

余弦高斯光束通过含球差分数傅里叶变换系统的传输

杨玉婷, 张廷蓉, 龚 霞

四川师范大学物理与电子工程学院, 四川 成都 610101

摘要 实际应用中球差作为一种普遍存在的像差,对光束在光学系统中的传输具有较大影响。为了研究球差对光束通过分数傅里叶变换系统后所产生的影响,基于柯林斯公式,推导出余弦高斯光束在有球差和无球差的分数傅里叶变换系统中的场分布,并以 Lohmann I 型系统为例,进行数值模拟计算,研究了余弦高斯光束通过有球差和无球差的分数傅里叶变换系统后输出面的横向光强分布规律以及不同变换阶数和不同调制参数下轴上光强大小与球差系数的关系。结果表明,在分数傅里叶变换系统中,透镜球差对输出面横向光强分布有较大影响,并且正球差和负球差对横向光强的影响效果有明显区别。不同变换阶数和不同调制参数下透镜球差对轴上光强的作用效果不同。

关键词 傅里叶光学; 分数傅里叶变换; 球差; 柯林斯公式; 余弦高斯光束

中图分类号 O438.2 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201737.0207001

Propagation of Cosine-Gaussian Beams in Spherically Aberrated Fractional Fourier Transform System

Yang Yuting, Zhang Tingrong, Gong Xia

College of Physics and Electronic Engineering, Sichuan Normal University, Chengdu, Sichuan 610101, China

Abstract As a common aberration, spherical aberration has great influence on beam propagation in optical systems. In order to study the influence on beams in the spherically aberrated fractional Fourier transform system, based on the Collins formula, the light field distribution expressions of the cosine-Gaussian beams through spherically aberrated and non-spherically aberrated fractional Fourier transform system are derived. With the example of Lohmann I, the output transverse intensity distribution in spherically aberrated fractional Fourier transform system, non-spherically aberrated fractional Fourier transform system, the relationship between the intensity distribution on axis and the coefficient of spherical aberration in different transform orders or different modulation parameters are studied through numerical calculation. It is shown that the spherical aberration of lens has great influence on the output transverse intensity distribution, and whether the spherical aberration is positive or negative also results in notably different effects. The effect on the on-axis light intensity caused by the spherical aberration of lenses is different for different transform orders and modulation parameters.

Key words Fourier optics; fractional Fourier transform; spherical aberration; Collins formula; cosine-Gaussian beams

OCIS codes 070.2575; 070.7345; 080.1010

1 引 言

分数傅里叶变换(FRFT)是一种广义的傅里叶变换,它具有更为灵活、方便等特点、因此在光学信息处理、光传输、光束整形等方面具有更为广阔的应用前景^[1-3]。FRFT 在 1980 年由 Namias 提出其定义和性质,后于 1993 年由 Mendlovic、Ozaktas 和 Lohmann 推广到光学领域并给出光学实现装置^[4-6]。随后,光学

收稿日期: 2016-08-01; **收到修改稿日期:** 2016-09-14

基金项目: 四川省教育厅重点项目(12ZA144)

作者简介: 杨玉婷(1992—),女,硕士研究生,主要从事激光传输与变换方面的研究。E-mail: 975056598@qq.com

导师简介: 张廷蓉(1962—),女,硕士,教授,硕士生导师,主要从事激光传输与变换方面的研究。

E-mail: trz_sc@163.com(通信联系人)

FRFT 成为人们的研究热点。国内外已有大量关于 FRFT 的性质、实现和应用等方面的研究报道^[7-15]。

在实际应用中,球差是一种普遍存在的像差。研究发现,球差对光束通过透镜系统后的光强分布、光谱特性、聚焦特性等许多方面均有影响^[16-25]。因此,研究光束通过含球差 FRFT 系统后的传输特性具有重要的理论和实际意义。然而,在现有对光束通过 FRFT 系统的研究中,有关球差对传输特性的影响的研究报道较少,主要有赵道木、毛海丹等^[17,23-24]对平面波和平顶光束通过含球差的 FRFT 系统的传输特性进行的研究。余弦高斯光束作为厄米正弦类光束的一种特例,相较于高斯光束,它具有更好的聚焦特性和更长的焦深^[26],受到越来越多的关注^[27-30]。2005 年吴平等^[8]采用 Wigner 分布函数研究了分数傅里叶变换面上余弦高斯光束的变换特性,但没有考虑球差对其传输特性的影响。本文利用柯林斯公式,进一步研究余弦高斯光束通过含球差 FRFT 系统的传输特性。

