

# 一种产生 Mathieu 光束的光学系统

王硕琛, 吴逢铁, 冯 聪

华侨大学信息科学与工程学院福建省光传输与变换重点实验室, 福建 厦门 361021

**摘要** 设计了一种简单而新颖的光学元件。光束经过此元件后,再利透镜聚焦便可产生无衍射 Mathieu 光束,且改变衍射元件的参数,Mathieu 光束的  $q$  值随之改变。利用离散傅里叶方法从理论上导出了该光学系统的 Mathieu 光束的表达式,采用 Matlab 模拟了光斑强度。数值模拟和实验结果证实了此元件产生无衍射 Mathieu 光束的有效性。

**关键词** 衍射; Mathieu 光束; 离散傅里叶方法; 角谱; 复振幅

**中图分类号** O439 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/AOS201737.0205002

## An Optical System Generating Mathieu Beams

Wang Shuochen, Wu Fengtie, Feng Cong

*Fujian Provincial Key Laboratory of Light Propagation and Transformation, College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen, Fujian 361021, China*

**Abstract** A novel and simple optical element is designed. If beams passing through this diffractive element and focused by a lens, non-diffracting Mathieu beams are realized. Moreover, the  $q$  values of Mathieu beams vary with the parameters of diffractive elements. The Mathieu beam expression of this optical system is derived theoretically by discrete Fourier methods and the beam spot intensity is simulated with Matlab. The numerical simulation as well as experimental result confirm the validity of producing non-diffracting Mathieu beams by this diffractive element.

**Key words** diffraction; Mathieu beams; discrete Fourier method; angular spectrum; complex amplitude

**OCIS codes** 050.1940; 070.3185; 220.3630

## 1 引 言

1987年,Durnin<sup>[1]</sup>提出了亥姆霍兹方程在圆柱坐标系下的一组无衍射特解,因其光强呈贝塞尔函数形式分布而称为贝塞尔光束。贝塞尔光束因具有中心光强集中、传播过程中不会发生衍射和遇到障碍物自重建等特性而被广泛应用。2005年,Gutiérrez-Vega等<sup>[2]</sup>提出亥姆霍兹方程在4种坐标系下能得到4种不同的无衍射解,对应的4种不同无衍射光束分别是笛卡儿坐标系下的余弦光束、圆柱坐标系下的贝塞尔光束、椭圆柱坐标系下的 Mathieu 光束和抛物线坐标系下的抛物线光束。目前的研究主要集中在贝塞尔光束,对其他3种光束的研究甚少。

2000年,Gutiérrez-Vega等<sup>[3]</sup>提出一种新的无衍射光束——Mathieu 光束,该光束引起学者们的研究兴趣<sup>[4-6]</sup>。无衍射 Mathieu 光束与贝塞尔光束一样可应用于三维粒子操控<sup>[7]</sup>和非线性光学<sup>[8]</sup>等领域。另外,Mathieu 光束还能应用于贝塞尔光束没有涉及到的光学扫描领域<sup>[9]</sup>。目前产生无衍射光束的方法主要有计算机全息法<sup>[10]</sup>、激光谐振腔法<sup>[11]</sup>和柱透镜-轴棱锥法<sup>[12]</sup>。前两种方法操作比较复杂、要求高,而柱透镜-轴棱锥法产生的 Mathieu 光束的  $q$  值(Mathieu 函数的参数  $q = \frac{h^2 k_t^2}{4}$ ,  $k_t$  为径向波数,  $h$  为普朗克常量)会随传播

**收稿日期:** 2016-07-29; **收到修改稿日期:** 2016-10-19

**基金项目:** 国家自然科学基金(61178015)、福建省科技重大项目(2016H6016)、泉州市科技重点项目(2014Z127)

**作者简介:** 王硕琛(1992—),男,硕士研究生,主要从事光束传输与变换方面的研究。E-mail: 103263406@qq.com

**导师简介:** 吴逢铁(1958—),男,博士,教授,主要从事光束传输与变换、短脉冲技术及非线性光学方面的研究。

E-mail: fengtie@hqu.edu.cn(通信联系人)

