

辐射传输计算中散射相函数截断近似方法对比分析

罗 双^{1,2}, 尹 球^{1,2}

¹上海市气象局, 上海 200030;

²中国气象局气象卫星用户办公室, 上海 200030

摘要 基于成熟的相函数近似方法 Delta-M 和 Delta-fit, 解释了结合相函数矩不变要求和特定角度范围误差最小化要求这一组合方案 Delta-combine 的物理含义, 并分析了不同要求衔接点位置对散射强度的影响。在此基础上, 以 Cloud 和 Haze 散射相函数为例, 对 Delta-M、Delta-fit 和 Delta-combine 近似方法计算辐射强度和辐照度的效果进行对比, 进而统计分析了三种相函数近似方法在不同光学厚度情况下的适用性。结果表明, 随着组合衔接点的后移, Delta-combine 方法强度绝对误差均方根(RMS)减小, 相对误差 RMS 先减小后增大; Delta-M、Delta-fit 和 Delta-combine, 三种方案均能够保证能量平衡; 对不同光学厚度, Delta-M 和 Delta-combine 方法计算的强度绝对误差 RMS 比 Delta-fit 小; 对于相对误差, 当光学厚度较小时, Delta-fit 效果较好, 随着光学厚度增大, Delta-combine 方法最优。

关键词 散射; 辐射传输; 强度; 近似; 散射相函数

中图分类号 P422 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201737.0229002

Comparison and Analysis of Scattering Phase-Function Truncation Approximations in Radiative Transfer Calculation

Luo Shuang^{1,2}, Yin Qiu^{1,2}

¹Shanghai Meteorological Service, Shanghai 200030, China;

²Meteorological Satellite User's Office of China Meteorological Administration, Shanghai 200030, China

Abstract On the basis of the sophisticated phase-function approximation methods Delta-M and Delta-fit, the physical meaning of a combination approximation method Delta-combine is explained, combining the requirement of moment preserving of phase function and minimizing approximation errors within a specific scattering angle range. And the influence of the connecting point position for different requirements on the scattering intensity is analyzed. On this basis, taking Cloud and Haze scattering phase functions for examples, the radiation intensity and irradiance calculated by Delta-M, Delta-fit, and Delta-combine approximation methods are compared. The applicability of the three phase function approximation methods is statistically analyzed by these methodologies under different optical thicknesses. The results show that, as the connecting point moves backward, the root mean square (RMS) of absolute error of the intensity obtained by the Delta-combine method decreases, and the RMS of relative error of the intensity decreases first and then increases. The three approximation methods are all able to guarantee the energy balance. The RMSs of absolute error produced by Delta-M and Delta-combine are smaller than that of Delta-fit under different optical thicknesses. From the aspect of relative error, Delta-fit does well when the optical thickness is small, and the Delta-combine is best when the optical thickness increases.

Key words scattering; radiative transfer; intensity; approximation; scattering phase function

OCIS codes 290.5850; 280.1310; 010.5620

1 引 言

散射相函数是大气辐射传输计算中的一个基本物理量, 决定了分子、气溶胶、云滴、雾滴、雨滴、冰粒、雪花等大气颗粒物散射的方向性特征。散射相函数随散射角的变化较复杂, 在大气多次散射计算中, 为了能够

收稿日期: 2016-07-11; 收到修改稿日期: 2016-09-27

作者简介: 罗 双(1988—), 女, 硕士, 工程师, 主要从事大气辐射传输及光散射方面的研究。

E-mail: luoshuang_2010@163.com

求解散射光强方程,例如离散坐标辐射传输模型(DISORT)方法^[1],或者为了减少散射光强求解的计算量,例如6S方法^[2],常常利用勒让德多项式和狄拉克 δ 函数对散射相函数作适当的近似处理。

在辐射传输计算时,对尖锐相函数的处理方法主要有Delta-M^[3]和Delta-fit^[4]。Delta-M对散射通量计算非常有效,已被嵌入标准辐射传输模型DISORT^[5]软件中进行散射相函数计算。Delta-M通过要求多项式矩不变求取勒让德展开系数,利用有限的展开项就可以得到较高的精度。2000年,Hu等^[4]提出Delta-fit方法,与Delta-M方法不同的是,Delta-fit要求近似相函数和实际相函数相对误差最小,从而利用最小二乘拟合法得到多项式系数。在对这两种方法的评估中,陈秀红等^[6]认为Delta-fit方法可以减少相函数展开项数,大大提高计算的精度和速度。Luo等^[7]曾以H-G(Henyey-Greenstein)相函数为例,对不同大气光学厚度情况下Delta-M和Delta-fit方法的适用性进行探讨,而本文将以前向峰更加尖锐的Cloud和Haze相函数为例展开相函数截断近似方案的对比分析。

