsoid droplets under different r

4 三阶彩虹条纹曲率和尖点焦散位置

4.1 三阶彩虹条纹曲率

图 5 给出了三阶彩虹条纹的曲率与液滴椭球度的变化关系。为便于比较,只计算彩虹条纹顶点位置的曲率。彩虹条纹开口方向沿散射角减小的方向时,曲率的值取正,反之则取负值。从图 5(a)可以看出,当椭球度为 1.0~1.08 时,条纹的曲率随椭球度的增大而缓慢增大;当椭球度为 1.08~1.1054 时,条纹曲率随椭球度的增大迅速增大。当椭球度大于 1.1054 时,三阶彩虹条纹的开口方向发生了反转,条纹曲率变为负值,如图 5(b)所示,这与图 3(e)~(g)相吻合。当椭球度为 1.1054~1.13 时,条纹的曲率随椭球度的增大而迅速减小,而当椭球度为 1.15~1.38 时,椭球度的增大对条纹曲率没有明显影响。从图 3(h)~(l)可以看出,条纹的开口方向再一次发生了反转,曲率值又一次变成正值,之后随着椭球度的增大条纹曲率进一步增大。

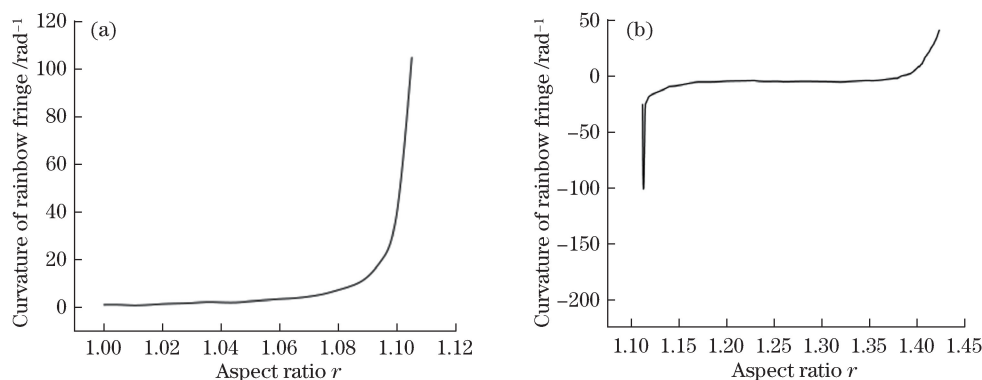


图 5 基于 VRT 模型的液滴三阶彩虹条纹曲率随椭球度的变化关系

Fig. 5 Curvature of third-order rainbow fringe of droplets versus aspect ratio based on VRT model

4.2 三阶双曲脐条纹尖点焦散位置

图 6 给出了三阶彩虹区域的尖点焦散位置与液滴椭球度的对应关系曲线。当椭球度在 1.000006~1.198982 之间变化时,尖点焦散位置的演变过程如图 6(a)所示。当椭球度为 1.000006 时,尖点焦散首先出现在 $\theta=0^\circ$ 处,随着椭球度的逐步增大,尖点焦散位置向散射角增大的方向移动。当椭球度为 1.1054 时,尖点焦散位置达到最高,位于三阶彩虹角 $\theta=41.73^\circ$ 处。随着椭球度的继续增大,尖点焦散向着散射角减小的方向移动。当椭球度为 1.198982 时,尖点焦散回到 $\theta=0^\circ$ 处。当液滴椭球度为 1.198982~1.405 时,不存在尖点焦散现象。图 6(b)给出了椭球度在 1.405~1.465 之间变化时尖点焦散位置的演变过程。当液滴椭球度为 1.405 时,尖点焦散位置出现在 $\theta=30.11^\circ$ 处。随着椭球度的增大,尖点焦散位置向散射角增大的方向移动。当液滴的椭球度为 1.465 时,尖点焦散再一次位于三阶彩虹角 $\theta=41.73^\circ$ 处。这与文献[25]的结果相吻合。尖点焦散位置包含了液滴椭球度信息,为液滴椭球度的测量提供了依据。

