

基于小波分析的大气湍流相位屏模拟

丰 帆^{1,2,3}, 李常伟^{1,2*}

¹中国科学院国家天文台南京天文光学技术研究所, 江苏 南京 210042;

²中国科学院天文光学技术重点实验室, 江苏 南京 210042;

³中国科学院大学, 北京 100049

摘要 大尺寸、高分辨率大气湍流相位屏的快速模拟对于在实验中验证自适应光学系统的性能及控制算法的稳定性至关重要。提出了一种基于小波分析模拟大气湍流相位屏的方案。根据离散小波变换的频段分割性质,对 Von Karman 型功率谱进行切割;基于能量守恒原理,生成不同尺度上对应频段的近似高频系数;利用小波层之间低频系数的递推关系,得到最高层低频系数的相关函数,并利用相关函数法来模拟低频系数;通过小波合成算法得到最终的大气湍流相位屏。模拟结果表明,基于小波分析产生的大气湍流相位屏与 Von Karman 模型较好地吻合;该方法的计算复杂度低,能快速模拟大尺寸、高分辨率大气湍流相位屏。

关键词 大气光学; 大气湍流相位屏; 小波分析; 相关函数

中图分类号 O436 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201737.0101004

Simulation of Atmospheric Turbulence Phase Screen Based on Wavelet Analysis

Feng Fan^{1,2,3}, Li Changwei^{1,2}

¹Nanjing Institute of Astronomical Optics and Technology, National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Nanjing, Jiangsu 210042, China;

²Key Laboratory of Astronomical Optics and Technology, Chinese Academy of Sciences, Nanjing, Jiangsu 210042, China;

³University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract The fast simulation for atmospheric turbulence phase screen with large size and high resolution is essential to verify the performance and the control algorithm stability of the adaptive optical system in laboratory. A scheme of simulating atmospheric turbulence phase screen based on wavelet analysis is proposed. According to the frequency band segmentation of discrete wavelet transform, the Von Karman power spectrum is cut. The approximate high frequency coefficients of corresponding frequency bands at different scales are generated based on the energy conservation principle. The correlation function of low frequency coefficient of the top level is obtained when we use the recursive relations among the low frequency coefficients of wavelet layers, and the correlation function method is used to simulate low frequency coefficients. The final atmospheric turbulence phase screen is synthesized by the wavelet synthesis algorithm. Numerical simulation results show that the atmospheric turbulence phase screen generated based on wavelet analysis is consistent with the Von Karman model. The computational complexity of the proposed method is low, and it can quickly simulate atmospheric turbulence phase screen with large size and high resolution.

Key words atmospheric optics; atmospheric turbulence phase screen; wavelet analysis; correlation function

OCIS codes 010.1290; 010.1330; 010.1080

收稿日期: 2016-07-29; **收到修改稿日期:** 2016-09-07

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(11573047)、中国科学院国家天文台南京天文光学技术研究所优秀青年人才领域前沿项目(Y3Y0021000)

作者简介: 丰 帆(1991—),男,博士研究生,主要从事自适应光学相关技术方面的研究。E-mail: ffeng@niaot.ac.cn

导师简介: 张思炯(1964—),男,博士,研究员,博士生导师,主要从事自适应光学相关技术方面的研究。

E-mail: sjzhang@niaot.ac.cn

* **通信联系人.** E-mail: cwli@niaot.ac.cn

1 引 言

大气湍流扰动严重限制了地基天文望远镜的成像质量,自适应光学技术的出现为克服大气湍流扰动、提高望远镜的成像质量提供了有效的技术手段。自适应光学系统非常复杂,成本很高,为了尽量降低研制成本和规避风险,需要对自适应光学系统反复进行模拟验证。大气湍流相位屏的模拟作为自适应光学系统模拟的起点,对实验验证自适应光学系统的性能和控制算法的稳定性具有重要的意义。近年来,随着地基天文望远镜口径的不断增加,大尺寸、高分辨率大气湍流相位屏的快速模拟对自适应光学系统性能和控制算法稳定性的验证显得尤为重要。此外,大气湍流相位屏的模拟对空间光通信、大气激光传输等工作在开放空间光学系统的研究也具有重要的意义。

模拟大气湍流相位屏的常用方法有谱反演法、外推法和 Zernike 多项式法。谱反演法主要基于快速傅里叶变换(FFT),通过将大气模型对应的离散频谱与相同尺寸的零均值、单位方差的高斯白噪声相乘,再对含噪频谱进行 FFT 以产生随机大气湍流相位屏^[1-2]。利用谱反演法在空间频率进行均匀取样,使得大气湍流相位屏具有周期性且无倾斜分量,该方法产生的大气湍流相位屏存在低频成分不足的问题。1992 年, Lane 等^[3]利用谐波补偿的方法改善了谱反演法低频不足的状况,但该方法得到的结果仍然缺乏一部分低频信息。2010 年,Carbillet 等^[4]进一步完善了谐波补偿法。2012 年,Xiang^[5]采用尺度分割的方式将低频成分与原频率谱分离,利用相关函数法生成只含低频成分的低分辨率大气湍流相位屏,再将插值后得到的与需求分辨率一致且只含低频信息的相位屏与 FFT 生成的只含高频信息的相位屏叠加,得到最终的大气湍流相位屏,该方法得到的结果与理论值相比误差极小。2014 年,Xiang^[6]通过数值积分计算出未采样部分高频功率谱对应的二维相位自相关矩阵,对该自相关矩阵进行 FFT,可得到各功率谱采样点需补偿的功率,并且在高频部分获得了比较高的精度。2015 年,谭涛等^[7]使用 Shack-Hartman 传感器模拟了旋转大气湍流相位屏,并对大气湍流相位屏的空间、时间特性进行了研究。2013 年,Charnotskii^[8]提出了稀疏谱采样法,通过在低频部分密采样、高频部分疏采样来改善低频信息不足的问题,并取得了较好的结果。然而,上述方法因引入 FFT,计算量大,需要较大的内存资源,且生成的大气湍流相位屏较大。