Hu等^[4]提到,若有需要,在Delta-fit方法拟合求系数时也可以保持多项式任意低阶矩不变,从而使Delta-fit方法有更多自由参数供选择。在此基础上,Yin等^[8]将相函数矩不变要求和特定角度范围误差最小化要求进行综合应用,建立了相函数近似的统一描述方案G-delta-L。本文着重讨论既保持前任意阶矩不变,又采用最小二乘拟合法求系数这一组合方案Delta-combine的可行性,并与Delta-M和Delta-fit方法进行对比,分析三种相函数近似处理方法在计算辐射强度和辐照度中的应用效果。

2 相函数截断近似方案的物理含义

设散射相函数为 $P(\cos\theta)$,其中 θ 为散射角,将 $P(\cos\theta)$ 展开为勒让德多项式,可表示为

$$P(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)c_l P_l(\cos\theta), \quad (1)$$

式中 P_l 是第 l 阶勒让德函数, $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$,以此类推。 c_l 是第 l 阶展开项的系数,可利用真实相函数与勒让德函数乘积的积分求得

$$c_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\cos\theta) P(\cos\theta) d(\cos\theta). \quad (2)$$

由(1)式可知,需要无穷阶勒让德多项式展开才能精确表达原相函数,但在实际计算过程中,通常只用有限项展开来近似表达原相函数。由于只在前向周围很窄的区域内存在显著的前向峰,为便于计算,原相函数可近似表达为前向部分和截断相函数之和^[9],即

$$P(\cos\theta) \approx 2f \cdot \delta(1-\cos\theta) + (1-f)P^*(\cos\theta), \quad (3)$$

$$P^*(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{M-1} (2l+1)c_l^* P_l(\cos\theta), \quad (4)$$

式中 f 为截断因子,代表前向散射能量所占比例, M 是近似的阶数, c_l^* 是第 l 阶近似展开项的系数。

对于Delta-M方法,要求保持(1)和(4)式中 $0 \sim M-1$ 阶矩不变,即 c_l 和 c_l^* 的关系为

$$c_l^* = \frac{c_l - f}{1 - f}, \quad l=0,1,\dots,M-1, \quad f=c_M. \quad (5)$$

对于Delta-fit方法, c_l^* 根据最小二乘法求得,假设截断相函数 $P^*(\cos\theta)$ 和原相函数 $P(\cos\theta)$ 的相对误差平方和是 ϵ ,那么

$$\epsilon = \sum_i \omega_i \left[\frac{P^*(\cos\theta)}{P(\cos\theta)} - 1 \right]^2, \quad (6)$$

式中 ω_i 是第 i 个角度的求和权重,规定前向附近一个小角度范围内(例如 $0^\circ \sim 3^\circ$)权重为0。若要使相对误差达到最小,则等价于要求 $\partial\epsilon/\partial c_k = 0 (k=0,1,\dots,M-1)$,即

$$\sum_i \frac{P_k^*(\cos\theta)}{P(\cos\theta)} \omega_i \left[\frac{P^*(\cos\theta)}{P(\cos\theta)} - 1 \right] = 0. \quad (7)$$

在Delta-fit中,可以保留前 $m (m < M-1)$ 阶矩不变,这些项的多项式系数 $c_l^* (l=0,1,\dots,m-1)$ 根据

(5)式求得,剩余项的系数 c_l^* ($l=m, m+1, \dots, M-1$) 依然根据(7)式求得。这样,在要求相函数近似保持 $0 \sim m-1$ 阶矩不变的基础上,可以应用特定角度范围相函数相对误差最小化要求,改善相函数近似效果,本文称这种组合方法为 Delta-combine。表 1 总结了三种近似方法的基本特征。

表 1 各种散射相函数截断近似方法基本特征

Table 1 Essential features of various truncation approximation methods for scattering phase function

