

# 异常空心光束通过像散透镜后的相位奇异特性

唐碧华<sup>1</sup> 郑尚彬<sup>1</sup> 贺兵<sup>1</sup> 张勇<sup>1</sup> 罗亚梅<sup>1,2\*</sup> 高曾辉<sup>2</sup>

<sup>1</sup>西南医科大学生物医学工程系, 四川 泸州 646000

<sup>2</sup>宜宾学院计算物理重点实验室, 四川 宜宾 644000

**摘要** 光场的相位奇异特性是奇点光学研究的重要内容。运用广义惠更斯-菲涅耳衍射积分公式, 推导得到异常空心光束通过像散透镜后的光场分布表达式和相位奇点分布表达式, 并研究了其在几何焦平面的相位奇异特性。结果表明, 异常空心光束通过像散透镜后, 在几何焦平面上存在相位奇点, 且相位奇点受到透镜的像散系数和光束束腰宽度等参数控制。在一定条件下, 几何焦平面上会出现椭圆或圆刃型位错线、光涡旋。当像散系数或束腰宽度改变时, 椭圆或圆刃型位错线发生变化, 光涡旋也会发生移动、湮灭和产生。

**关键词** 物理光学; 奇点光学; 异常空心光束; 像散透镜; 相位奇点

中图分类号 O436 文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201636.0826001

## Phase Singularities of Anomalous Hollow Beams Through an Astigmatic Lens

Tang Bihua<sup>1</sup> Zheng Shangbin<sup>1</sup> He Bing<sup>1</sup> Zhang Yong<sup>1</sup> Luo Yamei<sup>1,2</sup> Gao Zenghui<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Biomedical Engineering, Southwest Medical University, Luzhou, Sichuan 646000, China

<sup>2</sup>Key Laboratory of Computational Physics, Yibin University, Yibin, Sichuan 644000, China

**Abstract** The phase singularity in optical field is an important subject in singular optics. Based on the generalized Huygens-Fresnel diffraction integral formula, the field distribution expressions and the phase singularity distribution expressions for anomalous hollow beams through an astigmatic lens are deduced, and used to study the phase singularities at the geometrical focal plane emphatically. The phase singularities may appear at the geometrical focal plane when the anomalous hollow beams pass through an astigmatic lens, and are dependent on the astigmatic coefficient and waist width. Under certain conditions, the ellipse or circular edge dislocations, optical vortices will appear at the geometrical focal plane. By changing the astigmatic coefficient or waist width, the ellipse or circular edge dislocations will vary, and the optical vortices will move, annihilate and appear.

**Key words** physical optics; singular optics; anomalous hollow beams; astigmatic lens; phase singularity

**OCIS codes** 260.6042; 350.5500; 350.5030; 140.3295

## 1 引 言

光波在某点或某线处振幅为零且相位具有不确定性, 会形成光涡旋或位错线, 即相位奇点。光场的这种相位奇异特性是奇点光学研究的重要内容之一<sup>[1-2]</sup>。1993—1998年, Freund等<sup>[3-6]</sup>深入研究了高随机度介质中波前位错分布及相位奇点正负拓扑电荷的定义等。近年来, 人们对这种波前奇异特性的研究兴趣越来越浓厚。常见奇点光束有拉盖尔-高斯光束<sup>[7]</sup>、贝塞尔-高斯光束<sup>[8]</sup>、两个刃型位错<sup>[9]</sup>、部分相干涡旋光束<sup>[10]</sup>等, 这些光束会出现相位奇异特性。例如两个刃型位错通过像散透镜后刃型位错是不稳定的, 在一定条件下会弯曲、消失或变成光涡旋<sup>[11]</sup>; 涡旋-刃型位错通过像散透镜后, 会出现涡旋的移动、产生、湮灭以及移动到无穷远处消失的现象, 在演化过程中涡旋的拓扑电荷不总是守恒, 光涡旋与刃型位错相互作用的具体情况与光涡旋和刃型位错是共轴或离轴等因素有关<sup>[12]</sup>。

收稿日期: 2016-02-24; 收到修改稿日期: 2016-04-14

基金项目: 国家自然科学基金(61505075, 61275203)、四川省教育厅自然科学基金(15CZ0017, 16ZA0185)、四川省科技支撑计划(2014SZ001)

作者简介: 唐碧华(1977—), 女, 硕士, 副教授, 主要从事激光技术及应用方面的研究。E-mail: anguia@126.com

\*通信联系人。E-mail: luoluoeryan@126.com

2005年, Wu等<sup>[13]</sup>在实验中发现了一种新型的带有实心核且呈椭圆对称的异常空心电子束。2007年, Cai<sup>[14]</sup>描述了异常空心光束的理论模型, 将该光束看作像散高斯模型和像散圆环模型的叠加, 并研究了其在傍轴情况下的传输特性。次年, 黎昌金等<sup>[15]</sup>将异常空心光束理论模型推广到非傍轴范畴, 得出其在传输过程中光束形状会发生变化的结论。随后, 异常空心光束在不同光学系统下的传输特性得到广泛研究。2010年和2014年, 王奎龙等<sup>[16-18]</sup>先后研究了异常空心光束通过一阶失调光学系统、环形硬边光阑的传输特性和通过硬边光阑失调光学系统的传输特性, 得出衍射光束的归一化光强分布和传输规律与光阑参数有关。激光光束通过不同像散透镜后, 光束束宽、远场发散角等参数一般会发生变化<sup>[19-21]</sup>, 也可能引起波前畸变, 导致相位奇点改变。

