

基于空间变化点扩展函数的图像直接复原方法

周程灏, 王治乐, 刘尚阔

哈尔滨工业大学航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001

摘要 采用点插值法、循环矩阵模型、拉普拉斯正则化方法和共轭梯度迭代法, 解决了空间变化图像复原过程中空间变化点扩展函数的获取、反卷积的计算模型、反问题的病态性以及复原算法等问题。在此基础上, 建立了空间变化图像复原方法, 并分析了图像复原的基本模型。最后, 通过仿真对比了提出的空间变化图像复原算法和空间不变图像复原算法, 结果表明, 空间变化算法的图像复原结果好于空间不变算法。

关键词 图像处理; 线性空间变化; 主元分析; 点插值; 拉普拉斯正则化

中图分类号 O436.1 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201737.0110001

Method of Image Restoration Directly Based on Spatial Varied Point Spread Function

Zhou Chenghao, Wang Zhile, Liu Shangkuo

School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China

Abstract The acquisition of point spread function varying with space, the calculation model of deconvolution, the morbidity of inverse problem, and the renatured algorithm are solved using point interpolation method, cyclic matrix model, Laplace regularization and conjugate gradient iteration. Upon which, the image restoration algorithm with varying space is established and the basic model of image restoration is analyzed. At last, the image restoration algorithms with and without varying space are compared with simulation, the result shows that the image restoration algorithm with varying space is better than spatial invariant algorithm.

Key words image processing; linear spatial variation; principal component analysis; point interpolation; Laplace regularization

OCIS codes 100.2980; 100.1830; 100.3190

1 引 言

光学系统的装调、光学系统像差、平台振动等因素引起了图像的退化, 并且导致了空间各点图像退化不一致。为了修补损失的图像信息, 逐步开展了图像复原方法。为了简化问题, 研究人员一般将成像过程视为一个空间不变(SIV)系统即空间各处退化相同的线性退化过程, 以处理图像复原问题。然而, 由于光学系统像差, 成像介质的非均匀性, 大气的抖动, 成像平台不规则运动等因素影响, 成像过程一般是一个线性空间变化(SV)系统即空间各处图像退化不同。

对于点扩展函数(PSF)空间变化图像, 若仍采用空间不变图像复原方法显然是不够准确的。早在 1965 年, Lohmann 等^[1]就对各个视场退化函数的差异进行了讨论。目前, 国外对空间变化图像复原方法已有较为系统的研究。在直接空间变化图像复原中, 需要对多个甚至海量的 PSF 进行提取、存储和运算^[2], 因此需要一种获取各个视场点 PSF 的方法。上海理工大学的徐伯庆等在使用仪器测量出一幅图像 180 个 PSF 后, 使用相应的 180 个逆滤波器完成图像复原, 该方法测量了 180 个点的 PSF, 测量数据量较大^[3], 且国内在这方面的研究较少。

收稿日期: 2016-05-11; **收到修改稿日期:** 2016-08-08

基金项目: 中国航天科技五院 CAST 创新基金重点项目(CASTHCKJ)

作者简介: 周程灏(1989—), 男, 博士研究生, 主要从事光学合成孔径方面的研究。E-mail: 13B921004@hit.edu.cn

导师简介: 王治乐(1975—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事光学合成孔径方面的研究。

E-mail: wangzhile@hit.edu.cn

本文基于图像复原模型提出了一种基于拉普拉斯正则化的空间变化图像复原方法,首先分析了空间变化图像复原模型和空间变化图像复原的 4 个问题:PSF 获取,PSF 数据存储,反问题病态性和复原算法的求解;然后采用点插值法、循环矩阵模型、拉普拉斯正则化方法和共轭梯度迭代法分别对 4 个问题进行处理;最后通过仿真实验证了空间变化图像复原方法的有效性。