Method	Truncation factor	Moment conservation	Reference
Delta-M	c_M	$0-M-1$	Ref. [3]
Delta-fit	$1-c_0$	0	Ref. [4]
Delta-combine	c_M	$0-m$ ($m < M-1$)	Proposed

3 球形粒子散射特性

Cloud 和 Haze 可近似看作球形粒子,单个粒子的散射和吸收性质可由 Mie 理论^[10]给出,在粒子谱分布已知的情况下就可以算出 Cloud 和 Haze 的积分光学性质。粒子分布函数有多种,比如伽马函数、修正的伽马函数、对数正态分布等。其中修正的伽马函数常被用于研究球形粒子的辐射特性,表示为^[11]

$$n(r) = ar^a \exp(-br^\gamma), \quad (8)$$

式中 a, α, γ, b 为尺度分布函数系数,都为正值,其中 α 是整数。本文所用的 Cloud 和 Haze 的尺度分布参数如表 2 所示,勒让德展开系数 c_l 由 Haan 和 Karp 计算所得,其中 Cloud 有 299 项系数,Haze 有 82 项系数。图 1(a)是 $0.7 \mu\text{m}$ 可见光波长照射 Cloud 时的散射相函数,该粒子尺度参数为 2,折射指数为 1.33。可以看出, $0^\circ \sim 180^\circ$ 散射角的相函数最大值和最小值之间跨度 5 个数量级;在前向小角度 $3^\circ \sim 5^\circ$ 内,散射相函数迅速增加,具有强前向衍射特征^[12];Cloud 相函数在约 100° 散射角处有极小值,在 140° 散射角附近有峰值(虹),另一个最大值位于 180° (宝光环)。图 1(b)是 Haze 的散射相函数,同样表现出有一前向的衍射极大,但不如 Cloud 明显,同时在 $150^\circ \sim 170^\circ$ 散射角区间内存在峰值。本文将基于这两种不同粒子的相函数进行辐射强度的计算和分析。

表 2 Cloud 和 Haze 尺度分布模型

Table 2 Size distribution model for Cloud and Haze

Particle type	N / cm^{-3}	a	α	γ	b	$r_c / \mu\text{m}$
Cumulus Cloud, C.1	100	2.373	6	1	1.5	4
Haze L	100	4.98×10^4	2	0.5	15.12	0.07

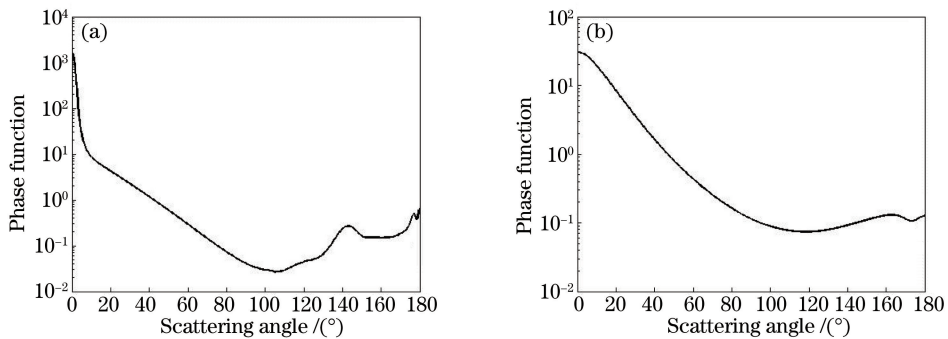


图 1 $0.7 \mu\text{m}$ 波长照射 (a) Cloud 和 (b) Haze 时的散射相函数

Fig. 1 Scattering phase functions at $0.7 \mu\text{m}$ wavelength for (a) Cloud and (b) Haze

4 相函数截断近似效果对比

4.1 Delta-combine 方法衔接点位置

前面提到,Delta-combine 方法的勒让德系数分两步进行计算, $0 \sim m-1$ 项多项式展开系数根据 Delta-M 方法获得, $m \sim M-1$ 项多项式系数根据 Delta-fit 方法求得。需要了解相函数矩不变要求和特定角度范