本文基于广义惠更斯-菲涅耳衍射积分公式<sup>[11-12]</sup>, 推导得到异常空心光束通过像散透镜后的光场分布表达式和相位分布表达式, 研究了该光束通过像散透镜后的相位奇异特性, 重点探讨了像散系数和束腰宽度对几何焦平面上相位奇点的影响。这对设计合适的透镜光学系统以控制光束参数变化, 特别是相位奇点的控制有重要的实际意义。

## 2 理论模型

在直角坐标系下, 异常空心光束在  $z=0$  处的场分布表示为<sup>[14]</sup>

$$E(x_0, y_0, 0) = \left( -2 + \frac{8x_0^2}{\omega_{0x}^2} + \frac{8y_0^2}{\omega_{0y}^2} \right) \exp\left( -\frac{x_0^2}{\omega_{0x}^2} - \frac{y_0^2}{\omega_{0y}^2} \right), \quad (1)$$

式中  $\omega_{0x}$  和  $\omega_{0y}$  分别表示高斯光束在  $x$  和  $y$  方向的束腰宽度。

假定焦距为  $f$  的像散透镜位于平面  $z=0$  处, 根据广义惠更斯-菲涅耳衍射积分公式, 通过像散透镜的场分布为

$$E(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp\left[ -\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2) \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x_0, y_0, 0) \exp[-ikC_6(x_0^2 - y_0^2)] \times \exp\left\{ -\frac{ik}{2z} [(1 - z/f)(x_0^2 + y_0^2) - 2(x_0x + y_0y)] \right\} dx_0 dy_0, \quad (2)$$

式中  $\lambda$  为波长,  $k=2\pi/\lambda$  为波数, 透镜的像散用  $\exp[-ikC_6(x_0^2 - y_0^2)]$  来表示,  $C_6$  为像散系数。

将(1)式代入(2)式, 利用积分公式  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$  和  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2 + bx) dx = \frac{(2a + b^2)\sqrt{\pi}}{4a^{5/2}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$  ( $a$  的实部大于0), 计算整理后得到异常空心光束通过像散透镜后的场分布为

$$E(x, y, z) = \frac{2\pi\omega_{0x}^2\omega_{0y}^2}{(-i + kq_1\omega_{0x}^2)^3 (i + kq_2\omega_{0y}^2)^3 z^3 \lambda} \exp\left\{ \frac{k}{2z^2} \left[ -\frac{k\omega_{0x}^2 x^2}{2 + 2ikq_1\omega_{0x}^2} - \frac{k\omega_{0y}^2 y^2}{2 - 2ikq_2\omega_{0y}^2} - iz(x^2 + y^2) \right] \right\} \times \sqrt{\frac{1}{\omega_{0x}^2} + ikq_1} \sqrt{\frac{1}{\omega_{0y}^2} - ikq_2} \{ ik^2 [\omega_{0x}^2 (i + kq_2\omega_{0y}^2)^2 x^2 + (-i + kq_1\omega_{0x}^2)^2 \omega_{0y}^2 y^2] + (-i + kq_1\omega_{0x}^2) (i + kq_2\omega_{0y}^2) [3i - kq_1\omega_{0x}^2 + kq_2(1 - ikq_1\omega_{0x}^2)\omega_{0y}^2] z^2 \}, \quad (3)$$

式中

$$q_1 = C_6 + \frac{1}{2z} - \frac{1}{2f}, q_2 = C_6 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{2f}. \quad (4)$$

相位奇点的位置取决于

$$\begin{cases} \text{Re}[E(x, y, z)] = 0 \\ \text{Im}[E(x, y, z)] = 0 \end{cases}, \quad (5)$$

式中  $\text{Re}$  和  $\text{Im}$  分别表示  $E(x, y, z)$  的实部和虚部。

将(3)式代入(5)式, 可得异常空心光束通过像散透镜后的相位奇点位置为

$$\begin{cases} k^2 w_{0x}^2 w_{0y}^2 (q_2 x^2 - q_1 y^2) + 2(q_1 w_{0x}^2 - q_2 w_{0y}^2) z^2 = 0 \\ k^2 w_{0x}^2 (1 - k^2 q_2^2 w_{0y}^4) x^2 + k^2 w_{0y}^2 (1 - k^2 q_1^2 w_{0x}^4) y^2 + \\ z^2 k^2 (-4q_1 q_2 w_{0x}^2 w_{0y}^2 + q_2^2 w_{0y}^4 + q_1^2 w_{0x}^4 + k^2 q_1^2 q_2^2 w_{0x}^4 w_{0y}^4) - 3z^2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

由(6)式可知,异常空心光束通过像散透镜后的相位奇点位置与像散系数  $C_6$ 、焦距  $f$ 、束腰宽度  $w_{0x}$  和  $w_{0y}$  等参数有关。

### 3 焦平面上的相位奇异特性

根据(3)式可得异常空心光束通过像散透镜后在几何焦平面  $z=f$  处的场分布为

$$E(x, y, f) = \frac{2\pi w_{0x}^2 w_{0y}^2}{(-i + kC_6 w_{0x}^2)^3 (i + kC_6 w_{0y}^2)^3 f^3 \lambda} \exp\left\{\frac{k}{2f^2} \left[ -\frac{k w_{0x}^2 x^2}{2 + 2ikC_6 w_{0x}^2} - \frac{k w_{0y}^2 y^2}{2 - 2ikC_6 w_{0y}^2} - if(x^2 + y^2) \right]\right\} \cdot \sqrt{\frac{1}{w_{0x}^2} + ikC_6} \sqrt{\frac{1}{w_{0y}^2} - ikC_6} \{ik^2 [w_{0x}^2 (i + kC_6 w_{0y}^2)^2 x^2 + (-i + kC_6 w_{0x}^2)^2 w_{0y}^2 y^2] + (-i + kC_6 w_{0x}^2) (i + kC_6 w_{0y}^2) [3i - kC_6 w_{0x}^2 + kC_6 (1 - ikC_6 w_{0x}^2) w_{0y}^2] f^2\}, \quad (7)$$