2 空间变化图像复原模型

根据傅里叶光学理论,光学系统的成像过程可以视为一个线性叠加过程,即系统所成像在像面坐标(二维坐标)处的灰度值,等于系统所有视场的 PSF 被相应视场位置处物 f 的灰度值调制后在该坐标处的灰度值的线性加和,再加上此像面坐标处的成像噪声:

$$g(p') = \sum_{p \in D} f(p) \cdot h(p; p') + \eta(p'), \quad (1)$$

式中 $h(p; p')$ 为 p 视场对应的 PSF, p 为物面坐标, D 为图像域, $f(p)$ 为物在坐标 p 处的灰度值, $\eta(p')$ 为成像过程中的噪声,一般为高斯白噪声。当光学系统的 $h(p; p')$ 在系统视场内处处相等时,为线性空间不变系统;当光学系统的 $h(p; p')$ 在系统视场内处处不相等时,为线性空间变化系统。当系统为线性空间不变系统时,(1)式可以简化为卷积形式:

$$g = f * h + \eta, \quad (2)$$

当系统为线性空间变化系统时,原始式不能简化为一个卷积,此时需要采用原始式进行图像复原。

根据(1)式可以看出空变图像复原首先需要处理 4 个问题:

- 1) 空间变化 PSF 的获取;
- 2) 反卷积的计算模型;
- 3) 反问题的病态性和噪声抑制;
- 4) 复原算法求解。

针对这 4 个问题提出了解决方案,如图 1 所示,由 4 部分组成:

- 1) 测量出少数视场的 PSF, 然后进行插值处理, 以获取空间变化 PSF;
- 2) 反卷积的循环矩阵计算模型;
- 3) 采用拉普拉斯正则化图像复原以抑制噪声及解决问题的病态性;
- 4) 采用共轭梯度迭代法求解复原问题。

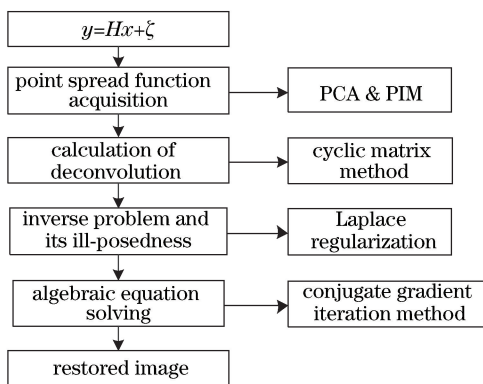


图 1 空间变化图像复原

Fig. 1 Restoration of spatial variant image

3 PSF 插值分析

3.1 已知视场 PSF 测量

空间变化图像复原需要知道所有视场点的 PSF 值,由于难以测量得到所有视场处的 PSF,一般需要部分已知视场的 PSF,通过插值求取未知视场的 PSF。采用脉冲测量不同视场处的部分 PSF。制作如图 2 所示的靶标,采用点脉冲法即可获取不同位置处的 PSF。

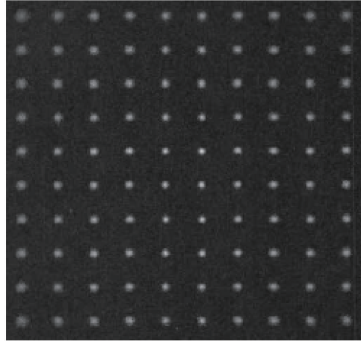


图 2 已知 PSF 位置图

Fig. 2 Location map of known PSF

3.2 基于主元分析的未知视场 PSF 插值获取方法

这种获取 PSF 模型的基本思想是寻找一组基函数,使得成像系统的 PSF 能够在由这组基函数所组成的函数空间内找到一个很好的近似^[4-6]。主成分分析(PCA)模型基于已知数据构造正交基函数,因此选用主元分析法构建基函数。基于主元分析的 PSF 获取方法包括 4 个步骤:

- 1) 已知点 PSF 的表征:选取 PCA 模型表征 PSF,拟合获取已知点的 PSF 主元分析模型参数;
- 2) 未知点的 PSF 参数插值计算:选取点插值法,获取未知点的 PSF 的模型参数;
- 3) 未知点 PSF 的回归:将插值获取的参数带入 PSF 表征模型中拟合获取未知点的 PSF;
- 4) PSF 插值误差分析:分析插值获取的 PSF 与真实 PSF 之间的差距。