围相对误差最小化要求的衔接点 m 的取值对强度计算的影响。

本文基于 DISORT 辐射传输模型,通过修改其中的相函数勒让德展开式系数的求取方法,重新计算散射辐射强度。假设太阳光垂直入射,入射辐射通量为 π ,观测方向与太阳的方位角之差为 0° ,通过光学厚度为 3.0 的单层大气,并且假定该层的单次散射反照率为 1.0,下垫面是反射率为 0 的朗伯体,从而在 $0^\circ\sim 180^\circ$ 出射方向上获得不同强度的反射或透射辐射。计算流数取 16 流,对 Cloud 和 Haze 相函数分别采用 Delta-combine 方法近似展开处理,将近似方法的强度与标准强度进行对比,统计得到 $3^\circ\sim 180^\circ$ 强度的绝对误差均方根(RMS)和相对误差均方根。这里的标准强度是采用 DISORT 软件(流数取大值)计算所得。图 2 是出射辐射强度的绝对误差均方根和相对误差均方根随衔接点 m 的变化,采用双 y 轴坐标,左纵轴对应蓝色十,表示绝对误差,右纵轴对应绿色 Δ 点,表示相对误差。衔接点 m 的取值范围是 $0\sim 15$ 。图 2(a)显示,Cloud 绝对误差均方根随衔接点的后移而逐渐减小,相对误差均方根随衔接点后移而有所振荡,在 $m < 10$ 之前基本也呈减小趋势,当 $m = 11, 13$ 时,相对误差又有所回升。图 2(b)是 Haze 的计算结果,其强度的绝对误差均方根随 m 增大而逐渐减小,并趋于平缓,相对误差在衔接点等于 10 之前都是随绝对误差一起下降。从两幅图中均可以发现,当衔接点 $m = 12$,即 $3/4$ 倍流数时,强度的相对误差均方根取到极小值。

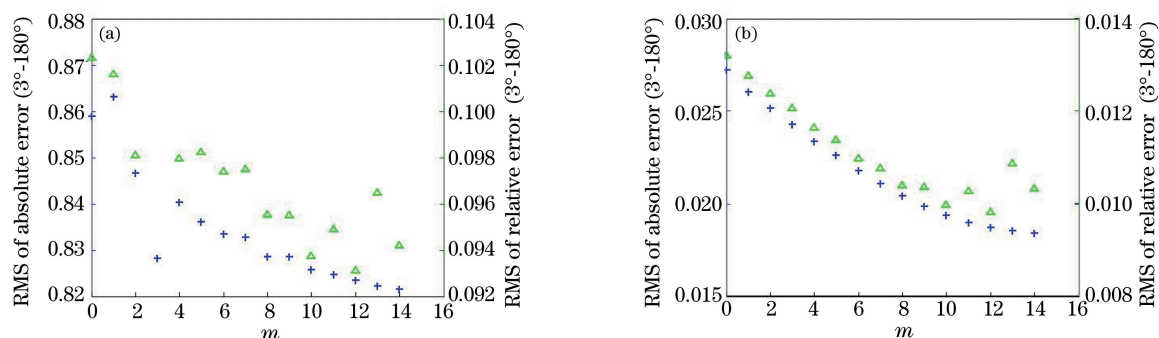


图 2 强度绝对误差 RMS 和相对误差 RMS 随衔接点位置的变化。(a) Cloud; (b) Haze

Fig. 2 RMS of absolute error and relative error of intensity versus the position of connecting point.

(a) Cloud; (b) Haze

4.2 不同近似方案的强度计算效果

取流数为 16 流,假设单位强度辐射垂直入射,经过光学厚度为 3.0 的整层大气,对比分析 Delta-M、Delta-fit 和 Delta-combine 三种相函数处理方法在强度计算时的应用效果(图 3)。Delta-combine 方案的衔接点以 12($3/4$ 倍流数)为例进行分析,即 $0\sim 11$ 项的多项式系数根据 Delta-M 矩不变要求获得, $12\sim 15$ 项的多项式系数采用 Delta-fit 最小二乘拟合的方法求得。图 3 纵轴采用对数坐标,其中,图 3(a)、(b)是 Cloud 采用三种相函数近似方案后计算得到的辐射值与标准值的比较,内插图为 $0^\circ\sim 20^\circ$ 散射角的放大。图 3(c)、(d)是 Haze 的结果。散射角为 $0^\circ\sim 90^\circ$ 是向下出射,即底部透射[图 3(a)、(c)], $90^\circ\sim 180^\circ$ 是向上出射,即顶部反射[图 3(b)、(d)]。