2006 年,Assemat 等^[9]提出外推法,利用相关函数构造递推公式来生成大气湍流相位屏,该方法产生的大气湍流相位屏与大气结构函数较好地吻合,并可以衍生出各种外推模型^[10-12]。但是,对于大尺寸的相位屏,需要的相关矩阵比较庞大,从而带来相当大的计算量,严重影响生成大尺度、高分辨率大气湍流相位屏的速度。

Noll 等^[13-14]利用 Zernike 多项式法求解一组满足 Zernike 模式协方差矩阵的随机向量,以该随机向量为系数,并将其与对应的 Zernike 基组合得到大气湍流相位屏。理论上需要无穷项 Zernike 模式才能生成符合大气结构函数的相位屏,而事实上只能是有限项的组合,因此该方法生成的大气湍流相位屏一般存在高频成分不足的问题。对于大尺寸的相位屏,首先需要生成大尺度的 Zernike 基,该过程的计算量很大,无法快速模拟大尺寸相位屏。

2011 年,Beghi 等^[15]提出了一种基于小波多尺度分析的大气湍流相位屏合成方法(简称多尺度法),利用 Haar 小波变换分解 Von Karman 模型的相关函数,得到不同尺度下高低频系数的互相关函数以及不同层低频系数之间满足的相关函数关系,分步合成不同尺度下的大气相位,通过小波合成得到大气湍流相位屏。该方法得到的大气湍流相位屏与大气结构函数较好地吻合,适合生成大尺寸、高分辨率的大气湍流相位屏。但是,该方法需要先得到不同尺度、不同方向的高低频系数互相关函数,然后在不同尺度下根据不同方向的相关函数在每一个像素邻域内预测不同方向的相位,实现该过程的难度较大,且计算复杂度随着所选邻域半径的增大急剧增加,最终影响生成相位屏的速度。

鉴于离散小波变换具有计算复杂度较低的特点,本文基于谱变换法,提出了一种基于小波分析的频谱分割特性来快速模拟大气湍流相位屏的方法;利用小波变换对大气 Von Karman 模型功率谱进行二分切割,将频谱接近平直线的高频信息近似为白噪声,简化了计算过程,提升了计算速度,从而有利于大尺寸、高分辨率大气湍流相位屏的模拟。

2 理论模型

2.1 大气湍流 Von Karman 统计模型

大气湍流 Von Karman 模型的相位功率谱可表示为^[2]

$$\Phi(f) = 0.02288r_0^{-5/3} (f^2 + f_0^2)^{-11/6}, \quad (1)$$

式中 f 为空间频率; $f_0 = 1/L_0$, 其中 L_0 为大气湍流的外尺寸; r_0 为大气相干长度。由于利用计算机对大气湍流 Von Karman 模型进行模拟, 因此需将相位功率谱离散化。对于实际尺寸为 $D_1 \times D_2$ 、分辨率为 $M \times N$ 的大气湍流相位屏, 离散功率谱可表示为

$$\Phi(m, n) = 0.02288aD_1^{-2}r_0^{-5/3} (f_m^2 + f_n^2 + f_0^2)^{-11/6}, \quad (2)$$

$$f_m = \begin{cases} (m-1)/D_1, & m=1, 2, \dots, M/2 \\ (m-1-M)/D_1, & m=M/2+1, \dots, M-1, M \end{cases}$$

$$f_n = \begin{cases} (n-1)/D_2, & n=1, 2, \dots, N/2 \\ (n-1-N)/D_2, & n=N/2+1, \dots, N-1, N \end{cases}, \quad a = D_1/D_2 = M/N。$$

对功率谱进行傅里叶变换, 可以得到对应的相关函数, Von Karman 模型的相关函数可以表示为^[9]

$$c_\phi(x) = \left(\frac{L_0}{r_0}\right)^{5/3} \frac{\Gamma(11/6)}{2^{5/6}\pi^{8/3}} \left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6} \left(\frac{2\pi x}{L_0}\right)^{5/3} K_{5/6}\left(\frac{2\pi x}{L_0}\right), \quad (3)$$