3.2.1 PSF 的 PCA 模型

PCA 法是 1933 年提出来的,其思想是把众多指标转换成几个综合指标,综合指标保留了原变量提供的主要信息,且彼此间又互不相关,便于抓住主要特征使复杂问题简单化。PCA 的步骤如下:

- 1) 对原始数据进行标准化处理;
- 2) 计算样本相关系数矩阵;
- 3) 求解相关系数矩阵的特征值和相应特征向量;
- 4) 选择重要主成分,并计算主成分表达式;
- 5) 计算主成分得分。

基于 PCA 的 PSF 基函数构建方法的步骤为

- 1) 对获取的 PSF 归一化处理:

$$f_{psi} = \frac{f_{psi}}{\text{sum}(f_{psi})}, i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (3)$$

式中 sum 表示对 f_{psi} 所有元素求和。

- 2) 将已知 PSF 改为一维向量形式,然后标准化处理:

$$f_{psi}^* = f_{psi} - \text{mean}(f_{ps}), i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (4)$$

式中 mean 表示对所有 PSF 求均值。

- 3) 求取 PSF 一维向量之间的协方差矩阵:

$$C_{ij} = \text{cov}(f_{psi}^*, f_{psj}^*), 1 \leq i, j \leq N, \quad (5)$$

式中 cov 表示对 f_{psi}^* 与 f_{psj}^* 求协方差。

- 4) 求解协方差矩阵的特征值 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N\}$ 和相应特征向量 $\{X_{eig1}, X_{eig2}, X_{eig3}, \dots, X_{eigN}\}$ 。

- 5) 利用协方差矩阵的特征向量,构造基函数 $\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_N\}$:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{eig1} \\ X_{eig2} \\ X_{eig3} \\ \vdots \\ X_{eigN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{ps1}^* \\ f_{ps2}^* \\ f_{ps3}^* \\ \vdots \\ f_{psN}^* \end{pmatrix}, \quad (6)$$

式中 $\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_N\}$ 即为基函数。

6) 计算主成分得分, 选取基函数个数:

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}, i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (7)$$

式中 ρ 为主元累积贡献率; 一般来说, 选择使累积贡献率 ρ 超过85%的 k 个主元贡献率即可。

7) 数据回归, 即利用基函数回归为归一化的 PSF:

$$\begin{pmatrix} f_{ps1}^* \\ f_{ps2}^* \\ f_{ps3}^* \\ \vdots \\ f_{psN}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{eig1} \\ X_{eig2} \\ X_{eig3} \\ \vdots \\ X_{eigN} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix} + \text{mean}(f_{ps}), i = 1, \dots, N, \quad (8)$$

式中 $\{X_{eig1}, X_{eig2}, X_{eig3}, \dots, X_{eigN}\}$ 为基函数 $\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_N\}$ 的系数矩阵。

3.2.2 未知点 PSF 的插值获取

目前的插值方法有网格插值和无网格插值, 相比于网格插值法, 无网格插值法具有实现简单、计算速度快等优点。在无网格插值法中, 点插值法(PIM)是目前较为常用的方法。PSF 点插值的基本思想是将每个插值点上 PSF 用一定的基函数表示, 然后根据已知点的基函数系数, 通过插值获取未知点的基函数系数, 从而构建出未知点的 PSF:

$$f_{ps} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_k) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix} + \text{mean}(f_{psi}), i = 1, \dots, N, \quad (9)$$

式中 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_N\}$ 为插值获取的系数。

选取多项式拟合法对各个未知视场点 PSF 进行插值计算, 其插值方法可以表示为

$$a(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^L \lambda_i \phi(x_i, y_i), \quad (10)$$

式中 (x_0, y_0) 为 PSF 未知点, 即插值点坐标; (x_i, y_i) 为 PSF 已知点坐标; $\phi(x_i, y_i) = x^r y^s$ 为插值多项式函数; L 为已知点的个数; λ_i 为权系数, 取为1; a 为插值获取的 PSF 系数。