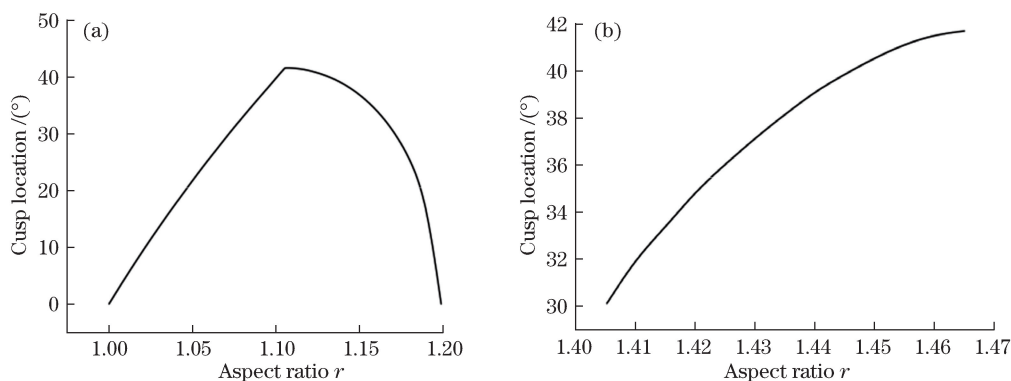


图 6 基于 VRT 模型的液滴尖点焦散位置随椭球度的变化关系

Fig. 6 Cusp location of droplets versus aspect ratio based on VRT model

5 结 论

通过 VRT 模型研究了液滴三阶和四阶区域的彩虹光学焦散结构(即彩虹条纹和双曲脐条纹),详细讨论了光学焦散结构随液滴形状变化的演化过程,三阶彩虹的模拟结果与文献[25]的实验观测结果相吻合。通过 VRT 模型计算出了三阶彩虹条纹的曲率随椭球度的变化关系,这一关系可应用于液滴的椭球度测量。此外,还计算了三阶彩虹区域的尖点焦散位置,模拟结果与文献[25]的结果吻合良好。