式中 x 为望远镜入瞳二维平面上任意两点之间的距离, $K_{5/6}(\cdot)$ 为第三类修正贝塞尔函数, $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数。根据结构函数和相关函数之间的关系 $D_\phi(x) = 2[c_\phi(0) - c_\phi(x)]$, 得到对应的结构函数为^[9]

$$D_\phi(x) = \left(\frac{L_0}{r_0}\right)^{5/3} \frac{2^{1/6}\Gamma(11/6)}{\pi^{8/3}} \left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6} \left[\frac{\Gamma(5/6)}{2^{1/6}} - \left(\frac{2\pi x}{L_0}\right)^{5/3} K_{5/6}\left(\frac{2\pi x}{L_0}\right)\right]. \quad (4)$$

功率谱、相关函数和结构函数三者之间可以相互转化, 由其中任意 2 个统计函数可以确定另外 1 个函数。一般, 功率谱和相关函数用来生成相位屏; 结构函数没有零点问题, 通常用作检验相位屏与理论模型的吻合程度。

2.2 离散小波变换及其在大气湍流相位模拟中的应用

对离散信号进行离散小波变换^[16] (DWT) 时, 使用一对滤波器组 [低通滤波器 $d_L(n)$ 和高通滤波器 $d_H(n)$] 分别对信号作卷积处理, 再对卷积信号进行下采样, 即可得到分解系数。假设分解前的系数为第 i 层系数, 则分解后的系数为第 $i+1$ 层系数。高、低通滤波器之间的关系为 $d_H(n) = (-1)^n d_L(n) (l_f - n + 1)$, $n=1, 2, \dots, l_f$, l_f 为滤波器长度。在二维情况下, 对第 i 层低频系数 x_i 进行 DWT, 即在不同方向上分别进行滤波和下采样操作, 可以得到该系数在第 $i+1$ 层的低频系数 x_{i+1} 、水平高频系数 h_{i+1} 、垂直高频系数 v_{i+1} 和斜向高频系数 d_{i+1} 。利用 DWT 进行多层分解时, 每一层低频系数都可以分解为一组低频系数和三组高频系数。下面针对大气的 Von Karman 模型描述离散小波变换后各层低频系数相关函数之间的关系和低频系数相关函数的性质, 并由此提出模拟大气湍流相位屏时计算最低频系数和高频系数的方法。

模拟小波最高层低频系数 (即低分辨率相位屏) 时, 可以采用文献 [15] 中的方式求解其低频系数满足的相关函数, 再使用相关函数类方法进行模拟; 也可以采用小波滤波器频谱滤波求得其频谱后, 采用稀疏谱采样法^[8] 进行模拟。下面介绍利用相关函数法实现小波模拟的过程, 并将其推广到连续小波的情况。

文献 [15] 中的 (10) 式左边矩阵的第 1 行、第 1 列元素可由等式右边的矩阵运算得到 (此处与文献 [15] 中关于高低层的定义相反), 即

$$c_{x,i+1}(u, v) = \frac{1}{4} [c_{x,i}(2u, 2v) + \sum_{m=-1}^1 c_{x,i}(2u, 2v+m) + \sum_{n=-1}^1 c_{x,i}(2u+n, 2v) + \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 c_{x,i}(2u+m, 2v+n)], \quad (5)$$

式中 (u, v) 代表像素序列的坐标。若假设

$$c_{x,i}(2u, 2v-1) + c_{x,i}(2u, 2v+1) \approx 2c_{x,i}(2u, 2v)/c_{x,i}(2u-1, 2v) + c_{x,i}(2u+1, 2v) \approx 2c_{x,i}(2u, 2v), \quad (6)$$

$$c_{x,i}(2u-1, 2v-1) + c_{x,i}(2u+1, 2v+1) + c_{x,i}(2u-1, 2v+1) + c_{x,i}(2u+1, 2v-1) \approx 4c_{x,i}(2u, 2v), \quad (7)$$

成立,则(5)式可改写为

$$c_{x,i+1}(u,v) = 4c_{x,i}(2u,2v)。 \quad (8)$$

令 $\rho = \sqrt{u^2 + v^2} = (u,v)$, 将 $4c_{x,i}(2u,2v) = 4c_{x,i}[\sqrt{(2u)^2 + (2v)^2}] = 4c_{x,i}(2\rho)$ 代入(8)式可得

$$c_{x,i+1}(\rho) = 4c_{x,i}(2\rho)。 \quad (9)$$

将代表像素序列的坐标 (u,v) 与对应层的像素间距 p_i 相乘,可得到像素的真实坐标,即 $c_{x,i+1}(\rho p_{i+1}) = 4c_{x,i}(2\rho p_i)$ 。DWT 中的下采样操作使得相邻两层像素的间距满足

$$p_{i+1} = 2p_i, \quad (10)$$

式中 $0 \leq i \leq K, 0 \leq i+1 \leq K, K$ 为方案采用的最大分解层数。由于空间取样的任意性,离散坐标可用连续真实坐标替换,即 $x = \rho p_{i+1} = 2\rho p_i$, 得到小波分解前后低频系数满足的相关函数之间的近似递推式为

$$c_{x,i+1}(x) = 4c_{x,i}(x)。 \quad (11)$$

下面讨论不同情况下(6)、(7)式的近似误差,为简单起见,以一维情况为例,将像素间距代入(6)式的等式左边,并忽略 u ,得到第 i 层低频系数实际所满足的自相关函数为

$$c'_{x,i}(x) = \frac{1}{2} [c_{x,i}(x+p_i) + c_{x,i}(x-p_i)] \approx c_{x,i}(x)。 \quad (12)$$