3.2.3 PSF 回归与 PSF 误差分析

在插值获取未知点的 PSF 各个基向量系数后, 将其代入高斯函数中, 以获取未知点的 PSF。为评价各个插值点 PSF 的精度, 定义各个 PSF 均方误差(MSE)为

$$R_{MSE} = \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [f_{psreal}(i, j) - f_{psin}(i, j)]^2 \right\}, \quad (11)$$

式中 m, n 表示 PSF 采样尺寸, f_{psreal} 表示真实的点扩展函数, 作为对比值。 f_{psin} 表示插值获取的 PSF 值。MSE 越小则说明插值获取的 PSF 和真实 PSF 越接近。为评价视场内所有 PSF 的插值精度, 定义平均 MSE 为

$$R_{MSEaverage} = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [R_{MSE}(i, j)]}{MN}, \quad (12)$$

式中 M, N 表示 PSF 在像面上的行数与列数, 即是像面尺寸。

4 反卷积计算模型

目前反卷积的计算模型主要循环矩阵计算模型和非周期反卷积模型。非周期反卷积模型由于需要观察

序列长度大于未知序列,因此选取了循环矩阵模型^[7-10]。循环矩阵计算模型的思想是利用循环矩阵的对角化技术把反卷积问题变成频域滤波问题。空间不变成像系统的 PSF 矩阵可以近似为一个循环矩阵,则 PSF 矩阵的卷积矩阵形式可以表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}_c \mathbf{x}, \quad (13)$$

式中 \mathbf{B}_c 表示循环矩阵。根据循环矩阵的性质可知,可以将循环矩阵 \mathbf{B}_c 近似表示为

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{W}^{-1}, \quad (14)$$

式中 \mathbf{W} 为循环矩阵特征向量构成的矩, \mathbf{A} 为对角阵,将卷积核 h 补零使尺寸扩展到二维像面的尺寸 $M \times N$, 做离散傅里叶变换,得到矩阵 \mathbf{H} , 则 \mathbf{A} 为一个对角阵,对角元由矩阵 \mathbf{H} 的 $M \times N$ 个元从第一行开始,逐个逐行地填入对角矩阵中^[10]。设 \mathbf{p} 是尺寸为 $M \times N$ 的二维数组的辞书式堆积向量,矩阵 \mathbf{W} 还具有如下性质:

$$\mathbf{W} \mathbf{p} \Leftrightarrow MN * \text{IDFT}[\mathbf{p}], \quad (15)$$

$$\mathbf{W} \mathbf{p} \Leftrightarrow \frac{1}{MN} * \text{DFT}[\mathbf{p}], \quad (16)$$

即 \mathbf{W} 矩阵直接作用于向量,相当于对向量做离散傅里叶逆变换(IDFT),若 \mathbf{W} 的逆矩阵作用于向量,则相当于对向量做离散傅里叶变换(DFT)。当 PSF 矩阵 \mathbf{K} 作用于由二维图像构成的辞书式堆积向量 \mathbf{f} 时,即空间不变卷积成像过程,可以理解为 \mathbf{f} 的傅里叶变换与空间不变 PSF 的傅里叶变换的乘积的傅里叶逆变换。可见,空间不变图像复原算法能够通过快速傅里叶变换算法加快运算速度。类似的,PSF 矩阵 \mathbf{K} 的转置与 \mathbf{f} 相作用也可以通过快速傅里叶变换来计算。而对于空间变化图像复原算法而言,由于系统像面不同视场的 PSF 不同,因此,PSF 矩阵 \mathbf{K} 不能近似为循环矩阵,从而导致了空间变化图像复原算法计算上的困难,因此将 PSF 分解为正交基的组合再进行以上操作。

空间变化卷积计算模型根据空间变化 PSF 插值间为

$$f_{ps}(x, y) = \sum_{k=1}^{\text{PCA}_{\text{num}}} a_k(x, y) \cdot r_k(x, y) + \text{mean}(f_{\text{psi}}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (17)$$

可推导出;