距离的改变而发生变化。

2001年, Guti3rrez-Vega 利用一维高斯光束入射环缝, 结合透镜聚焦产生了无衍射 Mathieu 光束, 但是一维高斯光束较难获得。本文设计了一种利用激光光源入射便可产生无衍射 Mathieu 光束的新型衍射元件, 这种元件具有成本低、光学系统简单和光束质量好等优点。此外, 传统的无衍射光束的理论分析一般使用标量衍射理论, 计算过程复杂, 模拟时间长, 快速傅里叶方法能简化计算, 缩减计算机模拟时间<sup>[13]</sup>。目前, 傅里叶方法在光束传输领域已有大量运用<sup>[14-15]</sup>, 但其在 Mathieu 光束中的应用研究鲜有报道。

## 2 理论分析

产生 Mathieu 光束的光学系统如图 1 所示。图 2 所示的两个对称的月牙缝衍射元件, 其透射率函数为  $t(x_0, y_0)$ 。根据基尔霍夫假定的边界条件, 紧贴衍射元件后的几何阴影区域光强恒为零。于是, 孔径后的透射光场的复振幅可以表示为

$$U_2(x_0, y_0) = U_1(x_0, y_0)t(x_0, y_0), \quad (1)$$

式中  $U_1(x_0, y_0)$  为入射光束复振幅。

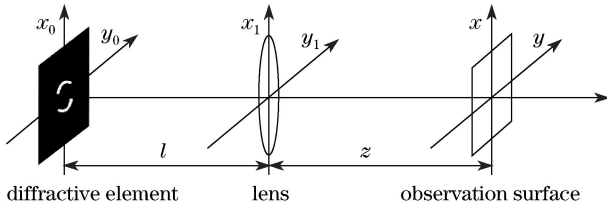


图 1 光学系统光路图

Fig. 1 Optical path of optical system

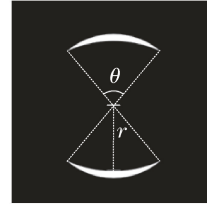


图 2 衍射元件示意图

Fig. 2 Schematic of diffractive elements

假定入射光场和透射光场的角谱分别为  $A_1(f_{x_0}, f_{y_0})$ 、 $A_2(f_{x_0}, f_{y_0})$ , 两者的关系由傅里叶卷积关系确定:

$$A_2(f_{x_0}, f_{y_0}) = A_1(f_{x_0}, f_{y_0})T(f_{x_0}, f_{y_0}), \quad (2)$$

式中  $f_x$  和  $f_y$  为频域坐标,  $T(f_{x_0}, f_{y_0})$  是衍射元件透射率函数经傅里叶变换后的函数。

对于平面波垂直入射衍射元件的情况, 将入射平面波进行归一化处理, 令  $U_1(x_0, y_0) = 1$ , 于是衍射元件后光场的角谱即为衍射元件振幅透射率的傅里叶变换:

$$A_2(f_{x_0}, f_{y_0}) = T(f_{x_0}, f_{y_0}) = \mathcal{F}[t(x_0, y_0)], \quad (3)$$

式中  $\mathcal{F}(\cdot)$  表示傅里叶变换。利用衍射的角谱理论, 从衍射元件出射的光束传播到透镜入射面的光场角谱为

$$A_3(f_{x_1}, f_{y_1}) = A_2(f_{x_0}, f_{y_0})H(f_{x_1}, f_{y_1}), \quad (4)$$

式中  $H(f_{x_1}, f_{y_1}) = \exp[ikl\sqrt{1 - (\lambda f_{x_1})^2 - (\lambda f_{y_1})^2}]$  是系统的传递函数,  $\lambda$  为波长,  $k$  为波矢大小,  $l$  为衍射元件与透镜之间的距离。

光场的复振幅为

$$U_3(x_1, y_1) = \text{IFFT}[A_3(f_{x_1}, f_{y_1})], \quad (5)$$

式中  $\text{IFFT}(\cdot)$  表示傅里叶逆变换。光束经过透镜后的光场复振幅为

$$U_4(x_1, y_1) = U_3(x_1, y_1) \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x_1^2 + y_1^2)\right], \quad (6)$$