在 $r_0=0.1\text{ m}, L_0=16\text{ m}, p_0=1.25\text{ mm}$ 条件下,当 $i=0$ 时,计算得到(12)式左右两边的最大绝对误差值为 0.002 rad^2 ,最大相对误差仅为 5×10^{-6} ;当 $i=1$ 时,得到(12)式左右两边的最大绝对误差值为 0.027 rad^2 ,最大相对误差仅为 1.5×10^{-5} ;当 $i=2$ 时,得到(12)式左右两边的最大绝对误差值为 0.35 rad^2 ,最大相对误差仅为 0.005% 。小波每增加一层,则最大相对误差增加 3 倍,估算得到第 7 层的最大相对误差约为 1.1% 。

在连续小波条件下,使用类似的矩阵运算后同样可以得到(11)式,在相同参数下计算近似式的最大相对误差(ϵ_{\max})如表 1 所示。db1、db2、db5、db10、db20、db45 为 6 个小波,6 个小波滤波器的长度依次为 2,4,10,20,40,90。可以看出,随着滤波器长度的增加,在 $i=0, r_0=0.1\text{ m}, L_0=16\text{ m}, p_0=1.25\text{ mm}$ 条件下,近似式的最大相对误差逐渐减小,因此在合适的最大分解层 K 内均满足(11)式。

表 1 不同小波对应近似式的最大相对误差值($i=0, r_0=0.1\text{ m}, L_0=16\text{ m}, p_0=1.25\text{ mm}$)

Table 1 Maximum relative errors of approximate expression corresponding to different wavelets ($i=0, r_0=0.1\text{ m}, L_0=16\text{ m}, p_0=1.25\text{ mm}$)

Wavelet	db1	db2	db5	db10	db20	db45
$\epsilon_{\max}/10^{-7}$	50.0	9.8	7.6	7.2	7.0	1.0

由(11)式可得,任意间隔 m 层低频系数的相关函数之间的关系为 $c_{i+m}(x) \approx 4^m c_i(x)$, 则第 K 层低频系数满足的相关函数为

$$c_K(x) \approx 4^K c_\phi(x)。 \quad (13)$$

小波分解时需要对边缘作延拓处理,延拓系数保留在高一层系数中。如果对实际大小为 $D_{1i} \times D_{2i}$ 、分辨率为 $M_i \times N_i$ 的系数 x_i 作二维 DWT 处理,得到的低频系数 x_{i+1} 对应的分辨率为 $M_{i+1} \times N_{i+1}$,非周期延拓时 M_{i+1} 的计算式为

$$M_{i+1} = \text{floor} [(M_i + l_f - 1)/2], \quad N_{i+1} = \text{floor} [(N_i + l_f - 1)/2], \quad (14)$$

式中 floor 为向负无穷方向取整。根据(10)式,得到各层对应的实际大小为

$$D_{1i} = M_i p_i, \quad D_{2i} = N_i p_i。 \quad (15)$$

根据(10)、(14)和(15)式,可以递推得到第 K 层的参数 D_{1K}, D_{2K}, M_K 和 N_K ,并且由(3)、(11)式可以得到第 K 层参数满足的相关函数。对于小尺寸相位屏,各类模拟方法都容易实现,这里使用递推法^[9]进行模拟。

对于高频部分,由于经过了下采样处理,层数每增加一层,奈奎斯特频率便减小一半。信号被小波分解后不同层的系数可存储不同频段的信息。大气 Von Karman 功率谱可以看作是一个近似的负指数函数,该谱线下降较快,在高频部分的谱线与恒值函数趋近;一般高频部分在总能量中所占比例较小,此处频带可以近似看作恒值函数,即高频部分可看作具有一个特定平均功率的高斯白噪声(WGN)。计算不同小波分解时

高频系数的相关函数,表 2 给出了相关函数的零点值 $c_{h,1}(0)$ 。计算结果表明,连续小波情况下高频系数之间的相关性比 db1 小波情况下更低。此外,相同条件下小波滤波器越长,高频系数的相关性越低。将高频系数由 WGN 近似处理,免去了多尺度法中关于高频系数的计算过程,从而降低了计算复杂度。

表 2 不同小波对应高频系数的相关函数的零点值($i=1, r_0=0.1 \text{ m}, L_0=16 \text{ m}, p_0=1.25 \text{ mm}$)

Table 2 Zero values of correlation functions of high frequency coefficients corresponding to different wavelets ($i=1, r_0=0.1 \text{ m}, L_0=16 \text{ m}, p_0=1.25 \text{ mm}$)

Wavelet	db1	db2	db5	db10	db20	db45
$c_{h,1}(0)/(10^{-4} \text{ rad}^2)$	21.70	8.00	6.22	5.85	5.69	5.61