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathbf{B}_c \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{MN} x_i * f_{\text{psi}} = \sum_{i=1}^{MN} x_i * \left[\sum_{k=1}^{\text{PCA}_{\text{num}}} a_k(x, y) \cdot r_k(x, y) + \text{mean}(f_{\text{ps}}) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{MN} x_i * \sum_{k=1}^{\text{PCA}_{\text{num}}} a_k(x, y) \cdot r_k(x, y) + \sum_{i=1}^{MN} x_i * \text{mean}(f_{\text{ps}}) = \sum_{k=1}^{\text{PCA}_{\text{num}}} r_k * (\mathbf{A}_k \mathbf{f}) + \mathbf{f} * \text{mean}(f_{\text{ps}}), \end{aligned} \quad (18)$$

根据循环矩阵模型可知:

$$\sum_{k=1}^{\text{PCA}_{\text{num}}} (\mathbf{A}_k \mathbf{f} * r_k) + \mathbf{f} * \text{mean}(f_{\text{ps}}) = \sum_{k=1}^{\text{PCA}_{\text{num}}} (\mathbf{A}_k \mathbf{f} * \mathbf{W} \mathbf{A}_k \mathbf{W}^{-1}) + \mathbf{f} * \mathbf{W} \mathbf{A}_{\text{mean}} \mathbf{W}^{-1}, \quad (19)$$

则空间变化图像复原的循环矩阵为

$$\mathbf{B}_c = \sum_{k=1}^{\text{PCA}_{\text{num}}} (\mathbf{A}_k \mathbf{W} \mathbf{A}_k \mathbf{W}^{-1}) + \mathbf{W} \mathbf{A}_{\text{mean}} \mathbf{W}^{-1}. \quad (20)$$

5 空间变化图像约束最小二乘复原

图像降质方程为^[11]

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}_c \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, \quad (21)$$

规定解满足:

$$\|\boldsymbol{\eta}\|^2 = \|\mathbf{B}_c \mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2, \quad (22)$$

使用 Phillips 的正则化方法,该方法保证解的二阶倒数的范数平方 $\|\mathbf{x}''\|^2$ 最小。图像的二阶差分可以通过卷积 $\mathbf{x}(m, n) * \mathbf{c}(m, n)$ 计算,其中二阶差分算子即拉普拉斯算子,表示为

$$\mathbf{c}(m, n) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

用循环矩阵模型表示卷积,则规整化要求具体化为最小化问题 $\min \|Cx\|^2$ 其中 C 为 $c(m, n)$ 生成的循环矩阵,则可以问题归结为

$$F(\hat{f}) = \lambda(\|g - B_c \hat{f}\|^2 - \|n\|^2) + \|C\hat{f}\|^2, \quad (24)$$

式中 λ 为一个常数,称为拉格朗日因数。求解(24)式方程可以得到:

$$(B_c^T B_c + \alpha C^T C)x = B_c^T y, \quad (25)$$

式中 $\alpha = 1/\lambda$ 。

将空间变化 B_c 矩阵代入(25)式可得:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{k=1}^{PCA_{num}} (A_k W A_k W^{-1}) + W A_{mean} W^{-1} \right]^T \left[\sum_{k=1}^{PCA_{num}} (A_k W A_k W^{-1}) + W A_{mean} W^{-1} \right] f + \alpha C^T C f = \\ & \left[\sum_{k=1}^{PCA_{num}} (A_k W A_k W^{-1}) + W A_{mean} W^{-1} \right]^T g. \end{aligned} \quad (26)$$

6 空域迭代求解图像复原方程

为求解(26)式采用共轭梯度法求解,其步骤如下^[12]:

- 1) 设初值 f_0 为初始向量;
- 2) $P_0 = r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$;
- 3) 对于 $k=1, 2, 3, \dots, N$ (N 为迭代次数)。

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{[r^{(k)}, p_k]}{(p_k, A p_k)} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p_k \\ r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k A p_k, \\ \beta_k = -\frac{[r^{(k+1)}, A p_k]}{(p_k, A p_k)} \\ p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_k p_k \end{cases} \quad (27)$$