式中  $f$  为透镜的焦距。

透镜后菲涅耳衍射区内任意  $z$  平面处的光场分布为

$$U(x, y) = \frac{1}{i\lambda z} \exp\left[ik\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)\right] \times \mathcal{F}\left\{\text{IFFT}\left\{\mathcal{F}[t(x_0, y_0)]H(f_{x_1}, f_{y_1})\right\} \exp\left[ik\left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{2f}\right)(x_1^2 + y_1^2)\right]\right\}. \quad (7)$$

频率与观察平面的坐标关系为

$$f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}. \quad (8)$$

假设衍射元件面上  $x$ 、 $y$  的抽样数分别为  $N$  和  $M$ , 根据抽样定理可得空间域上的抽样间隔与频域上的抽样间隔满足

$$\begin{cases} \Delta f_x \cdot \Delta x = \frac{1}{N} \\ \Delta f_y \cdot \Delta y = \frac{1}{M} \end{cases}. \quad (9)$$

衍射元件所在面为第一衍射面, 透镜面为第二衍射面, 观察面为最终衍射面, 根据(8)、(9)式可得第一、第二和最终衍射面的空间抽样间隔分别为  $(\Delta x_0, \Delta y_0)$ 、 $(\frac{\lambda \cdot l}{\Delta x_0 \cdot N}, \frac{\lambda \cdot l}{\Delta y_0 \cdot N})$ 、 $(\frac{z}{l} \Delta x_0, \frac{z}{l} \Delta y_0)$ , 将其代入(7)式得到离散化的光场分布, 即

$$\begin{aligned} U(n\Delta x, m\Delta y) = & \frac{1}{i\lambda z} \exp\left\{ik\left[z + \frac{(n\Delta x)^2 + (m\Delta y)^2}{2z}\right]\right\} \times \\ & \text{DFT}\left\{\text{IDFT}\left\{\text{DFT}[t(n\Delta x_0, m\Delta y_0)]H\left(\frac{n\Delta x_0}{\lambda l}, \frac{m\Delta y_0}{\lambda l}\right)\right\}\right\} \times \\ & \exp\left\{ik\left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{2f}\right)\left[\left(\frac{zn\Delta x_0}{\lambda l}\right)^2 + \left(\frac{zm\Delta y_0}{\lambda l}\right)^2\right]\right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

式中  $\text{DFT}(\cdot)$  和  $\text{IDFT}(\cdot)$  分别为离散傅里叶变换和离散傅里叶逆变换。因此观察面的光强表达式为

$$I(n\Delta x, m\Delta y) = |U(n\Delta x, m\Delta y)|^2. \quad (11)$$

### 3 模拟与实验

#### 3.1 数值模拟

图 1 中衍射元件到透镜的距离  $l$  为 70 mm, 衍射元件是只有两瓣月牙形的圆弧透光而其余部分均不透光的菲林片。衍射元件尺寸为 20 mm × 20 mm, 圆弧最宽处厚度为 0.1 mm, 选取圆弧对应的圆心角  $\theta$  为  $50^\circ$ , 半径  $r$  为 2 mm。令波长  $\lambda$  为 632 nm, 透镜焦距  $f$  为 100 mm,  $z$  取 80 mm, 抽样数  $N$  和  $M$  均取 1024, 将上述参数代入(11)式并用 Matlab 模拟, 得到不同距离处的光强分布, 如图 3 所示。图 4 是  $q$  值为 300 时的零阶 Mathieu 光束图。可以看到, 选用圆心角为  $50^\circ$  的衍射元件得到的  $z=80$  mm 处光强分布图与  $q$  值为 300 的零阶 Mathieu 光束的光强分布图相似, 均呈带状分布, 在  $x$  方向上光强比较集中,  $y$  方向上光强呈周期性分布, 且中心光强比两侧光强略高。