模拟高频系数时,只需要知道高频系数的均值、标准差和总点数。小波分解时,高频段能量保持恒定,所有尺度方向上高频系数的能量均值与该系数对应频带所携带的能量相等,因此二维情况的频带能量可由(2)式决定,即

$$\sum h_i^2 = E_{h,i} \approx \sum_{m,n \in b_{h,i}} Q\Phi(m,n), \quad (16)$$

式中 $E_{h,i}$ 为该频带的总能量; Q 为功率谱到能量谱的转化系数, $Q=MN$; $b_{h,i}$ 为对应的频带区域,该区域对应的 Matlab 语言为 $\{[1:M/2^{i+1}, M-M/2^{i+1}:M], [N/2^{i+1}:N/2^i, N-N/2^i:N-N/2^{i+1}]\}$ 。若 M, N 为非 2 次幂数,则进行四舍五入操作。高频系数 h_i 的均值为 0,标准差 $\sigma_{h,i}$ 由(16)式确定,可表示为

$$\sigma_{h,i}^2 = E_{h,i}/P_i, \quad (17)$$

式中 P_i 为第 i 层构造高频部分包含点的总数, $P_i=M_iN_i$ 。同理,可以得到 $\sigma_{v,i}$ 和 $\sigma_{d,i}$ 。

对于 K 的选取,每增加一层,低频部分的近似相对误差呈指数增加;功率谱中靠近零频的频段被近似为 WGN,越靠近零频的频段越陡峭,与恒值函数偏离越大,造成高频部分的误差也越大。一般情况下,第 K 层系数在滤波方向上的长度大于 $2l_f$,并且 x_K 对应的实际尺寸小于 $2x_0$,则短边长度可表示为

$$l_s(x_K) > 2l_f, \quad D_K < 2D. \quad (18)$$

2.3 基于小波分析的大气湍流相位屏的模拟步骤

基于小波分析的大气湍流相位屏的模拟流程如下。

1) 确定需要的大气湍流相位屏 x_0 ,即小波第 0 层的各项模型参数 L_0, D_1, D_2, M, N ,根据(10)、(14)、(15)式确定不同层的参数 $M_i, N_i, p_i, D_{1K}, D_{2K}, 1 \leq i \leq K$,其中 K 的选取要保证(18)式成立。

2) 由(3)、(11)式计算第 K 层低频系数 x_K 符合的相关函数 c_K ,根据步骤 1) 得到的 D_{1K}, D_{2K}, M_K, N_K ,并利用相关函数法模拟第 K 层低频系数 x_K 。

3) 根据 r_0, L_0, D_1, D_2, M, N 计算功率谱;根据(16)式,计算各层各方向高频段的频带总能量 $E_{i,h}, E_{i,v}, E_{i,d}$,再将由(17)式计算得到的标准差与尺寸为 $M_i \times N_i$ 的零均值、单位方差的模拟 WGN 相乘,得到模拟高频系数 $h_i, v_i, d_i, 1 \leq i \leq K$ 。

4) 利用 DWT 的逆变换,得到最终的大气湍流相位屏 x_0 。

与文献[15]中方法不同,该方法使用的连续小波分解后的小波高频系数相关性很低,近似为 WGN。高频段的相关信息是由不同频段的白噪声信号经小波滤波后形成的,相当于将信号功率谱的高频部分由阶梯信号近似后平滑连接得到。信号的高频部分在总能量中所占比例较小,而信息存储量却很大,经过该方法近似后,可减小高分辨率大气湍流相位屏的计算复杂度。

3 模拟与讨论

3.1 大气湍流相位屏的模拟与检验

基于小波分析产生的大气湍流相位屏如图 1 所示,模拟尺寸为 $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$,像素为 $8000 \text{ pixel} \times 8000 \text{ pixel}$,像素间距 $p_0=1.25 \text{ mm}$,大气相干长度 $r_0=0.1 \text{ m}$,外尺度 $L_0=16 \text{ m}$,小波滤波器选择 db10,最高分解层 $K=7$ 。

为了检验基于小波分析的大气相位屏与理论模型的吻合度,对比了不同情况下生成的大气相位屏的相位结构函数和 Von Karman 模型结构函数的理论值,如图 2 所示。使用小波 db10 模拟大气湍流相位屏,图

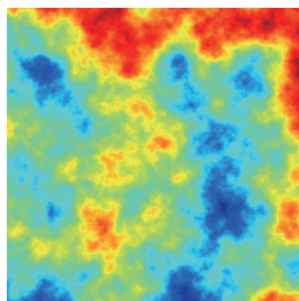


图 1 大气湍流相位屏示意图

Fig. 1 Diagram of atmospheric turbulence phase screen

2(a)为模拟大气湍流相位屏结构函数与理论相位屏结构函数的函数值,图 2(b)为模拟大气湍流相位屏结构函数与理论相位屏结构函数的函数值之差。图 2 结果是在 $p_0=1.7\text{ mm}$ 、 $r_0=0.05\text{ m}$ 、 $L_0=20\text{ m}$ 、 $K=3$ 条件下重复计算 800 次并将计算结果取平均得到的。大气湍流相位屏的模拟尺寸为 $0.5\text{ m}\times 100\text{ m}$ 、像素为 $300\text{ pixel}\times(6\times 10^4)\text{ pixel}$,检验(18)式,发现 $54=l_s(x_K)>2l_f=20$ 、 $0.72=D_{1K}<2D_1=1$ 是满足的。由于模拟的样本数量较大,计算得到的结构函数会收敛,并且收敛结果非常接近理论值,低频处的最大误差可达 0.065 rad^2 ,对应的相对误差为 1.3% ;可以预见,随着样本数的继续增大,相对误差会继续减小。图 2 中高频部分的最大相对误差为 8% ,鉴于本方案的特点,这个误差是可以接受的。