2 理论分析

2.1 余弦高斯光束

余弦高斯光束在 $z=0$ 平面处场分布表示为^[26]

$$E_1(x_1, y_1, 0) = A_0 \exp\left(-\frac{x_1^2}{\omega_0^2} - \frac{y_1^2}{\omega_0^2}\right) \cos(\Omega x_1) \cos(\Omega y_1), \quad (1)$$

式中 A_0 为振幅,取 $A_0=1$, ω_0 为光束束腰宽度, Ω 为余弦项相关的参数,取 $\alpha = \omega_0 \Omega$ 为调制参数。

2.2 实现装置

Lohmann 提出了两种 FRFT 的光学实现装置。如图 1 所示,分别为单透镜 Lohmann I, 双透镜 Lohmann II^[6]。图中 P_1 为输入面, P_2 为输出面, f_1 为标准焦距, $\varphi = p\pi/2$, p 为 FRFT 变换阶数,理想情况(无像差)下,两类系统是等价的。本文主要研究透镜球差对余弦高斯光束通过 Lohmann I 型系统后的影响。

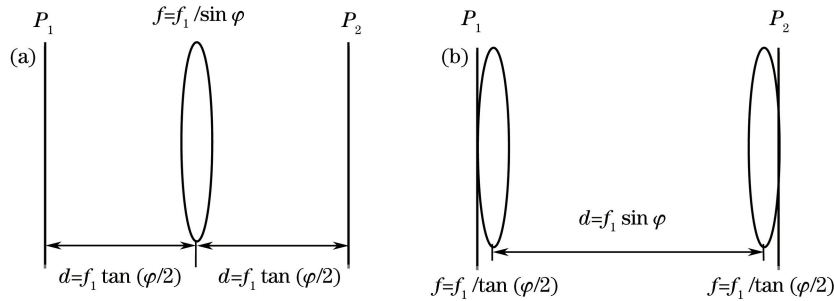


图 1 实现分数傅里叶变换的光学系统。(a) Lohmann I 型系统; (b) Lohmann II 型系统

Fig. 1 Optical systems for performing the fractional Fourier transform. (a) Lohmann I system; (b) Lohmann II system

2.3 余弦高斯光束通过含球差的分数傅里叶变换系统的传输

光束通过透镜时,由于透镜对不同孔径角光线折射率不同以及光学元件加工误差等诸多因素从而产生球差^[31],球差透镜对光束的作用效果由透镜自身的相位延迟因子 $\exp(ikx^2/2f)$ 和球差因子 $\exp(-ikcx^4)$ ^[19] 的叠加结果来表示,光束通过 Lohmann I 型系统的传输可分解为光束依次通过自由空间传输,球差透镜的作用以及自由空间传输。由此分步利用柯林斯公式得出余弦高斯光束通过球差 FRFT 系统后场分布的表达式为

$$E(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{\lambda d}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x_1^2}{\omega_0^2} - \frac{y_1^2}{\omega_0^2}\right) \cos(\Omega x_1) \cos(\Omega y_1) \exp\left[\frac{ik}{2d}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)\right] \times E(x_1, x_2, y_1, y_2) dx_1 dy_2, \quad (2)$$

式中 $E(x_1, x_2, y_1, y_2) =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-ikc(\xi^4 + \eta^4) + ik\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2f}\right)(\xi^2 + \eta^2) - \frac{ik}{d}[(x_1 + x_2)\xi + (y_1 + y_2)\eta]\right\} d\xi d\eta, \text{ 波数 } k = \frac{2\pi}{\lambda}, c$$

为球差系数^[16],省略对输出场光强分布无影响的相位因子 $\exp(2ikz)$ 。

利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-Gx^2 \pm Hx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{G}} \exp\left(\frac{H^2}{4G}\right), \quad (3)$$