当  $z=f$  时,由(4)式可知  $q_1=q_2=C_6$ ,则根据(6)式可得异常空心光束通过像散透镜后在几何焦平面上的相位奇点位置为

$$\begin{cases} C_6 [k^2 w_{0x}^2 w_{0y}^2 (x^2 - y^2) + 2(w_{0x}^2 - w_{0y}^2) f^2] = 0 \\ k^2 w_{0x}^2 (1 - k^2 C_6^2 w_{0y}^4) x^2 + k^2 w_{0y}^2 (1 - k^2 C_6^2 w_{0x}^4) y^2 + \\ C_6^2 f^2 k^2 (-4w_{0x}^2 w_{0y}^2 + w_{0y}^4 + w_{0x}^4 + k^2 C_6^2 w_{0x}^4 w_{0y}^4) - 3f^2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

针对(8)式讨论不同参数下异常空心光束通过像散透镜后在几何焦平面上的相位奇异特性。

#### 3.1 $C_6=0$ 的情况

将  $C_6=0$  代入(8)式可得

$$\frac{x^2}{w_{0y}^2} + \frac{y^2}{w_{0x}^2} = \frac{3f^2}{k^2 w_{0x}^2 w_{0y}^2}, \quad (9)$$

当  $w_{0x} \neq w_{0y}$  时,在几何焦平面上将出现椭圆刃型位错线,其顶点坐标为  $(\pm\sqrt{3}f/kw_{0x}, 0)$  和  $(0, \pm\sqrt{3}f/kw_{0y})$ 。当  $w_{0x} = w_{0y}$  时,在几何焦平面上将出现圆刃型位错线,其圆心位于原点,半径  $r = \sqrt{3}f/kw_{0x}$ 。

#### 3.2 $C_6 \neq 0$ 的情况

$C_6 \neq 0$  时,由(8)式可得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{f}{kw_{0x}} \sqrt{(1 + C_6^2 k^2 w_{0x}^4) (C_6^2 k^2 w_{0x}^2 w_{0y}^4 - 2w_{0y}^2 - w_{0x}^2) / q_3} \\ y_1 = \frac{f}{kw_{0y}} \sqrt{(1 + C_6^2 k^2 w_{0y}^4) (C_6^2 k^2 w_{0y}^2 w_{0x}^4 - 2w_{0x}^2 - w_{0y}^2) / q_3} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ y_2 = y_1 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ y_3 = -y_1 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = x_1 \\ y_4 = -y_1 \end{cases}, \quad (10)$$

$$q_3 = (w_{0x}^2 + w_{0y}^2) (C_6^2 k^2 w_{0x}^2 w_{0y}^2 - 1). \quad (11)$$

根据(8)式和(10)式可知, $C_6 \neq 0$  时,几何焦平面上将不再出现椭圆或圆刃型位错线,而可能会演化为光涡旋;在几何焦平面上存在 4 个光涡旋的必要条件是  $(C_6^2 k^2 w_{0x}^2 w_{0y}^4 - 2w_{0y}^2 - w_{0x}^2) / q_3 > 0$  且  $(C_6^2 k^2 w_{0y}^2 w_{0x}^4 - 2w_{0x}^2 - w_{0y}^2) / q_3 > 0$ 。

当  $w_{0x} = w_{0y}$  时,令  $w_{0x} = w_{0y} = w_0$ 。若  $C_6^2 k^2 w_0^4 > 3$  或  $C_6^2 k^2 w_0^4 < 1$ ,则根据(10)式可知,4 个光涡旋的位置为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{f}{kw_0} \sqrt{\frac{(1 + C_6^2 k^2 w_0^4) (C_6^2 k^2 w_0^4 - 3)}{2(C_6^2 k^2 w_0^4 - 1)}} \\ y_1 = x_1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ y_2 = x_1 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ y_3 = -x_1 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = x_1 \\ y_4 = -x_1 \end{cases}. \quad (12)$$

根据异常空心光束通过像散透镜后在几何焦平面上的相位奇点分析,进行数值计算,其中计算参数

$\lambda=1 \mu\text{m}, f=200 \text{ mm}$  固定不变。

图 1 所示为  $C_6=0$  并取不同  $w_{0x}, w_{0y}$  时, 异常空心光束通过理想透镜后在几何焦平面上的等相位线分布。从图 1(a)~(c) 可知, 当  $w_{0x} \neq w_{0y}$  时, 几何焦平面上出现椭圆刃型位错线(箭头所指位置), 越过该位错线有大小为  $\pi$  的相位突变。图 1(a) 中椭圆刃型位错线的顶点坐标为  $(\pm 0.459 \text{ mm}, 0)$ 、 $(0, \pm 0.276 \text{ mm})$ , 图 1(b) 中顶点坐标为  $(\pm 0.459 \text{ mm}, 0)$ 、 $(0, \pm 0.221 \text{ mm})$ , 图 1(c) 中顶点坐标为  $(\pm 0.459 \text{ mm}, 0)$ 、 $(0, \pm 0.184 \text{ mm})$ 。当  $w_{0x}=w_{0y}$  时, 椭圆刃型位错线变为圆刃型位错线, 如图 1(d)、(e) 所示, 其半径分别为  $0.368 \text{ mm}$  和  $0.276 \text{ mm}$ 。图 1(a)~(c) 中椭圆刃型位错线的顶点坐标以及图 1(d)、(e) 中圆刃型位错线的半径可由(9)式计算得到。