图 3 新型衍射元件产生的 Mathieu 光束模拟图

Fig. 3 Simulated Mathieu beams obtained by novel diffractive elements

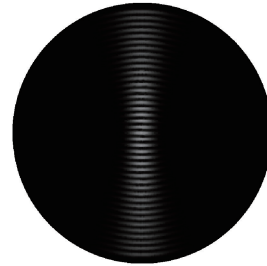


图 4  $q=300$  时的零阶 Mathieu 光束图

Fig. 4 Zero-order Mathieu beams with  $q$  value of 300

#### 3.2 实验验证

设计图 5 所示的光学系统, 光源是波长为 632 nm 的 He-Ne 激光器, 扩束系统透镜焦距  $f_1$ 、 $f_2$  分别为 15 mm 和 190 mm。衍射元件所选参数与模拟过程一致, 聚焦透镜焦距  $f_3$  为 100 mm, 光束在透镜后的一段距离内呈无衍射特性。无衍射区域内截面处的光强分布如图 6 所示。

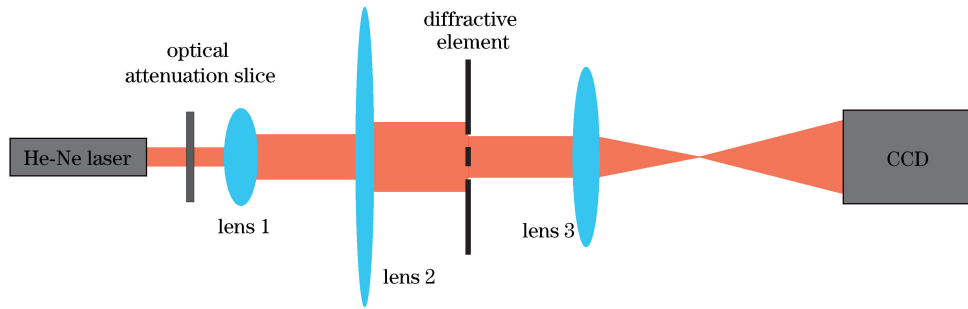


图 5 实验光路图

Fig. 5 Experimental optical path

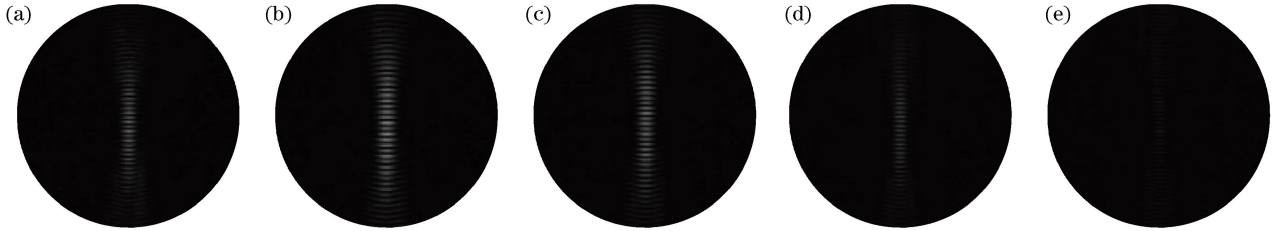


图 6 新型衍射元件的实验光强分布图。(a)  $z=60$  mm; (b)  $z=70$  mm; (c)  $z=80$  mm; (d)  $z=90$  mm; (e)  $z=100$  mm  
Fig. 6 Experimental light intensity distributions for novel diffractive elements. (a)  $z=60$  mm; (b)  $z=70$  mm;  
(c)  $z=80$  mm; (d)  $z=90$  mm; (e)  $z=100$  mm

从图 6 的实验光强分布可以看到,圆心角为  $50^\circ$  的新型衍射元件在透镜后 60 mm 处开始出现 Mathieu 光束,并且在一段距离内呈无衍射特性,图 6(b)~(d) 中的光束形状均未发生明显改变,直到  $z$  为 100 mm 时光强减弱而无法显示,这与模拟结果吻合。