对(2)式中 x_1, y_1 积分,将四重积分分解为二重积分从而加快数值模拟运算速度,得表达式

$$\begin{aligned} E(x_2, y_2) = & \frac{2\pi w_0^2}{(2d - ik\tau w_0^2) d \lambda^2} \exp\left(-\frac{d w_0^2 \Omega^2}{2d - ik\tau w_0^2}\right) \exp\left[\frac{ik}{2d}(x_2^2 + y_2^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ikc(\xi^4 + \eta^4)] \times \\ & \exp\left[\frac{2ikd(2f-d) + k^2 w_0^2(f-d)}{2fd(2d - ik\tau w_0^2)}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{ik}{d}(x_2\xi + y_2\eta)\right] \times \\ & \cosh\left(\frac{k\Omega w_0^2 \xi}{2d - ik\tau w_0^2}\right) \cosh\left(\frac{k\Omega w_0^2 \eta}{2d - ik\tau w_0^2}\right) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (4)$$

利用光强表达式

$$I(x_2, y_2) = E(x_2, y_2) E^*(x_2, y_2), \quad (5)$$

可得余弦高斯光束通过含球差的 FRFT 系统后的光强分布。

当 $c=0$ 时,(4)式将退化成余弦高斯光束在理想 FRFT 系统中的传输情况。利用(3)式积分得输出面的场分布为

$$\begin{aligned} E(x_2, y_2) = & -\frac{i\pi}{4a\lambda f_1 \sin \varphi} \exp\left[-\frac{\Omega^2}{2a} + \left(\frac{ik \cos \varphi}{2f_1 \sin \varphi} - \frac{k^2}{4af_1^2 \sin^2 \varphi}\right)(x_2^2 + y_2^2)\right] \times \\ & \cosh\left(\frac{k\Omega x_2}{2af_1 \sin \varphi}\right) \cosh\left(\frac{k\Omega y_2}{2af_1 \sin \varphi}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $a = \frac{2f_1 \tan \varphi - ik\tau w_0^2}{2f_1 w_0^2 \tan \varphi}$,省略对输出场光强分布无影响的相位因子 $\exp(ikz)$,利用(5)式可得余弦高斯光束通过理想 FRFT 系统后的光强分布。

3 数值计算和分析

取如下计算参数:光束束腰宽度 $w_0 = 1.0 \text{ mm}$,波长 $\lambda = 1.06 \text{ }\mu\text{m}$,标准焦距 $f_1 = 2.0 \text{ m}$ 。计算发现在有球差和无球差情况下 $0 < p \leq 1$ 和 $1 \leq p < 2$ 区间的光强呈对称性分布,所以主要讨论 $0 < p \leq 1$ 区间的光强分布。

利用(5)、(6)式进行数值计算,得到不同阶数 p 下余弦高斯光束通过无球差 FRFT 系统后输出面横向光强分布,如图 2 所示。计算时取调制参数 $\alpha = 3$,变换阶数 p 分别为 0.1, 0.3, 0.5, 1.0。从图中可以看出,FRFT 的变换阶数 p 不同,输出面的光强分布有很大区别,在 $p=1$ 时光强分布为双曲余弦高斯光束。随着 p 的增大,中心光强减小,光强从轴心向轴旁转移,光束束宽增加,光强集中度减小。峰值光强先减小后增大, $p=0.5$ 时,峰值光强最小。

利用(4)、(5)式进行数值模拟,得到余弦高斯光束通过不同球差 FRFT 系统后输出面的横向光强分布,如图 3 所示,计算时取 $\alpha = 3, p = 0.5, c$ 分别为 $0.000, \pm 0.001, \pm 0.002, \pm 0.003 \text{ mm}^{-3}$ 。从图中可以看出,球差对输出面光强分布的影响是很显著的。由于透镜球差的影响,光束从 $c = 0.000 \text{ mm}^{-3}$ 下的 9 个主峰结构演化为中心逐渐突出的多峰结构,直至成为单峰的一类高斯分布。对比图 3 中透镜正球差的图 3(b)、3(d)、3(f)和透镜负球差的图 3(c)、3(e)、3(g),可以看出正负球差对输出面光强影响不同。在透镜正球差下,输出面的光束束宽变小,中心光强较无球差时的光强大,能量分布更为集中;而负球差透镜下,光束束宽变宽,中心光强比正球差时的光强小,与无球差时相比无明显变化,能量分布相对分散。在实际应用中可通过改变孔径光阑和透镜形状来获取合适的球差透镜^[32],获得比理想 FRFT 系统中更高的中心峰值光强和可聚焦度。