以上步骤即为共轭梯度法求解步骤,将采用此方法求解线性方程。

7 仿真实验验证

为了对比空间变化和空间不变恢复算法的恢复能力,进行了仿真对比实验。基于 Zemax 软件计算光学系统不同视场的 PSF,从而仿真空间变化图像。实验采用 Zemax 中的 Unobscured Gergorian 系统,将其主镜绕 X 轴旋转倾斜 0.05° 。其 9 个视场的 PSF 比较如图 3 所示,图中可以看出该系统的空变特性非常明显。

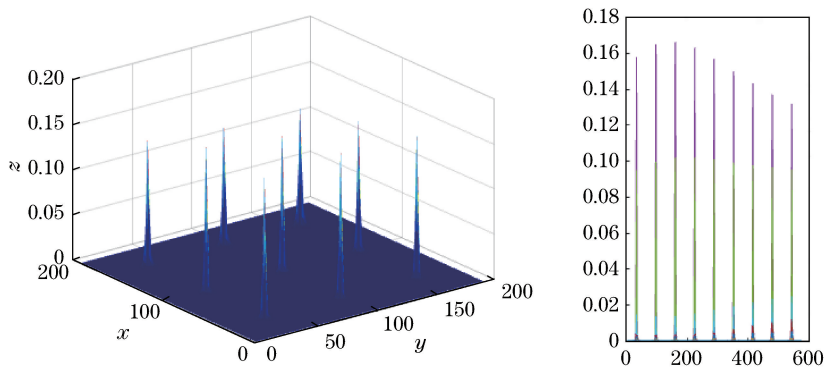


图 3 9 个视场 PSF 对比图

Fig. 3 Compared PSF diagram of nine fields of view

根据获取的 PSF 仿真图像,图 4(a)~(c)分别为噪声 20 dB、30 dB 和 50 dB 时的空间变化图像。

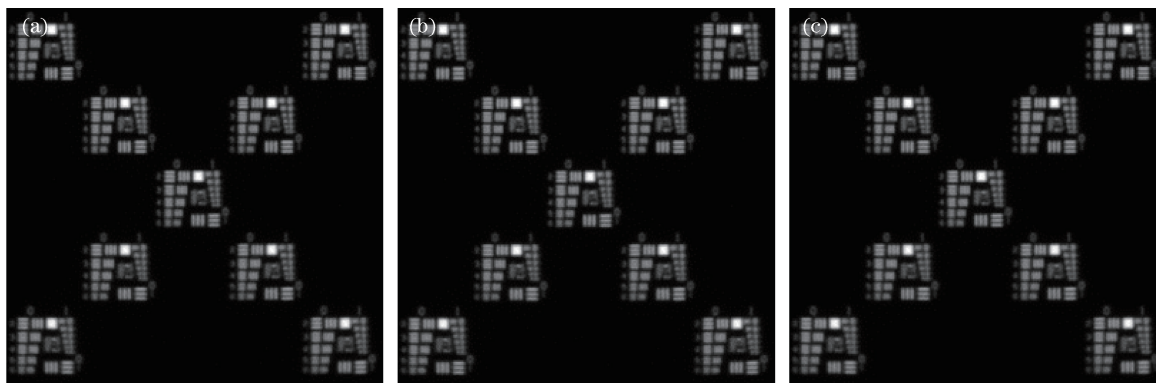


图 4 空间变化图像。(a) 噪声为 20 dB; (b) 噪声为 30 dB; (c) 噪声为 50 dB

Fig. 4 Spatial variant images. (a) 20 dB noise; (b) 30 dB noise; (c) 50 dB noise

在插值获取未知点 PSF 的各个基向量系数后,将其代入基函数中,以获取未知点的 PSF。各个 PSF 均方误差如图 5 所示, $R_{\text{MSEaverage}} = 2.588 \times 10^{-6}$ 。