由图 3(a)、(c)可知,三种方案计算的底部透射辐射与标准值的较大差异位于 $0^\circ\sim 20^\circ$ 范围内,特别是对 Cloud,其前向小角度的强度值很大,而三种方案近似的效果与标准值具有量级差,这是相函数的前向峰区域,近似展开时除非项数很多,否则总会有较大误差。相比较而言,Delta-M 和 Delta-combine 在小角度处比 Delta-fit 方法略接近于标准值。图 3(b)、(d)是大气顶部反射辐射,三种相函数近似方法计算得到的强度均较为平滑,仅 Cloud 粒子在大散射角度处有所差异。

为了更清楚地看出 Delta-M、Delta-fit 和 Delta-combine 相函数近似方案的强度计算效果,统计了三种方案在 $3^\circ\sim 180^\circ$ 的强度绝对误差均方根和相对误差均方根,如表 3 所示,不论是 Cloud 还是 Haze,Delta-M 和 Delta-combine 绝对误差均方根都比 Delta-fit 小,这与图 3 吻合。从相对误差均方根角度而言,Delta-combine 最小,Delta-M 次之。

对于卫星观测而言,更关注大气顶部反射辐射,因此进一步比较三种方法计算大气顶部反射辐射的精度。对 $90^\circ\sim 180^\circ$ 散射辐射求取误差均方根,统计结果如表 4 所示。由于没有前向部分的影响,因此统计的

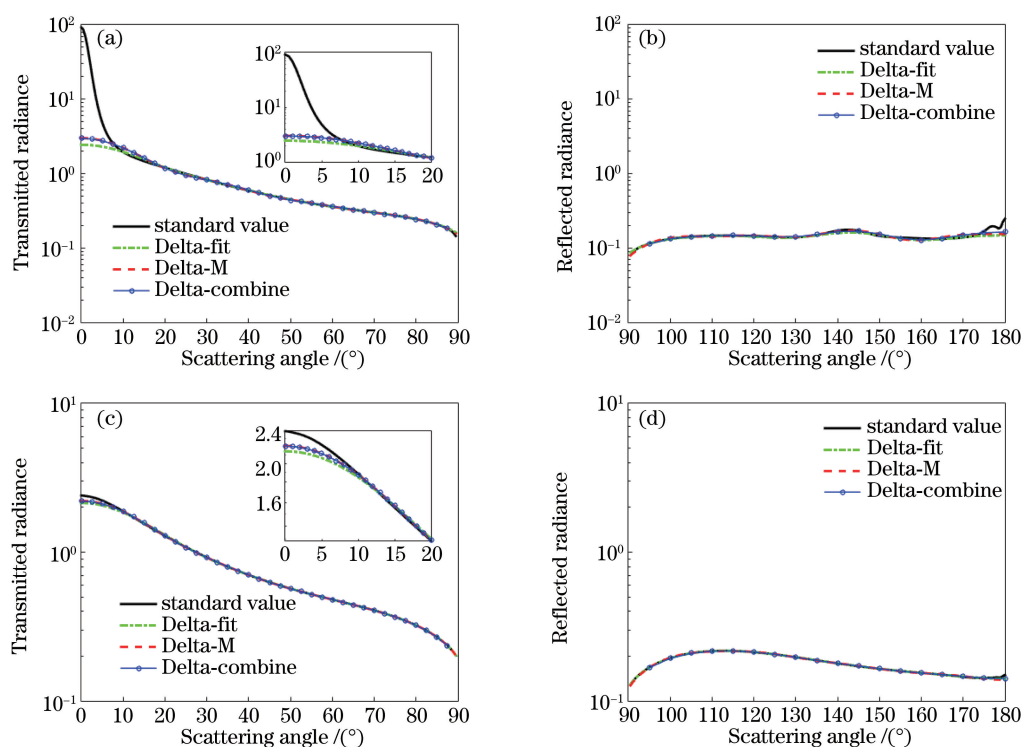


图 3 不同相函数近似处理方法比较。(a) Cloud 大气底部透射辐射；(b) Cloud 大气顶部反射辐射；
(c) Haze 大气底部透射辐射；(d) Haze 大气顶部反射辐射