同样利用(4)、(5)式,令 $x=0, y=0$ 时,得到不同阶数和不同调制参数下,余弦高斯光束轴上光强随球差系数的变换情况。由图 4、5 可知,球差系数 c 、分数傅里叶变换阶数 p 、调制参数 α 对输出面轴上光强 I 均有影响。以下将作详细讨论。

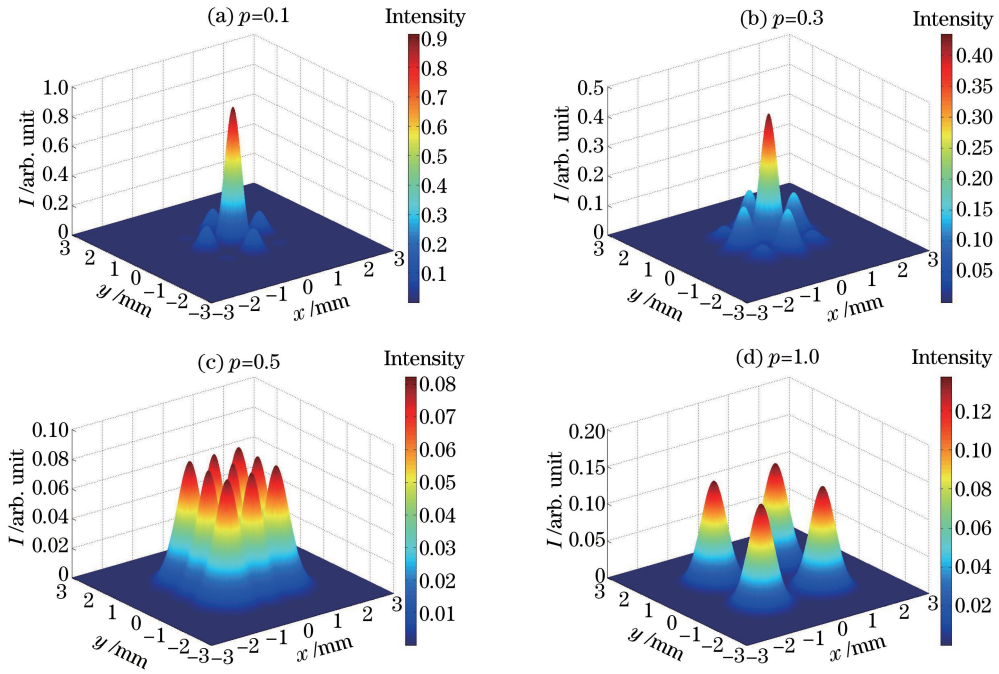


图 2 余弦高斯光束通过理想分数傅里叶变换系统后的光强分布

Fig. 2 Transverse intensity distribution of the cosine-Gaussian beams through non spherically aberrated fractional Fourier transform system