改变衍射元件的圆心角进行重复实验,结果如图 7 所示。不同  $q$  值对应的零阶 Mathieu 光束如图 8 所示。当圆心角  $\theta$  为  $70^\circ$  时,得到的实验光强分布如图 7(a)~(e) 所示,近似于图 8(a) 所示  $q$  值取 40 时的零阶 Mathieu 光束。当圆心角  $\theta$  为  $90^\circ$  时,得到的实验光强分布如图 7(f)~(j) 所示,近似于图 8(b) 所示  $q$  值取 10 时的零阶 Mathieu 光束。改变衍射元件的圆心角,无衍射区域未发生改变,均在 60 mm 处开始产生无衍射 Mathieu 光束,在 100 mm 处光强出现明显减弱。

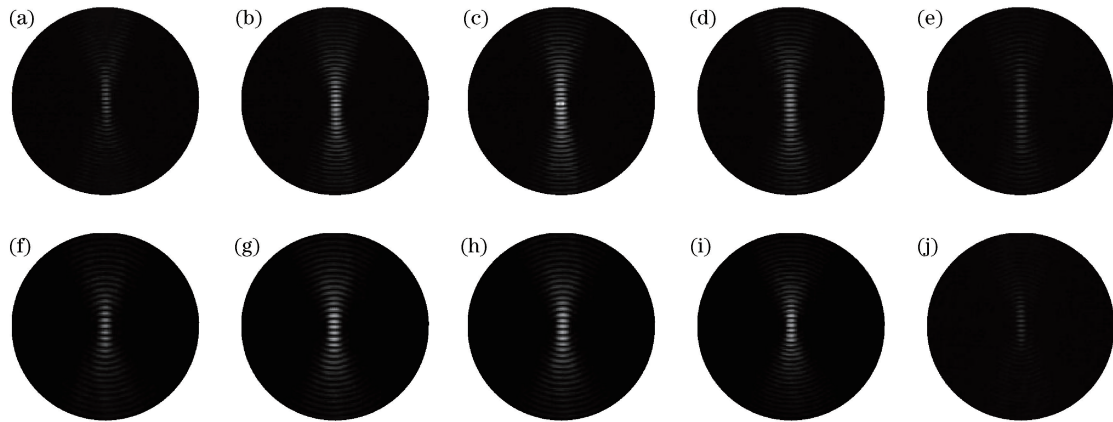


图 7 不同参数下的新型衍射元件的实验光强分布图。(a)  $\theta=70^\circ, z=60$  mm; (b)  $\theta=70^\circ, z=70$  mm;  
(c)  $\theta=70^\circ, z=80$  mm; (d)  $\theta=70^\circ, z=90$  mm; (e)  $\theta=70^\circ, z=100$  mm; (f)  $\theta=90^\circ, z=60$  mm;  
(g)  $\theta=90^\circ, z=70$  mm; (h)  $\theta=90^\circ, z=80$  mm; (i)  $\theta=90^\circ, z=90$  mm; (j)  $\theta=90^\circ, z=100$  mm

Fig. 7 Experimental light intensity distributions for novel diffractive elements under different parameters.  
(a)  $\theta=70^\circ, z=60$  mm; (b)  $\theta=70^\circ, z=70$  mm; (c)  $\theta=70^\circ, z=80$  mm; (d)  $\theta=70^\circ, z=90$  mm;  
(e)  $\theta=70^\circ, z=100$  mm; (f)  $\theta=90^\circ, z=60$  mm; (g)  $\theta=90^\circ, z=70$  mm; (h)  $\theta=90^\circ, z=80$  mm;  
(i)  $\theta=90^\circ, z=90$  mm; (j)  $\theta=90^\circ, z=100$  mm

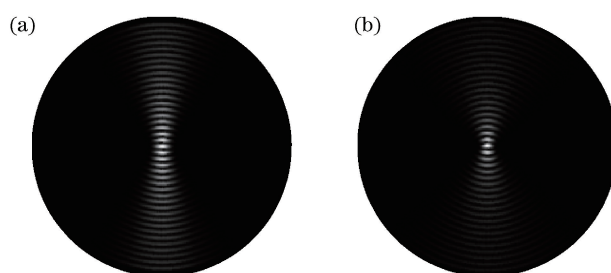


图 8 不同  $q$  值对应的零阶 Mathieu 光束图。(a)  $q=40$ ; (b)  $q=10$

Fig. 8 Zero-order Mathieu beams with different  $q$  values. (a)  $q=40$ ; (b)  $q=10$