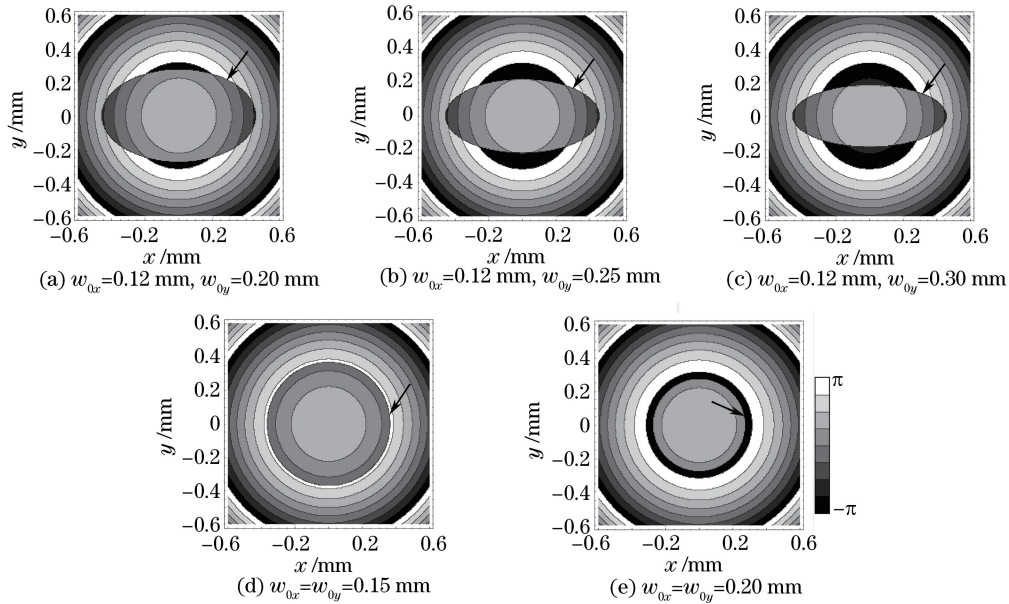


图 1 异常空心光束通过理想透镜后在几何焦平面上的等相位线分布

Fig. 1 Contour lines of phase at the geometrical focal plane when anomalous hollow beams pass through an ideal lens

图 2 所示为给定计算参数  $w_{0x}=0.5 \text{ mm}, w_{0y}=0.8 \text{ mm}$ , 取不同  $C_6$  值时, 异常空心光束通过不同像散透镜后在几何焦平面上的等相位线分布。图 2 与图 1 对比可知, 当  $C_6 \neq 0$  时, 几何焦平面上出现光涡旋, 而刃型位错线消失。当  $C_6 = 1.2 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$  时, 存在 4 个光涡旋分别为 A  $(-0.105 \text{ mm}, 0.078 \text{ mm})$ 、B  $(0.105 \text{ mm}, 0.078 \text{ mm})$ 、C  $(-0.105 \text{ mm}, -0.078 \text{ mm})$ 、D  $(0.105 \text{ mm}, -0.078 \text{ mm})$ , 对应拓扑电荷分别为  $+1, -1, -1, +1$  (拓扑电荷的值由符号法则决定<sup>[5]</sup>), 如图 2(a) 所示。随着像散系数的变化, 光涡旋有所移动并出现成对光涡旋的湮灭或产生现象。当  $C_6$  减小到  $1.0 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$  和  $0.9 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$  时, 4 个光涡旋的位置分别移动到 A  $(-0.086 \text{ mm}, 0.050 \text{ mm})$ 、B  $(0.086 \text{ mm}, 0.050 \text{ mm})$ 、C  $(-0.086 \text{ mm}, -0.050 \text{ mm})$ 、D  $(0.086 \text{ mm}, -0.050 \text{ mm})$  [图 2(b)] 和 A  $(-0.076 \text{ mm}, 0.029 \text{ mm})$ 、B  $(0.076 \text{ mm}, 0.029 \text{ mm})$ 、C  $(-0.076 \text{ mm}, -0.029 \text{ mm})$ 、D  $(0.076 \text{ mm}, -0.029 \text{ mm})$  [图 2(c)], 光涡旋的拓扑电荷不变。当  $C_6 = 0.85 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$  时, 两拓扑电荷相反的光涡旋 A、C 相遇于  $x$  轴上的点  $(-0.070 \text{ mm}, 0)$  并湮灭, 另两个拓扑电荷相反的光涡旋 B、D 相遇于  $x$  轴上的点  $(0.070 \text{ mm}, 0)$ , 也同时发生湮灭, 如图 2(d) 所示。将参数  $f=200 \text{ mm}, w_{0x}=0.5 \text{ mm}, w_{0y}=0.8 \text{ mm}, k=2\pi/\lambda, \lambda=1 \mu\text{m}$  代入(10)式中的  $x_1$  和  $y_1$  表达式, 则在  $0.85 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1} \leq C_6 \leq 1.2 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$  范围内,  $x_1$  和  $y_1$  均呈单调变化, 即  $x_1$  和  $y_1$  分别随  $C_6$  减小而减小。根据(10)式可知, 随着  $C_6$  的减小, 4 个光涡旋的坐标值与图 2(a)~(d) 的变化情况一致, 其具体位置可由(10)式求出。当  $C_6$  减小到  $0.8 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$  时, 如图 2(e) 所示, 焦平面上没有相位奇点, 因为此条件下(10)式无实数解。当  $C_6$  继续减小到  $0.3 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$  时, 焦平面上重新产生了 4 个光涡旋, 如图 2(f) 所示, 分别为 G  $(-0.123 \text{ mm}, 0.100 \text{ mm})$ 、H  $(0.123 \text{ mm}, 0.100 \text{ mm})$ 、I  $(-0.123 \text{ mm}, -0.100 \text{ mm})$ 、J  $(0.123 \text{ mm}, -0.100 \text{ mm})$ , 对应拓扑电荷分别为  $-1, +1, +1, -1$ 。当  $C_6$  减小到  $0.2 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$  时, 4 个光涡旋分别移动到 G  $(-0.096 \text{ mm}, 0.065 \text{ mm})$ 、H  $(0.096 \text{ mm}, 0.065 \text{ mm})$ 、I  $(-0.096 \text{ mm},$