Fig. 3 Comparison of different phase function approximation methods. (a) Transmitted radiance for Cloud;
(b) reflected radiance for Cloud; (c) transmitted radiance for Haze; (d) reflected radiance for Haze

误差均方根比 $3^\circ \sim 180^\circ$ 时(表 3)小很多。对于 Cloud, 不论是绝对误差还是相对误差, Delta-combine 方案计算的误差均最小, 说明该方案近似效果最好。对于 Haze, Delta-fit 和 Delta-combine 这两种方案与标准值的绝对误差均方根只相差 10^{-4} 量级, 相对误差均方根相差 10^{-3} 量级, 计算结果十分接近标准值。

表 3 不同相函数近似方案计算得到的辐射强度误差均方根统计

Table 3 RMS of radiation intensity calculated by various phase-function approximation methods

Method	RMS of absolute error ($3^\circ \sim 180^\circ$)		RMS of relative error ($3^\circ \sim 180^\circ$)	
	Cloud	Haze	Cloud	Haze
Delta-M	0.8213	0.0184	0.0955	0.0110
Delta-fit	0.8775	0.0277	0.1044	0.0134
Delta-combine	0.8235	0.0187	0.0931	0.0098

表 4 不同相函数近似方案计算得到的反射辐射强度误差均方根统计

Table 4 RMS of reflected radiation intensity calculated by various phase-function approximation methods

Method	RMS of absolute error ($90^\circ \sim 180^\circ$)		RMS of relative error ($90^\circ \sim 180^\circ$)	
	Cloud	Haze	Cloud	Haze
Delta-M	0.0088	0.00110	0.0449	0.0072
Delta-fit	0.0099	0.00065	0.0492	0.0044
Delta-combine	0.0074	0.00073	0.0376	0.0049

4.3 不同近似方案的辐照度计算效果

Delta-M 方案对辐射通量计算十分有效, 可以保证能量平衡, 本文在计算辐射强度的同时, 也得到了相同假定条件下的辐照度, 以此说明 Delta-fit 和 Delta-combine 方案计算辐照度时的效果。Cloud 和 Haze 散射相函数的辐照度计算结果分别如表 5 和表 6 所示。当入射辐射通量为 π 时, 三种方案的向下直接辐射均为 0.156411 W/m^2 , 向下漫射和向上漫射辐射通量略有区别, 其中 Delta-M 和 Delta-combine 相差很小, 在 10^{-5} W/m^2 量级。总体而言, 三种方案的出射辐射通量均为 $3.1415 \sim 3.1416 \text{ W/m}^2$, 与入射辐射通量 π 基本

一致。不仅验证了 Delta-M 方案的能量守恒,而且说明 Delta-combine 和 Delta-fit 方案也能保证能量平衡。

表 5 入射辐射通量为 π 时,不同方案计算的 Cloud 的辐照度

Table 5 Irradiance of Cloud calculated by different methods when the incident flux is π W/m²

Method	Downward direct radiation	Downward diffuse	Upward diffuse	Total
Delta-M	0.156411	2.52474	0.460417	3.1416
Delta-fit	0.156411	2.53633	0.448777	3.1415
Delta-combine	0.156411	2.52479	0.460379	3.1416

表 6 入射辐射通量为 π 时,不同方案计算的 Haze 的辐照度

Table 6 Irradiance of Haze calculated by different methods when the incident flux is π W/m²

Method	Downward direct radiation	Downward diffuse	Upward diffuse	Total
Delta-M	0.156411	2.40482	0.580374	3.1416
Delta-fit	0.156411	2.40459	0.580605	3.1416
Delta-combine	0.156411	2.40483	0.580351	3.1416

4.4 不同光学厚度情况下三种方案对比

当大气的光学厚度发生改变时,对三种方案的计算效果进行对比。本文选取 0.1,0.25,0.5,0.75,1.0,1.25,1.5,1.75,2.0,2.25,2.5,2.75,3.0,4.0,5.0,6.0,8.0,10.0 从薄到厚 18 种光学厚度大气层进行各出射角的强度计算,进而统计各光学厚度层出射辐射强度的 $3^\circ\sim 180^\circ$ 强度绝对误差均方根和相对误差均方根,如图 4 所示。取流数为 16 流,假设单位强度辐射垂直入射。从绝对误差角度而言,Cloud 和 Haze 的误差均方根随着光学厚度的增加呈先增加后减小的趋势,Cloud 的峰值出现在 1.5 光学厚度左右,Haze 的峰值出现在 1.0 光学厚度处;Delta-M 和 Delta-combine 在各个光学厚度层的绝对误差均方根始终比 Delta-fit 小,特别是在误差较大的光学厚度时差异更明显;从相对误差角度,随着光学厚度增加,Cloud 和 Haze 的误差均方根逐