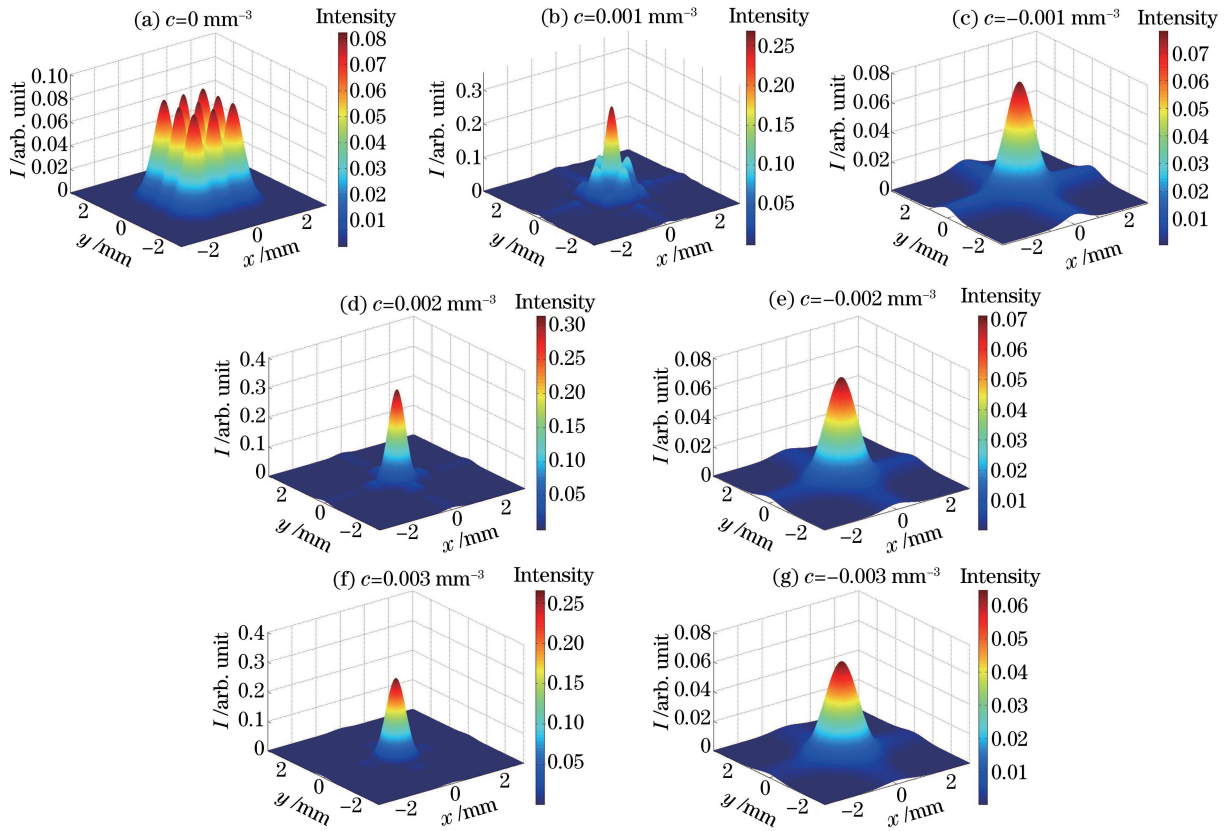


图 3 余弦高斯光束通过含球差的分数傅里叶变换系统后的光强分布

Fig. 3 Transverse intensity distribution of the cosine-Gaussian beams through spherically aberrated fractional Fourier transform

图 4 为 $\alpha=3$, $p=0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ 时, 输出面轴上光强 I 随 c 的变化。从图中可以看出, 在 $0 < p \leq 1$ 之间正球差透镜对轴上光强的影响较大。正球差透镜下, 随着 c 的改变, 轴上光强大小震荡变化, 且 p 越小, 震荡越强烈, 球差影响效果越大。相比于正球差透镜, 负球差透镜对轴上光强大小的影响不大, 随着 c 的改变, 轴上光强大小变换缓慢, 没有出现正球差透镜类似的剧烈震荡。此处结论适用于 $0 < p \leq 1, 1 \leq p < 2$ 的情况与此结论相反。相同 p 下随着 c 的改变, 轴上光强将出现极值点, 选取合适的球差系数 c , 可得到轴上光强极大或空心的光强分布, 通过对 c 的调节, 为光束的整形提供了更多的可能性。

图 5 为 $p=0.5$, $\alpha=0.75, 1.50, 2.25, 3.00$ 时, 输出面轴上光强 I 随球差系数 c 的变化。从图中可以看出, c 相同时, 随着 α 的增加, 轴上光强减小。 c 绝对值较小时, 轴上光强急剧变化, 正球差下变化更为剧烈。当 c 达到一定值后, 轴上光强不再剧烈变化, 开始缓慢减小。且随着 c 的绝对值的增大, 不同调制参数下的轴上光强相互靠拢, 由此说明轴上光强同时受到调制参数 α 和球差系数 c 的影响, c 绝对值不大时, α 和 c 对轴上光强均有明显的影响效果, 但随着 c 的增加, α 的影响效果降低, 主要受 c 的影响。