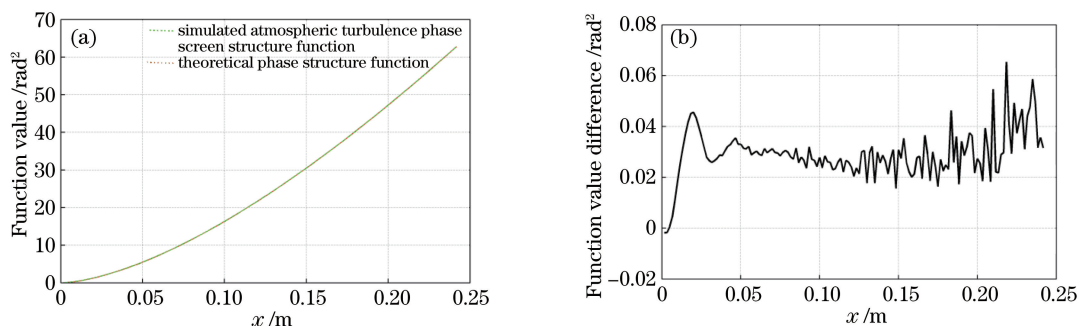


图 2 (a)模拟大气湍流相位屏结构函数与理论相位屏结构函数的函数值;(b)模拟大气湍流相位屏结构函数与理论相位屏结构函数的函数值之差

Fig. 2 (a) Function values of simulated atmospheric turbulence phase screen structure function and theoretical phase screen structure function; (b) function value difference between simulated atmospheric turbulence phase screen structure function and theoretical phase screen structure function

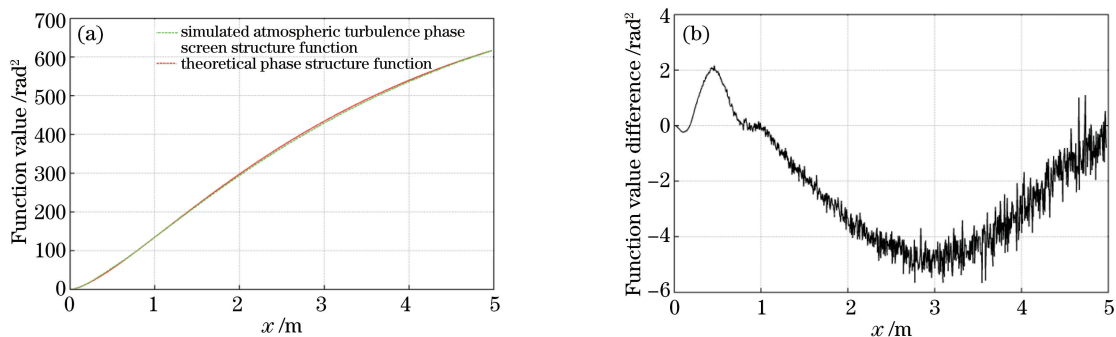


图 3 (a)模拟大气湍流相位屏结构函数与理论相位屏结构函数的函数值;(b)模拟大气湍流相位屏结构函数与理论相位屏结构函数的函数值之差

Fig. 3 (a) Function values of simulated atmospheric turbulence phase screen structure function and theoretical phase screen structure function; (b) function value difference between simulated atmospheric turbulence phase screen structure function and theoretical phase screen structure function

当大气湍流相位屏尺寸为 $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ 、像素为 $2000\text{ pixel} \times 2000\text{ pixel}$ 时,在 $p_0 = 5\text{ mm}$ 、 $r_0 = 0.1\text{ m}$ 、 $L_0 = 16\text{ m}$ 、 $K = 6$ 条件下重复计算 800 次并将计算结果取平均得到的结果如图 3 所示。使用小波 db10 模拟大气湍流相位屏,图 3(a)为模拟大气湍流相位屏结构函数与理论相位屏结构函数的函数值,图 3(b)为模拟大气湍流相位屏结构函数与理论相位屏结构函数的函数值之差。检验(18)式,发现 $49 = l_s(x_K) > 2l_f = 20$ 、 $15.68 = D_{1K} < 2D_1 = 20$ 也是满足的。这种情况下,像素数较多,结构函数收敛的取样数相对较少,结构函数的函数值差图中有一些毛刺,但是样本结构函数与理论值吻合得比较好,低频处最大误差约为 -5 rad^2 ,对应的相对误差约为 -1.16% ;高频处的最大相对误差约为 -6.2% ,这个误差也是可以接受的。