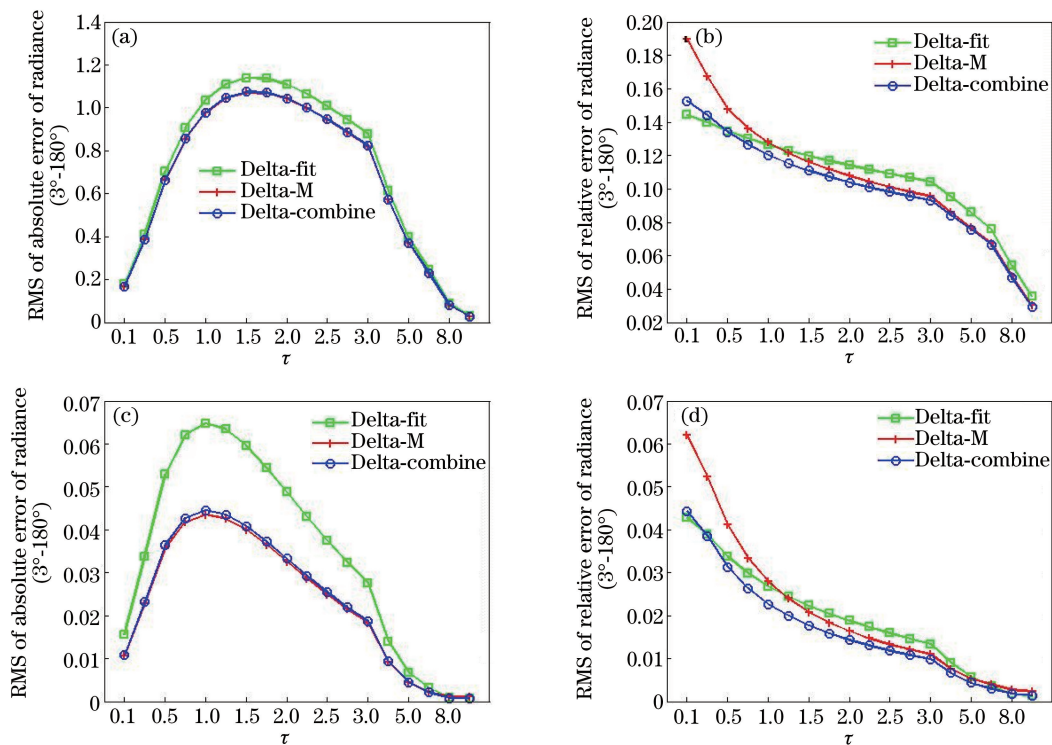


图 4 近似强度的误差均方根随光学厚度的变化。(a) Cloud $3^\circ\sim 180^\circ$ 绝对误差 RMS;

(b) Cloud $3^\circ\sim 180^\circ$ 相对误差 RMS; (c) Haze $3^\circ\sim 180^\circ$ 绝对误差 RMS; (d) Haze $3^\circ\sim 180^\circ$ 相对误差 RMS

Fig. 4 RMS error of approximate intensity versus optical thickness. (a) RMS of absolute error of radiance in $3^\circ\sim 180^\circ$ for Cloud; (b) RMS of relative error of radiance in $3^\circ\sim 180^\circ$ for Cloud; (c) RMS of absolute error of radiance in $3^\circ\sim 180^\circ$ for Haze; (d) RMS of relative error of radiance in $3^\circ\sim 180^\circ$ for Haze

渐减小,且在不同光学厚度三种方案中的优劣呈现出不一样的特征。当光学厚度较小时(Cloud 小于 0.5, Haze 小于 0.25),Delta-fit 方案的相对误差均方根在三种方案中是最小的,当光学厚度增大后,Delta-combine 方案最好。