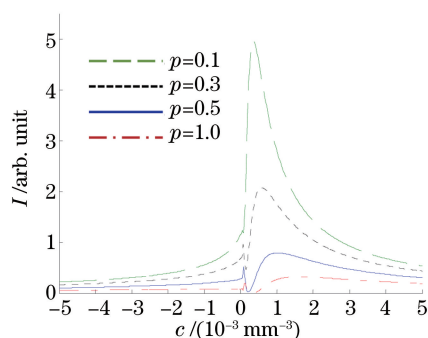


图 4 不同变换阶数的出射面轴上光强随球差变换曲线

Fig. 4 Output on-axis intensity I versus spherical aberration coefficient c for different transform orders

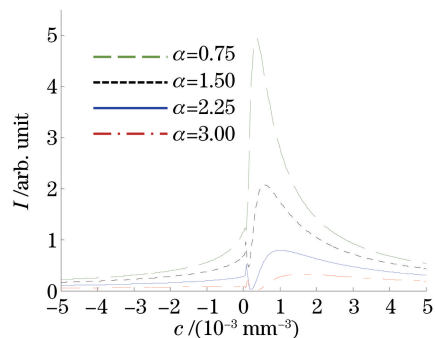


图 5 不同调制参数的出射面轴上光强随球差变换曲线

Fig. 5 Output on-axis intensity I versus spherical aberration coefficient c for different modulation parameters

4 结 论

从柯林斯公式出发导出余弦高斯光束通过含球差的 Lohmann I 型 FRFT 系统后的场分布表达式, 研究了球差系数对输出面光强分布的影响, 以及球差系数、FRFT 变换阶数、调制参数对输出面轴上光强的影响及其变化规律。研究表明, 透镜球差对输出面的横向光强分布影响很大, 正球差下输出面能量分布相对集中, 负球差下能量分布较分散, 此结论与文献[17, 24]结论一致。研究还表明, 正球差和负球差对轴上光强大小的影响也不相同, $0 < p \leq 1$ 时, 正球差作用效果更为剧烈。同时 FRFT 系统的变换阶数越小, 调制参数越小, 球差对轴上光强产生的影响越大。所得结论对研究光束通过含球差的分数傅里叶变换系统的传输特性有一定的参考价值, 同时为光束整形和控制提供了一定的理论基础。在实际光学系统中, 常使用未消球差的透镜, 因此本文的结论对实际分数傅里叶变换系统的设计有参考意义。

参 考 文 献

- [1] Wen Liang. Fractional Fourier transform and its application[D]. Chongqing: Chongqing University, 2008: 18-33.
文 亮. 分数傅里叶变换及其应用[D]. 重庆: 重庆大学, 2008: 18-33.
- [2] Zhang Yan, Gu Benyuan, Yang Guozhen. Optical fractional Fourier transform and its applications[J]. Physics, 1999, 28(8): 484-490.
张 岩, 顾本源, 杨国桢. 光学分数傅里叶变换及其应用[J]. 物理, 1999, 28(8): 484-490.
- [3] Su Xianyu, Li Jitao, Cao Yiping, et al. Information optics[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2012: 271-278.
苏显渝, 李继陶, 曹益平, 等. 信息光学[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2012: 271-278.
- [4] Mendlovic D, Ozaktas H M. Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I [J]. Journal of the Optical Society of America A, 1993, 10(9): 1875-1881.
- [5] Ozaktas H M, Mendlovic D. Fourier transforms of fractional order and their optical interpretation[J]. Journal of the