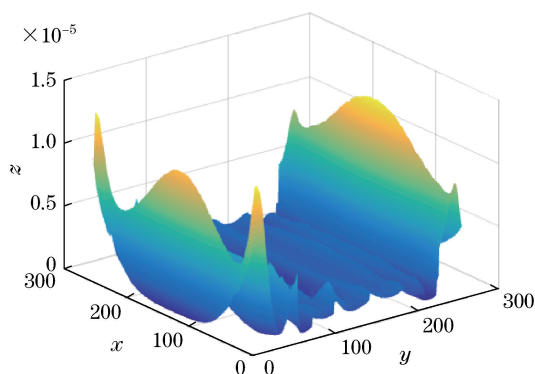


图 5 点插值精度图

Fig. 5 Accuracy map of point interpolation

采用空间变化约束最小二乘复原,恢复图像如图 6(a)~(c)所示,其峰值信噪比 (ISNR) 分别为 6.134 dB、6.363 dB 和 6.374 dB。图 7(a)~(c)为空间不变图像复原,其 ISNR 分别为 5.672 dB、5.940 dB 和 5.950 dB。

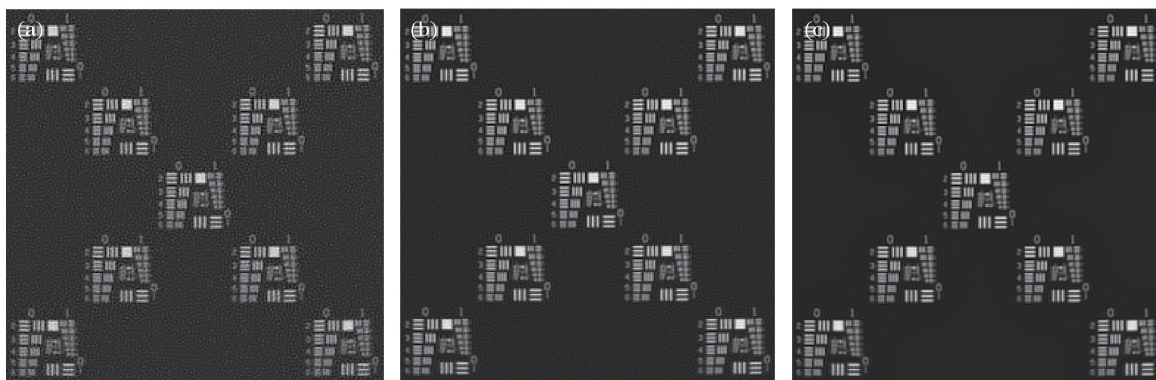


图 6 空变复原图像。(a) 噪声为 20 dB; (b) 噪声为 30 dB; (c) 噪声为 50 dB

Fig. 6 Restored spatial variant images. (a) 20 dB noise; (b) 30 dB noise; (c) 50 dB noise

通过比较 ISNR,如表 1 所示,可以看出空间变化图像复原效果均好于空间不变图像复原。

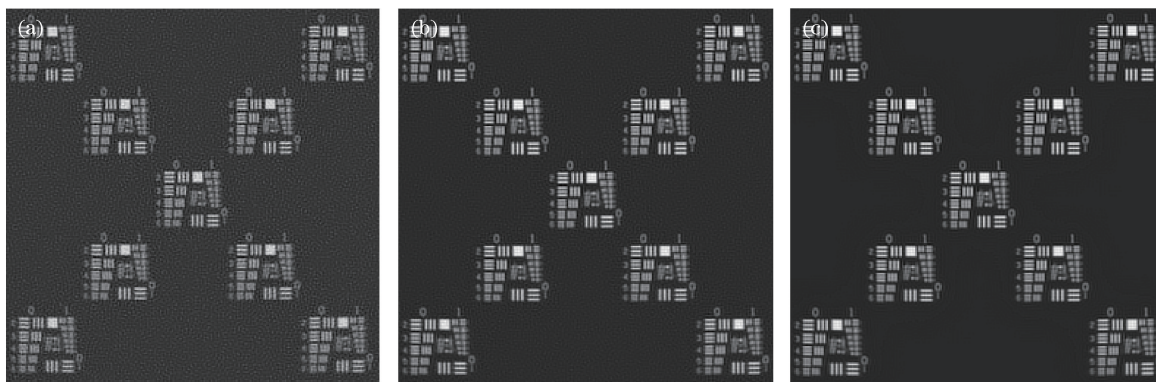


图 7 空不变复原图像。(a) 噪声为 20 dB; (b) 噪声为 30 dB; (c) 噪声为 50 dB

Fig. 7 Restored spatial invariant images. (a) 20 dB noise; (b) 30 dB noise; (c) 50 dB noise