$-0.065 \text{ mm}$ )、 $J(0.096 \text{ mm}, -0.065 \text{ mm})$ ,如图 2(g)所示,对应拓扑电荷不变。图 2(f)、(g)中的光涡旋位置可根据(10)式求出。在上述演化过程中,光涡旋的拓扑电荷守恒。

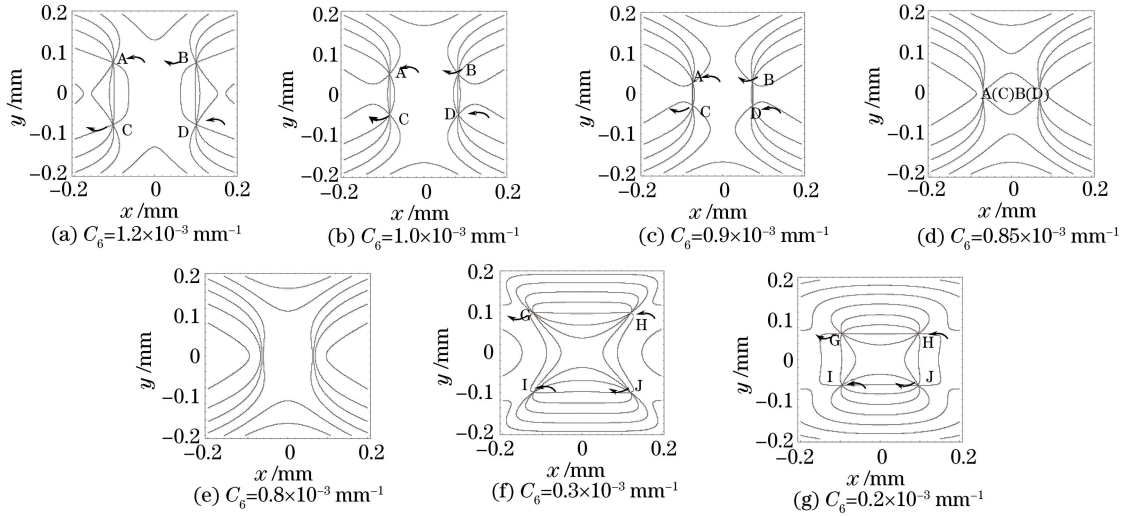


图 2 异常空心光束通过不同像散透镜后在几何焦平面上的等相位线分布  
Fig. 2 Contour lines of phase at the geometrical focal plane when anomalous hollow beams pass through different astigmatic lenses

图 3 所示为给定计算参数  $C_6 = 0.001 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\omega_{0y} = 0.5 \text{ mm}$ , 取不同  $\omega_{0x}$  时异常空心光束通过像散透镜后在几何焦平面上的等相位线分布。当  $\omega_{0x} = 0.8 \text{ mm}$  时,几何焦平面上有 4 个光涡旋,如图 3(a)所示,分别为  $A(-0.050 \text{ mm}, 0.086 \text{ mm})$ 、 $B(0.050 \text{ mm}, 0.086 \text{ mm})$ 、 $C(-0.050 \text{ mm}, -0.086 \text{ mm})$ 、 $D(0.050 \text{ mm}, -0.086 \text{ mm})$ ,对应拓扑电荷分别为  $+1, -1, -1, +1$ 。当  $\omega_{0x}$  减小到  $0.7 \text{ mm}$  和  $0.6 \text{ mm}$  时,4 个光涡旋分别移动到  $A(-0.041 \text{ mm}, 0.075 \text{ mm})$ 、 $B(0.041 \text{ mm}, 0.075 \text{ mm})$ 、 $C(-0.041 \text{ mm}, -0.075 \text{ mm})$ 、 $D(0.041 \text{ mm}, -0.075 \text{ mm})$  [图 3(b)] 和  $A(-0.018 \text{ mm}, 0.053 \text{ mm})$ 、 $B(0.018 \text{ mm}, 0.053 \text{ mm})$ 、 $C(-0.018 \text{ mm}, -0.053 \text{ mm})$ 、 $D(0.018 \text{ mm}, -0.053 \text{ mm})$  [图 3(c)],拓扑电荷不变。当  $\omega_{0x} = 0.584 \text{ mm}$  时,两拓扑电荷相反的光涡旋 A、B 相遇于  $y$  轴上的点  $(0, 0.046 \text{ mm})$  处湮灭,另两个拓扑电荷相反的光涡旋 C、D 相遇于  $y$  轴上的点  $(0, -0.046 \text{ mm})$ ,也同时发生湮灭,如图 3(d)所示。将参数  $f = 200 \text{ mm}$ ,  $C_6 = 0.001 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\omega_{0y} = 0.5 \text{ mm}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda = 1 \mu\text{m}$  代入(10)式中的  $x_1$  和  $y_1$  表达式,则在  $0.584 \text{ mm} \leq \omega_{0x} \leq 0.8 \text{ mm}$  范围内,  $x_1$  和  $y_1$  均单调变化,即  $x_1$  和  $y_1$  分别随  $\omega_{0x}$  的减小而减小。根据(10)式可知,随着  $\omega_{0x}$  的减小,4 个光涡旋的坐标值与图 3(a)~(d)的变化情况一致,其具体位置可由(10)式求出。当  $\omega_{0x}$  减小到  $0.57 \text{ mm}$  时,如图 3(e)所示,焦平面上没有相位奇点,因为此时(10)式无实数解。在上述演化过程中,光涡旋的拓扑电荷守恒。