## 4 结 论

设计了一种产生无衍射 Mathieu 光束的新型光学元件,此衍射元件为两瓣月牙形的圆弧透光菲林片。光束入射此衍射元件后再利用透镜聚焦便可获得无衍射 Mathieu 光束。数值模拟和实验结果均证明了这一衍射元件产生 Mathieu 光束的可行性。利用此衍射元件产生 Mathieu 光束的光学系统简单,衍射元件成本低且易获得,得到的 Mathieu 光束质量较高。研究结果具有较大的实用价值。

## 参 考 文 献

- [1] Durnin J. Exact-solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1987, 4(4): 651-654.
- [2] Gutiérrez-Vega J C, Bandres M A. Helmholtz-Gauss waves[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2005, 22(2): 289-298.
- [3] Gutiérrez-Vega J C, Iturbe-Castillo M D, Chávez-Cerda S. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams[J]. Optics Letters, 2000, 25(20): 1493-1495.
- [4] Belafhal A, Chafiq A, Hricha Z. Scattering of Mathieu beams by a rigid sphere[J]. Optics Communications, 2011, 284(12): 3030-3035.
- [5] Nadgaran H, Servatkah M, Sabaeian M. Mathieu-Gauss beams: A thermal consideration[J]. Optics Communications, 2010, 283(3): 417-426.
- [6] Xie Xiaoxia, Li Dong, Wu Fengtie. Ribbon quasi-non-diffracting beam obtained with elliptical aperture and axicon system[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(1): 0126001.  
谢晓霞, 李冬, 吴逢铁. 椭圆孔径与轴棱锥系统产生带状近似无衍射光束[J]. 光学学报, 2015, 35(1): 0126001.
- [7] Alpmann C, Bowman R, Woerdemann M, *et al.* Mathieu beams as versatile light moulds for 3D micro particle assemblies[J]. Optics Express, 2010, 18(25): 26084-26091.
- [8] Fleischer J W, Segev M, Efremidis N K, *et al.* Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices[J]. Nature, 2003, 422(6928): 147-150.
- [9] Li Y J. Mathieu-Gaussian beam for optical scanners: US6719204[P]. 2004-04-13.
- [10] Chávez-Cerda S, Padgett M J, Allison I, *et al.* Holographic generation and orbital angular momentum of high-order Mathieu beams[J]. Journal of Optics B, 2002, 4(2): S52-S57.
- [11] Alvarez-Elizondo M B, Rodriguez-Masegosa R, Gutierrez-Vega J C. Generation of Mathieu-Gauss modes with an axicon-based laser resonator[J]. Optics Express, 2008, 16(23): 18770-18775.
- [12] Li Dong, Wu Fengtie, Xie Xiaoxia. A novel method of generating quasi-non-diffracting Mathieu beam based on axicon[J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(15): 152401.  
李冬, 吴逢铁, 谢晓霞. 基于轴棱锥产生近似无衍射 Mathieu 光束的新方法[J]. 物理学报, 2014, 63(15): 152401.
- [13] Guo Chengshan, Li Chuantao, Hong Zhengping, *et al.* Suitability of different sampling methods for digital simulations of the optical diffraction[J]. Acta Optica Sinica, 2008, 28(3): 442-446.  
国承山, 李传涛, 洪正平, 等. 光衍射数值模拟中不同抽样方法的适用性分析[J]. 光学学报, 2008, 28(3): 442-446.
- [14] Ruan Lifeng, Tang Zhilie, Liu Xueling. Investigation on light intensity distribution of Raman-Nath acousto-optic diffraction based on Fourier analysis[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(3): 0307001.  
阮立锋, 唐志列, 刘雪凌. 基于傅里叶分析的拉曼奈斯声光衍射光强分布的研究[J]. 光学学报, 2013, 33(3): 0307001.
- [15] Nascov V, Logofătu P C. Fast computation algorithm for the Rayleigh-Sommerfeld diffraction formula using a type of scaled convolution[J]. Applied Optics, 2009, 48(22): 4310-4319.