5 结 论

基于 Delta-M 和 Delta-fit 相函数近似处理方法,从物理上解释了结合矩不变要求和相对误差最小要求的 Delta-combine 方法。以球形粒子 Cloud 和 Haze 为例,分析了 Delta-combine 方法两种不同要求衔接点位置对散射强度计算的影响,进而以较大流数时 DISORT 计算结果为标准值,对比了 Delta-M、Delta-fit 和 Delta-combine 三种相函数近似方法在相同入射辐射通量时的辐射强度和辐照度计算效果。并在此基础上,统计分析了三种方法在不同大气光学厚度情况下的误差均方根。结果表明:

1) Delta-combine 方案具有明确的物理意义,和 Delta-M、Delta-fit 一样可用于相函数截断近似处理,三种方案均能够保证能量平衡。

2) Delta-combine 要求矩不变和相对误差最小的衔接点位置对散射强度有较大影响,随着衔接点的后移,Cloud 和 Haze 散射强度绝对误差均方根均减小,相对误差均方根先减小后增加,误差最小值出现在衔接点为 3/4 流数处。

3) 对于前向峰明显的球形粒子相函数,在 $0^\circ \sim 20^\circ$ 的散射角内三种方案的强度计算与标准值存在量级差,相比较而言,前向小角度附近 Delta-M 和 Delta-combine 方案近似计算效果较好。

4) 随着光学厚度增加,强度的绝对误差均方根先增加后减小,相对误差均方根逐渐减小;在不同大气光学厚度情况下,Delta-M 和 Delta-combine 与标准值的绝对误差均方根比 Delta-fit 小;从相对误差角度来看,在较小光学厚度下,Delta-fit 方案强度计算效果较好,当光学厚度增大时,Delta-combine 方案最优。

参 考 文 献

- [1] Stamnes K, Tsay S C, Wiscombe W, *et al.* DISORT, a general-purpose Fortran program for discrete-ordinate-method radiative transfer in scattering and emitting layered media: documentation of methodology[C]. Goddard Space Flight Center, NASA, 2000.
- [2] Vermote E F, Tanré D, Deuzé J L, *et al.* Second simulation of the satellite signal in the solar spectrum, 6S: an overview[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1997, 35(3): 675-686.
- [3] Wiscombe W J. The delta-M method: rapid yet accurate radiative flux calculations for strongly asymmetric phase function[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1977, 36(9): 1408-1422.
- [4] Hu Y X, Wielicki B, Lin B, *et al.* δ -fit: a fast and accurate treatment of particle scattering phase functions with weighted singular-value decomposition least-squares fitting [J]. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2000, 65(4): 681-690.
- [5] Stamnes K, Tsay S C, Jayaweera K, *et al.* Numerically stable algorithm for discrete-ordinate-method radiative transfer in multiple scattering and emitting layered media[J]. Applied Optics, 1988, 27(12): 2502-2509.
- [6] Chen Xiuhong, Liu Qiang, Wei Heli. The treatment of scattering phase function in the multi-scattering radiative transfer calculation[J]. Journal of Light Scattering, 2007, 19(3): 283-289.
陈秀红, 刘 强, 魏合理. 多次散射辐射传输计算中的相函数处理[J]. 光散射学报, 2007, 19(3): 283-289.
- [7] Luo S, Yin Q. Influence of phase function approximation on the scattering intensity calculation[C]. SPIE, 2015, 9678: 967806.
- [8] Yin Q, Luo S. An approximation frame of the particle scattering phase function with a Delta function and a Legendre polynomial series[C]. Optics and Photonics for Energy and the Environment, 2015: EW3A.3.
- [9] Wendisch M, Yang P. Theory of atmospheric radiative transfer: a comprehensive introduction[M]. Hoboken: Wiley, 2012: 170-190.
- [10] Wiscombe W J. Improved Mie scattering algorithms[J]. Applied Optics, 1980, 19(9): 1505-1509.
- [11] Deirmendjian D. Electromagnetic radiation scattering on spherical poly dispersions[M]. New York: American Elsevier Publishing, 1969.
- [12] Liao Guonan. An introduction to atmospheric radiation[M]. 2nd edition. Beijing: China Meteorological Press, 2004: 320-323.
廖国男. 大气辐射导论[M]. 2 版. 北京: 气象出版社, 2004: 320-323.