- Optics Society of America A, 1993, 101(3): 163-169.
- [6] Lohmann A W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1993, 10(10): 2181-2186.
- [7] 吴 平. 分数傅里叶变换的应用研究[J]. 学术动态, 2005, 11(3): 17-21.
- [8] Wu Ping, Li Bo, Chen Tianlu, *et al.* Transformation properties of a cosine-Gaussian beam in fractional Fourier transform plane[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2005, 17(12): 1787-1790.
吴 平, 李 波, 陈天禄, 等. 分数傅里叶变换面上余弦-高斯光束的变换特性[J]. 强激光与粒子束, 2005, 17(12): 1787-1790.
- [9] Wu Ping, Lü Baida, Chen Tianlu. Fractional Fourier transform of beams in the use of the Wigner distribution function method[J]. Acta Physica Sinica, 2005, 54(2): 658-664.
吴 平, 吕百达, 陈天禄. 光束分数傅里叶变换的 Wigner 分布函数分析方法[J]. 物理学报, 2005, 54(2): 658-664.
- [10] Chen Senhui, Zhang Tingrong, Feng Xiaofang. Transformation properties of Hermite-Laguerre-Gaussian beam in fractional Fourier transform plane[J]. Chinese J Lasers, 2009, 36(2): 374-378.
陈森会, 张廷蓉, 冯小芳. 分数傅里叶变换面上厄米-拉盖尔-高斯光束的变换特性[J]. 中国激光, 2009, 36(2): 374-378.
- [11] Chen Senhui, Zhang Tingrong. Fractional Fourier transform for incoherent one-dimensional off-axis Gaussian beams [J]. High Power Laser and Particle Beams, 2009, 21(2): 190-194.
陈森会, 张廷蓉. 1 维线阵离轴高斯光束的分数傅里叶变换[J]. 强激光与粒子束, 2009, 21(2): 190-194.
- [12] Chen Senhui, Zhang Tingrong, Huang Yongchao, *et al.* Spectrum properties of Gaussian-Shell mode beam in the Chromatics aberrated fractional Fourier transforms system[J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(1): 0107001.
陈森会, 张廷蓉, 黄永超, 等. 高斯-谢尔模型光束在有色差的分数傅里叶变换系统中的光谱特性[J]. 光学学报, 2011, 31(1): 0107001.
- [13] Chen Tianlu, Wu Ping. Fractional Fourier transforms for cosh-Gaussian beams[J]. Chinese J Lasers, 2005, 32(7): 908-912.
陈天禄, 吴 平. 双曲余弦-高斯光束的分数傅里叶变换特性研究[J]. 中国激光, 2005, 32(7): 908-912.
- [14] Yang Lei, Xia Jun, Zhang Xiaobing, *et al.* Three-dimensional display by holographic imaging on multiple focal planes [J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(2): 0209017.
杨 磊, 夏 军, 张晓兵, 等. 基于多平面全息成像的三维显示[J]. 中国激光, 2014, 41(2): 0209017.
- [15] Kong Dezhao, Shen Xueju, Zhao Yan, *et al.* Encryption and display of three-dimensional information based computer generated hologram and random phase encoding[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2015, 52(10): 100902.
孔德照, 沈学举, 赵 燕, 等. 基于计算全息和随机相位编码的三维信息的加密与显示[J]. 激光与光电子学进展, 2015, 52(10): 100902.
- [16] Siegman A E. Analysis of laser beam quality degradation caused by quartic phase aberrations[J]. Applied Optics, 1993, 32(30): 5893-5901.
- [17] Zhao Daomu, Mao Haidan. Fractional Fourier transform with spherically aberrated lens[J]. Journal of Optoelectronics • Laser, 2004, 15(6): 724-730.
赵道木, 毛海丹. 带透镜球差的分数傅立叶变换[J]. 光电子 • 激光, 2004, 15(6): 724-730.
- [18] Ji Xiaoling, Lü Baida. Effect of the spherically aberrated lens on beam quality[J]. Chinese J Lasers, 2001, 28(4): 347-350.
季小玲, 吕百达. 球差透镜对高斯光束质量的影响[J]. 中国激光, 2001, 28(4): 347-350.
- [19] Ji Xiaoling, Lü Baida. Focusing property of Gaussian beams through a spherical aberrant lens[J]. Laser Technology, 2001, 25(2): 150-153.
季小玲, 吕百达. 高斯光束通过球差透镜的聚焦特性[J]. 激光技术, 2001, 25(2): 150-153.
- [20] Wang Qingfeng, Wang Xiqing, Huang Qing. Effect of the spherically aberrated lens on the property of cosine-Gaussian [J]. Laser Journal, 2006, 27(4): 41-42.
王庆峰, 王喜庆, 黄 庆. 球差透镜对余弦高斯光束聚焦特性的影响[J]. 激光杂志, 2006, 27(4): 41-42.
- [21] Pu Jixiong. Lenses with spherical aberration for generating subdiffraction-limited focusing[J]. Chinese J Lasers, 1999, 26(6): 542-546.
蒲继雄. 利用球差透镜获得超衍射极限聚焦[J]. 中国激光, 1999, 26(6): 542-546.
- [22] Chen J R, Yan J L. Study on spherical aberration of imaging system constructed by fractional Fourier transform[C]. SPIE, 2008, 6034: 60341U.