图 4 为图 3(d)中光涡旋在  $y$  轴上相遇发生湮灭时,湮灭点的  $y$  坐标、 $C_6$ 、 $\omega_{0x}$  三者之间的关系,其中束腰宽度  $\omega_{0y} = 0.5 \text{ mm}$ ,  $C_6$  的取值范围为  $0.8 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1} \leq C_6 \leq 1.1 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$ 。由图 4 可知,光涡旋在  $y$  轴上湮灭的位置关于  $x$  轴对称,且成对湮灭。当  $C_6$  变化时,光涡旋湮灭所对应的  $\omega_{0x}$  临界值和在  $y$  轴上湮灭的位置并不相同。当  $C_6$  增大时,对应  $\omega_{0x}$  临界值减小,且湮灭位置向坐标原点靠近。当  $1 < C_6^2 k^2 \omega_{0y}^4 < 3$  时,若  $C_6^2 k^2 \omega_{0x}^2 \omega_{0y}^4 - 2\omega_{0y}^2 - \omega_{0x}^2 = 0$ ,即  $\omega_{0x} = \sqrt{2} \omega_{0y} / \sqrt{C_6^2 k^2 \omega_{0y}^4 - 1}$ ,根据(10)式可知光涡旋将分别相遇于  $y$  轴上点  $\left(0, \frac{f}{k\omega_{0y}} \sqrt{3 - C_6^2 k^2 \omega_{0y}^4}\right)$  和点  $\left(0, -\frac{f}{k\omega_{0y}} \sqrt{3 - C_6^2 k^2 \omega_{0y}^4}\right)$  处,与图 4 一致。同理可分析  $1 < C_6^2 k^2 \omega_{0x}^4 < 3$  时,  $C_6^2 k^2 \omega_{0y}^2 \omega_{0x}^4 - 2\omega_{0x}^2 - \omega_{0y}^2 = 0$  的情况,根据(10)式可知光涡旋将在  $x$  轴上相遇并发生湮灭。

图 5 所示为束腰宽度  $\omega_{0x} = \omega_{0y} = \omega_0$ ,  $\omega_0$  取不同值时,异常空心光束通过像散透镜后在几何焦平面上的等相位线分布,其中计算参数  $C_6 = 0.001 \text{ mm}^{-1}$ 。由图 5 与图 2、图 3 对比可知,当  $\omega_{0x} = \omega_{0y}$  时,几何焦平面上仍会出现 4 个光涡旋,但这 4 个光涡旋的  $x$ 、 $y$  坐标的绝对值均相等。当  $\omega_0 = 0.60 \text{ mm}$  时,4 个光涡旋

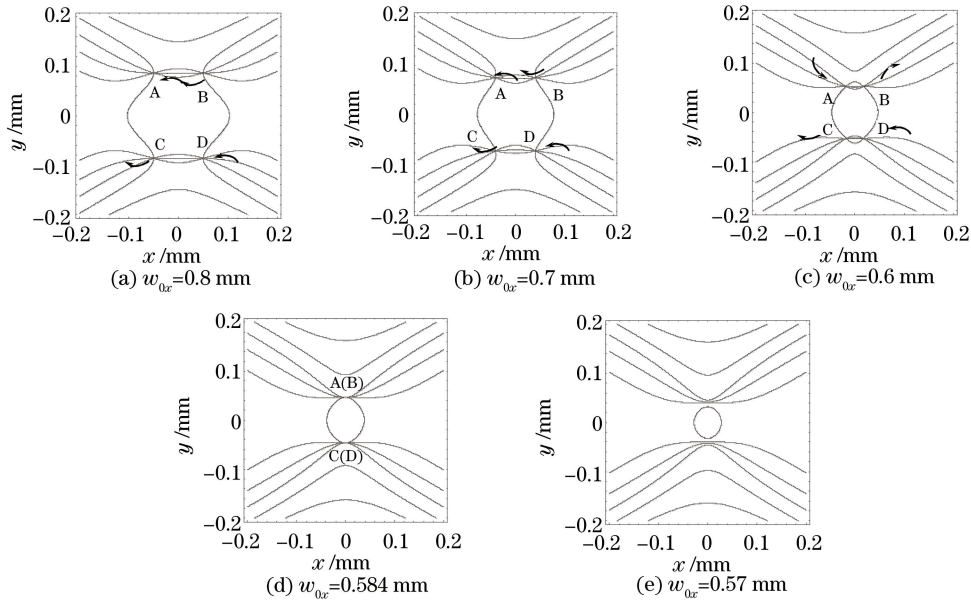


图 3 取不同  $w_{0x}$  时几何焦平面上的等相位线分布

Fig. 3 Contour lines of phase at the geometrical focal plane for different values of  $w_{0x}$