参 考 文 献

- [1] Guo Lufang, Shen Jianqi. Dependence of forward light scattering particle size measurement on the relative refractive index[J]. Chinese J Lasers, 2016, 43(3): 0308004.
郭露芳, 沈建琪. 相对折射率对前向散射粒度测试的影响[J]. 中国激光, 2016, 43(3): 0308004.
- [2] Wang Tianen, Shen Jianqi, Lin Chengjun. Vector similarity retrieval algorithm in particle size distribution analysis of forward scattering[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(6): 0629002.
王天恩, 沈建琪, 林承军. 前向散射颗粒粒径分布分析中的向量相似度反演算法[J]. 光学学报, 2016, 36(6): 0629002.
- [3] Lin Chengjun, Shen Jianqi, Wang Tianen. Multi-parameter regularization algorithm in particle size measurement of forward light scattering[J]. Chinese J Lasers, 2016, 43(11): 1104004.
林承军, 沈建琪, 王天恩. 前向散射颗粒粒径测量中的多参数正则化算法[J]. 中国激光, 2016, 43(11): 1104004.
- [4] Roth N, Anders K, Frohn A. Size insensitive rainbow refractometry: Theoretical aspects [C]. 8th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, 1996, 11: 921-926.
- [5] van Beeck J P A J, Zimmer L, Riethmuller M L. Global rainbow thermometry for mean temperature and size measurement of spray droplets[J]. Particle & Particle Systems Characterization, 2001, 18(4): 196-204.
- [6] Marston P L, Trinh E H. Hyperbolic umbilic diffraction catastrophe and rainbow scattering from spheroidal drops[J]. Nature, 1984, 312(5994): 529-531.
- [7] Nye J F. Rainbow scattering from spheroidal drops-an explanation of the hyperbolic umbilic foci[J]. Nature, 1984, 312(5994): 531-532.
- [8] Dean C E, Marston P L. Opening rate of the transverse cusp diffraction catastrophe in light scattered by oblate spheroidal drops[J]. Applied Optics, 1991, 30(24): 3443-3451.
- [9] Nye J F. Rainbows from ellipsoidal water drops[J]. Proceedings of the Royal Society A, 1992, 438(1903): 397-417.
- [10] Xu F, Lock J A, Tropea C. Debye series for light scattering by a spheroid[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2010, 27: 671-686.
- [11] Lock J A, Xu F. Optical caustics observed in light scattered by an oblate spheroid[J]. Applied Optics, 2010, 49(8): 1288-1304.
- [12] Yu H T, Xu F, Tropea C. Optical caustics associated with the primary rainbow of oblate droplets: Simulation and application in non-sphericity measurement[J]. Optics Express, 2013, 21(22): 25761-25771.
- [13] Yu H T, Xu F, Tropea C. Simulation of optical caustics associated with the secondary rainbow of oblate droplets[J]. Optics Letters, 2013, 38(21): 4469-4472.
- [14] Onofri F R A, Ren K F, Sentis M, *et al.* Experimental validation of the vectorial complex ray model on the inter-caustics scattering of oblate droplets[J]. Optics Express, 2015, 23(12): 15768-15773.
- [15] Großmann M, Schmidt E, Haußmann A. Photographic evidence for the third-order rainbow[J]. Applied Optics, 2011, 50(28): F134-F141.
- [16] Theusner M. Photographic observation of a natural fourth-order rainbow[J]. Applied Optics, 2011, 50(28): F129-F133.
- [17] Edens H E. Photographic observation of a natural fifth-order rainbow[J]. Applied Optics, 2015, 54(4): B26-B34.
- [18] Edens H E, Können G P. Probable photographic detection of the natural seventh-order rainbow[J]. Applied Optics, 2015, 54(4): B93-B96.
- [19] Han Xiang'e, Ren Kuanfang, Grehan G, *et al.* Rainbow and its applications to nonhomogeneous sphere[J]. Acta Optica Sinica, 2003, 23(6): 712-716.
韩香娥, 任宽芳, Grehan G, 等. 彩虹及在非均匀球中的应用[J]. 光学学报, 2003, 23(6): 712-716.
- [20] Pan Qi, Wang Shimin. Study on optical particle measurement based on rainbow phenomena[J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(2): 388-393.

- 潘 琦, 王式民. 基于彩虹现象的光学测粒技术研究[J]. 光学学报, 2009, 29(2): 388-393.
- [21] Song Feihu, Xu Chuanlong, Wang Shimin. Reversion algorithm for liquid column parameters with rainbow refractometry based on Debye theory[J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(12): 1212006.
宋飞虎, 许传龙, 王式民. 基于德拜理论的液柱参数彩虹反演算法研究[J]. 光学学报, 2011, 31(12): 1212006.
- [22] Wu Yingchun, Wu Xuecheng, Saengkaewi S, *et al.* Concentration and size measurements of sprays with global rainbow technique[J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(9): 090703.
吴迎春, 吴学成, Saengkaewi S, 等. 全场彩虹技术测量喷雾浓度及粒径分布[J]. 物理学报, 2013, 62(9): 090703.
- [23] Wu Y, Promvongsa J, Wu X, *et al.* One-dimensional rainbow technique using Fourier domain filtering[J]. Optics Express, 2015, 23(23): 30545-30556.
- [24] Jiang Huifen, Han Xiang'e, Ren Kuanfang, *et al.* Reconstruction of intensity of the second and fifth rainbows and its applications to homogeneous droplet[J]. Acta Optica Sinica, 2004, 24(11): 1561-1565.
姜会芬, 韩香娥, 任宽芳, 等. 均匀球形液滴二阶和五阶彩虹的重建及应用[J]. 光学学报, 2004, 24(11): 1561-1565.
- [25] Langley D S, Marston P L. Generalized tertiary rainbow of slightly oblate drops: Observations with laser illumination[J]. Applied Optics, 1998, 37(9): 1520-1526.