- [23] Mao H D, Zhao D M, Jing F, *et al.* Propagation characteristics of the kurtosis parameters of flat-topped beams passing through fractional Fourier transformation systems with a spherically aberrated lens[J]. *Journal of Optics A*, 2004, 6(6): 640-650.
- [24] Mao Haidan, Ye Teng. Studies on the fractional Fourier transform with spherically aberrated lenses[J]. *Journal of Hangzhou Dianzi University*, 2008, 28(4): 88-91.
毛海丹, 叶 腾. 带球差的分数傅立叶变换系统的传输特性研究[J]. *杭州电子科技大学学报*, 2008, 28(4): 88-91.
- [25] Sun Chuan, He Yanlin, Wu Fengtie. Bottle beam generation with a double ring lens by focusing parallel light[J]. *Acta Optica Sinica*, 2015, 35(12): 1208001.
孙 川, 何艳林, 吴逢铁. 双环透镜聚焦平行光产生局域空心光束[J]. *光学学报*, 2015, 35(12): 1208001.
- [26] Wang Shaomin, Lin Qiang, Jiang Xiaoqing. Cosine-Gauss beam[J]. *Acta Photonica Sinica*, 1999, 28(4): 367-370.
王绍民, 林 强, 江晓清. 余弦-高斯光束[J]. *光子学报*, 1999, 28(4): 367-370.
- [27] Li Yantao, Zhang Tingrong, Zhang Weilin, *et al.* Propagation of cosine-Gaussian beams in uniaxial crystals orthogonal to the optical axis[J]. *Journal of Sichuan Normal University (Natural Science)*, 2013, 36(6): 893-901.
李艳桃, 张廷蓉, 张伟林, 等. 余弦高斯光束在单轴晶体中垂直于光轴的传输[J]. *四川师范大学学报(自然科学版)*, 2013, 36(6): 893-901.
- [28] Song Hongyuan, Zhang Tingrong, Chen Senhui, *et al.* Propagation properties of cosine-Gaussian beams in gradient-index medium[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2011, 23(4): 890-894.
宋宏远, 张廷蓉, 陈森会, 等. 余弦高斯光束在梯度折射率介质中的传输特性[J]. *强激光与粒子束*, 2011, 23(4): 890-894.
- [29] Bao Jianqin, Zhang Tingrong, Huo Yajie. Propagation properties of cosine-Gaussian beam through a left-handed material slab[J]. *Journal of Optoelectronics • Laser*, 2013, 24(6): 1231-1237.
包建勤, 张廷蓉, 霍雅洁. 余弦高斯光束通过左手平板材料的传输特性[J]. *光电子 • 激光*, 2013, 24(6): 1231-1237.
- [30] Wang Xiqing, Ke Zunping, Lü Baida. Propagation properties of cosine-Gaussian beams[J]. *Laser Technology*, 2001, 25(2): 121-125.
王喜庆, 柯尊平, 吕百达. 余弦高斯光束的传输特性[J]. *激光技术*, 2001, 25(2): 121-125.
- [31] 张以谟, 张红霞, 贾大功. *应用光学*[M]. 北京: 电子工业出版社, 2015: 170-176.
- [32] Liu Zhuqin, Xu Hong. Experimental study on solid colored spherical aberration[J]. *Journal of Yan'an University (Natural Science Edition)*, 2005, 24(2): 39-40.
刘竹琴, 徐 红. 单色球差的实验研究[J]. *延安大学学报(自然科学版)*, 2005, 24(2): 39-40.