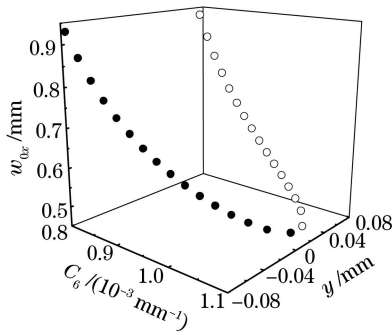


图 4 光涡旋湮灭处  $y$  坐标、 $C_6$ 、 $w_{0x}$  三者之间的关系

Fig. 4 Relationship among  $y$ ,  $C_6$ , and  $w_{0x}$  at the positions where vortices annihilate

分别为 A(-0.067 mm, 0.067 mm)、B(0.067 mm, 0.067 mm)、C(-0.067 mm, -0.067 mm)、D(0.067 mm, -0.067 mm), 对应拓扑电荷分别为 +1、-1、-1、+1, 如图 5(a) 所示。当  $w_{0x}$  减小到 0.55 mm 和 0.53 mm 时, 4 个光涡旋分别移动到 A(-0.043 mm, 0.043 mm)、B(0.043 mm, 0.043 mm)、C(-0.043 mm, -0.043 mm)、D(0.043 mm, -0.043 mm)[图 5(b)] 和 A(-0.020 mm, 0.020 mm)、B(0.020 mm, 0.020 mm)、C(-0.020 mm, -0.020 mm)、D(0.020 mm, -0.020 mm)[图 5(c)], 拓扑电荷不变。当  $w_0 = 0.525$  mm 时, 光涡旋 A、B、C、D 相遇于原点  $O$  处, 并发生湮灭, 如图 5(d) 所示。将参数  $f = 200$  mm,  $C_6 = 0.001$  mm<sup>-1</sup>,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda = 1$   $\mu$ m 代入(12)式中的  $x_1$  表达式, 则在  $0.525$  mm  $\leq w_0 \leq 0.60$  mm 范围内,  $x_1$  单调变化, 即  $x_1$  随着  $w_0$  的减小而减小。根据(12)式可知, 随着  $w_0$  的减小, 4 个光涡旋的坐标值与图 5(a)~(d) 的演化情况一致。图 5(a)~(c) 中的光涡旋位置可由(12)式求出。特别地, 当  $C_6^2 k^2 w_0^4 = 3$  时, 根据(12)式可知 4 个光涡旋将会聚于原点处, 与图 5(d) 相吻合。当  $w_0$  减小到 0.52 mm 时, 如图 5(e) 所示, 焦平面处没有相位奇点, 因为此时(12)式无实数解。整个演化过程中, 光涡旋的拓扑电荷守恒。

## 4 结 论

研究了异常空心光束通过像散透镜后的场分布和相位奇点分布情况, 并重点讨论了其在几何焦平面上的相位奇异特性。结果表明, 相位奇点主要与像散系数、束腰宽度等参数有关。当像散系数为零时, 几何焦平面上会出现椭圆或圆刀型位错线; 当束腰宽度改变时, 刀型位错线会发生变化。当像散系数不为零时, 几

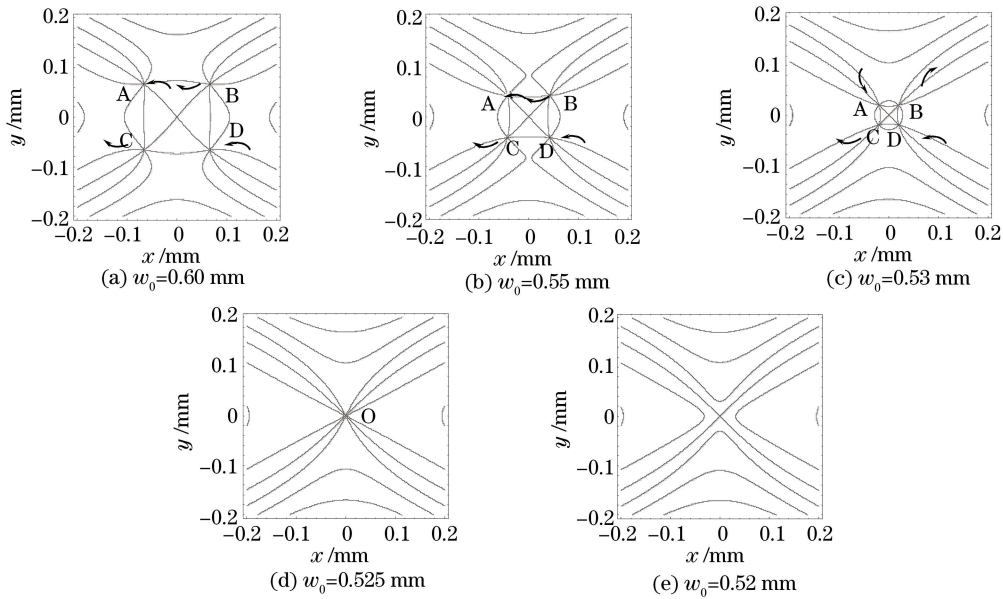


图 5  $w_{0x} = w_{0y} = w_0$  时几何焦平面上的等相位线分布

Fig. 5 Contour lines of phase at the geometrical focal plane when  $w_{0x} = w_{0y} = w_0$