图 2、3 表明,所提出的方法在不同大气条件下得到的模拟值与理论值比较吻合。

3.2 小波参数的选择

所提出的方法本质上是将大气湍流相位屏经连续小波进行 DWT 处理后的高频系数近似为 WGN,因此小波滤波器和最大分解层的差异必然导致近似结果不同。

当大气湍流相位屏尺寸为 $0.5\text{ m} \times 100\text{ m}$ 、像素为 $300\text{ pixel} \times (6 \times 10^4)\text{ pixel}$ 时,在 $p_0 = 1.7\text{ mm}$ 、 $r_0 = 0.05\text{ m}$ 、 $L_0 = 20\text{ m}$ 、 $K = 3$ 条件下重复计算 800 次并将计算结果取平均得到的结果如图 4 所示。图 4 为分别使用小波 db1、db3、db10 和 db45 模拟大气湍流相位屏结构函数和理论相位屏结构函数的函数值之差。当使用连续小波(db1 为非连续小波)模拟时,模拟大气湍流相位屏结构函数和理论相位屏结构函数的函数值差比较小。可以预见,当样本数量继续增多时,低频部分会趋向理论值。根据已经收敛的高频部分的吻合情况,此处的最佳小波应该是 db10。在使用小波 db1(即 Haar)模拟时,高频部分出现了较大误差,并出现了频率起伏现象,这是由于该小波不连续,导致频域分割性能不佳,高频滤波时引入大量的不均匀信息,结构函数误差偏大。如前所述,滤波器越长,低频部分相关函数的递推式近似越好,高频部分相关性越低;当滤波器长度与滤波系数长度的量级接近时,边缘效应增强,频带能量发生变化,使高频部分近似为 WGN,从而产生更大的误差。此外,所提方法的近似计算复杂度 $O(l_f MN)$ 与小波滤波器长度 l_f 呈正相关关系,在可选范围内选择更短的小波有助于提升计算速度。

当大气湍流相位屏尺寸为 $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ 、像素为 $2000\text{ pixel} \times 2000\text{ pixel}$ 时,在 $p_0 = 5\text{ mm}$ 、 $r_0 = 0.1\text{ m}$ 、 $L_0 = 16\text{ m}$ 、 $K = 3$ 条件下重复计算 800 次并将计算结果取平均得到的结果如图 5 所示。图 5 为使用小波滤波器 db10 且最大分解层为 $4 \sim 7$ 时模拟大气湍流相位屏的结构函数和理论相位屏结构函数的函数值之差。 K 不同时,低频部分函数差值的最大值换算为相对误差后均在 $\pm 1.5\%$ 以内,符合前文的预测;随着 K 增大,高频部分的函数差值较大,最大分解层 $4 \sim 7$ 对应的最大相对误差分别为 7.5% 、 6.4% 、 -6.2% 、 -23.54% [$K = 7$ 时,(18)式不成立,相对误差增大], K 选取 5 或 6 时,相对误差较小。此外,计算复杂度 $O(l_f MN)$ 仅考虑了小波合成操作, x_K 的模拟并未考虑。 K 越小, M_K 、 N_K 越大,若采用了递推法模拟 x_K ^[9],则该部分模拟需要的计算次数为 $4M_K M_K N_K$,因此在可选范围内选择更大的 K 有助于提升计算速度,此处 $K = 6$ 为

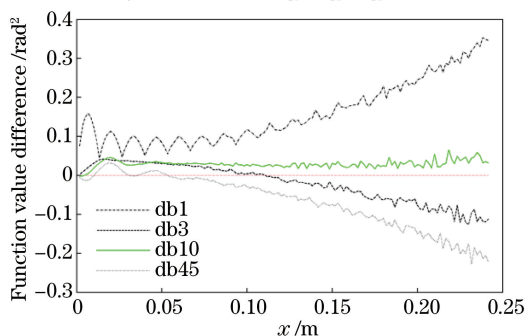


图 4 基于不同小波的模拟大气湍流相位屏结构函数与理论相位屏结构函数的函数值之差

Fig. 4 Function value difference between simulated atmospheric turbulence phase screen structure function and theoretical phase screen structure function based on different wavelets

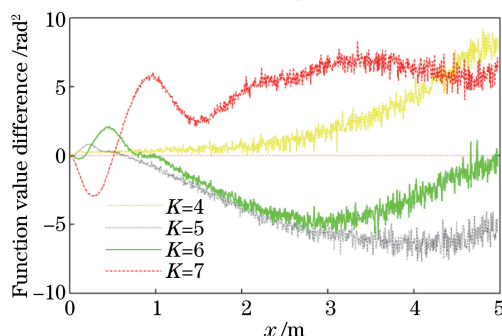


图 5 不同最大分解层数下模拟大气湍流相位屏结构函数与理论相位屏结构函数的函数值之差

Fig. 5 Function value difference between simulated atmospheric turbulence phase screen structure function and theoretical phase screen structure function under different maximum decomposition layer numbers