表 1 复原结果

Table 1 Restored results

Noise /dB	ISNR of SV system	ISNR of SIV system
20	6.134	5.672
30	6.363	5.940
50	6.374	5.950

8 结 论

分析了图像复原的基本模型,确定了空间变化图像复原需要处理的 4 个问题:空间变化 PSF 的获取,反卷积的计算模型,反问题的病态性,消除和抑制噪声及复原算法的求解。然后采用点插值法,循环矩阵模型,拉普拉斯正则化方法和共轭梯度迭代法分别对 4 个问题进行处理。最终建立了空间变化图像复原方法。通过仿真实验证明空间变化约束最小二乘法图像复原效果要好于空间不变约束最小二乘法图像复原法。

参 考 文 献

- [1] Lohmann A W, Paris D P. Space-variant image formation[J]. Journal of the Optical Society of America, 1965, 55(8): 1007-1013.
- [2] Feng Huajun, Tao Xiaoping, Zhao Jufeng, *et al.* Review and prospect of image restoration with space-variant point spread function[J]. Opto-Electronic Engineering, 2009, 36(1): 1-7.
冯华君, 陶小平, 赵巨峰, 等. 空间变化 PSF 图像复原技术的研究现状与展望[J]. 光电工程, 2009, 36(1): 1-7.
- [3] Tao Xiaoping, Feng Huajun, Lei Hua, *et al.* A splicing method of sectioned restoration algorithm for images with space-variant point spread function[J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(3): 648-653.
陶小平, 冯华君, 雷 华, 等. 一种空间变化 PSF 图像分块复原的拼接方法[J]. 光学学报, 2009, 29(3): 648-653.
- [4] Kitching T, Amara A, Gill M, *et al.* Gravitational lensing accuracy testing 2010 (GREAT10) challenge handbook[J]. Annals of Applied Statistics, 2010, 5(3): 2231-2263.
- [5] Kitching T D, Balan S T, Bridle S, *et al.* Image analysis for cosmology: Results from the GREAT10 galaxy challenge [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2012, 423(4): 3163-3208.
- [6] Hao Ling. Point spread function obtaining research based on the linear space variant image restoration[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2012.
郝 玲. 基于空变系统图像恢复的点扩散函数获取研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012.
- [7] Wang Zhile, Zhao Ming, Li Bo, *et al.* Space variant image restoration based on maximum likelihood[J]. Infrared and Laser Engineering, 2012, 41(7): 1947-1951.
王治乐, 赵 明, 李 博, 等. 最大似然空间变化图像恢复算法[J]. 红外与激光工程, 2012, 41(7): 1947-1951.
- [8] Lauer T. Deconvolution with a spatially-variant PSF[C]. Proceedings of SPIE, 2002, 4847: 167-173.
- [9] Costello A T P, Mikhael W B. Restoration of digital images with known space-variant blurs from conventional optical

- systems[C]. International Society for Optics and Photonics, 1999: 71-79.
- [10] Zou Mouyan. Deconvolution and signal recovery[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2001.
邹谋炎. 反卷积和信号复原[M]. 北京: 国防工业出版社, 2001.
- [11] Yang Lihong, Zhao Bianhong, Zhang Xingxiang, *et al.* Gaussian fitted estimation of point spread function and remote sensing image restoration[J]. Chinese Optics, 2012, 5(2): 181-188.
杨利红, 赵变红, 张星祥, 等. 点扩散函数高斯拟合估计与遥感图像恢复[J]. 中国光学, 2012, 5(2): 181-188.
- [12] Wu Boying. Principle of numerical analysis[M]. Beijing: Science Press, 2003.
吴勃英. 数值分析原理[M]. 北京: 科学出版社, 2003.