何焦平面上存在光涡旋,但椭圆或圆刃型位错线消失;当像散系数或束腰宽度改变时,光涡旋会发生移动、湮灭和产生,整个过程中拓扑电荷守恒。所得结论有助于通过改变像散系数或束腰宽度等参数来控制异常空心光束的相位奇点,深化了对异常空心光束相位奇点动态演化特性的认识。

### 参 考 文 献

- Soskin M S, Vasnetsov M V. Singular optics[J]. Progress in Optics, 2001, 42(4): 219-276.
- Nye J F, Berry M V. Dislocations in wave trains[J]. Proceedings of the Royal Society of London A, 1974, 336(1605): 165-190.
- Freund I, Shvartsman N, Freilikher V. Optical dislocation networks in highly random media [J]. Optics Communications, 1993, 101(3-4): 247-264.
- Freund I. Optical vortices in Gaussian random wave fields: Statistical probability densities [J]. Journal of the Optical Society of America A, 1994, 11(5): 1644-1652.
- Freund I, Shvartsman N. Wave-field phase singularities: The sign principle[J]. Physical Review A, 1995, 50(6): 5164-5172.
- Freund I. Phase correlations at neighboring intensity critical points in Gaussian random wave fields[J]. Applied Optics, 1998, 37(32): 7560-7567.
- Cheng K, Liu P S, Lü B D. Composite optical vortices in noncollinear Laguerre-Gaussian beams and their propagation in free space[J]. Chinese Physics B, 2008, 17(5): 1743-1751.
- Ou J, Jiang Y, Zhang J, *et al.* Spreading of spiral spectrum of Bessel-Gaussian beam in non-Kolmogorov turbulence[J]. Optics Communications, 2014, 318(5): 95-99.
- He D, Gao Z H, Yan H W, *et al.* Interaction of two edge dislocations in free-space propagation[J]. Chinese Physics B, 2011, 20(1): 014201.
- Cheng Ke, Yan Hongwei, Lü Baida. Composite coherence vortices in the superimposed field of partially coherent vortex beams and their propagation dynamics[J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(8): 4911-4920.  
程 科, 闫红卫, 吕百达. 部分相干涡旋光束叠加场中的合成相干涡旋及其动态传输 [J]. 物理学报, 2008, 57(8): 4911-4920.
- Chen H T, Gao Z H, Yang H J, *et al.* Evolution behavior of two edge dislocations passing through an astigmatic lens[J]. Journal of Modern Optics, 2012, 59(21): 1863-1872.
- Yan H W, Lü B D. Vortex-edge dislocation interaction in the presence of an astigmatic lens[J]. Optics Communications, 2009, 282(5): 717-726.
- Wu Y K, Li J, Wu J. Anomalous hollow electron beams in a storage ring[J]. Physical Review Letters, 2005, 94(13):

134802.

- 14 Cai Y. Model for an anomalous hollow beam and its paraxial propagation[J]. *Optics Letters*, 2007, 32(21): 3179-3181.
- 15 Li Changjin, Lü Baida. Propagation of nonparaxial vectorial anomalous hollow beams[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2008, 20(12): 1965-1970.  
黎昌金, 吕百达. 非傍轴矢量异常空心光束的传输特性[J]. *强激光与粒子束*, 2008, 20(12): 1965-1970.
- 16 Wang K L, Zhao C L, Xu B J. Propagation of anomalous hollow beam through a misaligned first-order optical system[J]. *Optics & Laser Technology*, 2010, 42(8): 1218-1222.
- 17 Wang Kuilong. Propagation properties of anomalous hollow beam through annular hard-edge diaphragm[J]. *Journal of Hangzhou Normal University (Natural Science Edition)*, 2010, 9(6): 468-472.  
王奎龙. 异常空心光束通过环形硬边光阑的传输特性[J]. *杭州师范大学学报(自然科学版)*, 2010, 9(6): 468-472.
- 18 Wang Kuilong. Propagation of anomalous hollow beam through a hard-apertured misaligned optical system[J]. *Journal of Hangzhou Normal University (Natural Science Edition)*, 2014, 13(1): 63-67.  
王奎龙. 异常空心光束通过硬边光阑失调光学系统的传输[J]. *杭州师范大学学报(自然科学版)*, 2014, 13(1): 63-67.
- 19 Li Dong, Wu Fengtie, Li Pan, *et al.* Influence of astigmatism on periodic bottle beam[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(s1): s126002.  
李 冬, 吴逢铁, 李 攀, 等. 像散对周期性局域空心光束的影响[J]. *光学学报*, 2014, 34(s1): s126002.
- 20 Li Jia, Chen Yanru, Xin Yu, *et al.* Invariant polarization of stochastic electromagnetic beams through astigmatic optical systems[J]. *Chinese J Lasers*, 2011, 38(1): 0102010.  
李 伽, 陈延如, 辛 煜, 等. 随机电磁光束通过像散光学系统后的偏振恒定性[J]. *中国激光*, 2011, 38(1): 0102010.
- 21 Lin Huichuan, Pu Jixiong. Influence of astigmatism on the generation of radial polarized non-diffracting beams[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, 52(1): 012602.  
林惠川, 蒲继雄. 像散对径向偏振无衍射光束产生的影响[J]. *激光与光电子学进展*, 2015, 52(1): 012602.