最佳选择。

综上所述,小波滤波器和最大分解层的选取需综合考虑(18)式和计算复杂度 $O(l_t MN)$ 。

3.3 计算复杂度

采用不同方法模拟大气湍流相位屏时,计算复杂度不同。使用不同方法模拟相同尺寸的大气湍流相位屏时所需要的时间也不同。表3为不同的(FFT、Assemat、Alessandro)和所提方法(Feng-Li)的计算复杂度以及总计算次数,其中 \bar{d} 表示多尺度法中所使用的平均邻域半径, MN 为相位屏的总像素数,所有方法都包含因子 MN ,不同之处在于不同方法的独立乘性因子不同,该独立乘性因子表示单独计算一个像素所需要的平均计算次数。对于像素为 $4000 \text{ pixel} \times 4000 \text{ pixel}$ 的相位屏的总计算次数,4种方法的独立乘性因子分别为 35.90, 1.6×10^4 , 576, 320。显然,谱反演法的计算次数最少,所提方法的计算次数次之。对于计算复杂度而言,所提方法与谱反演法相差不多。

除了需考虑计算复杂度,还需考虑算法所需要的计算机内存资源。一般地,这4种方法需要的内存从大到小依次为谱反演法、外推法、多尺度法、所提方法。谱反演法和外推法对内存的需求随着像素的增加而增大。小波合成采用卷积运算,所需要的临时存储空间较小。因此,所提出的方法在快速模拟大尺度、高分辨率大气湍流相位屏方面具有较大的优势。

表3 采用不同方法模拟大气湍流相位屏的计算复杂度和总计算次数

Table 3 Computational complexity and total calculation time in simulations for atmospheric turbulence phase screen by different methods

Method	FFT ^[1]	Assemat ^[9]	Alessandro ^[15]	Feng-Li
Total calculation number	$3/2 \cdot O(MN \log_2 MN)$	$4O(M \cdot MN)$	$64O(\bar{d}^2 MN)$	$16O(l_t MN)$

4 结 论

提出了一种基于小波分析的大气湍流相位屏的模拟方法,将大气模型进行连续小波分解后,对得到的高频部分作近似处理,从而可以快速模拟大尺寸、高分辨率大气湍流相位屏。不同情况下模拟的大气湍流相位屏的结构函数和 Von Karman 模型的理论结构函数吻合得较好,模拟得到低频部分的相对误差在 1% 左右,高频部分的相对误差在 6%~8% 左右。该方法的计算复杂度为 $O(l_t MN)$,较现有方法在计算速度上有显著提升,且消耗计算机内存资源较少,适合大尺寸、高分辨率大气湍流相位屏的快速模拟。

参 考 文 献

- [1] Mcglamery B L. Computer simulation studies of restoration of turbulence degraded images[J]. J Opt Soc Am, 1976, 66(2): 225-233.
- [2] Shellan J B. Statistical properties of the strehl ratio as a function of pupil diameter and level of adaptive optics correction following atmospheric propagation[J]. J Opt Soc Am A, 2004, 21(8): 1445-1451.
- [3] Lane R G, Glindemann A, Dainty J C. Simulation of a Kolmogorov phase screen[J]. Wave Random Media, 1992, 2(3): 209-224.
- [4] Carbillet M, Riccardi A. Numerical modeling of atmospherically perturbed phase screens: New solutions for classical fast Fourier transform and Zernike methods[J]. Appl Opt, 2010, 49(31): G47-G52.
- [5] Xiang J S. Accurate compensation of the low-frequency components for the FFT based turbulent phase screen[J]. Opt Express, 2012, 20(1): 681-687.
- [6] Xiang Jinsong. High-frequency error compensation method for the fast Fourier transform based turbulent phase screen [J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(10): 1001003.
向劲松. 快速傅里叶变换湍流相位屏高频误差的补偿方法[J]. 光学学报, 2014, 34(10): 1001003.
- [7] Tan Tao, Luo Qi, Tan Yi, et al. Measurement of temporal and spatial characteristics of atmospheric turbulence simulated by a rolling phase screen[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2015, 52(8): 080101.
谭 涛, 罗 奇, 谭 毅, 等. 旋转相位屏模拟大气湍流时空特性的测量[J]. 激光与光电子学进展, 2015, 52(8): 080101.
- [8] Charnotskii M. Sparse spectrum model for a turbulent phase[J]. J Opt Soc Am A, 2013, 30(3): 479-488.

-
- [9] Assemat F, Wilson R W, Gendron E. Method for simulating infinitely long and non stationary phase screens with optimized memory storage[J]. *Opt Express*, 2006, 14(3): 988-999.
- [10] Fried D L, Clark T. Extruding Kolmogorov-type phase screen ribbons[J]. *J Opt Soc Am A*, 2008, 25(2): 463-468.
- [11] Jia P, Zhang S J. Simulation and fabrication of the atmospheric turbulence phase screen based on a fractal model[J]. *Res Astron Astrophys*, 2012, 12(5): 584-590.
- [12] Harding C M, Johnston R A, Lane R G. Fast simulation of a Kolmogorov phase screen[J]. *Appl Opt*, 1999, 38(11): 2161-2170.
- [13] Noll R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence[J]. *J Opt Soc Am*, 1976, 66(3): 207-211.
- [14] Roddier N. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials[J]. *Opt Eng*, 1990, 29(10): 1174-1180.
- [15] Beghi A, Cenedese A, Masiero A. Multiscale stochastic approach for phase screens synthesis[J]. *Appl Opt*, 2011, 50(21): 4124-4133.
- [16] Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposition the wavelet representation[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, 11(7): 674-693.