

带电平面的反射与透射研究——菲涅耳公式的修正

张自嘉^{1,2} 潘琦^{1,2} 陈海秀^{1,2} 刘卿卿^{1,2} 严飞^{1,2}

¹南京信息工程大学信息与控制学院, 江苏 南京 210044

²江苏省大气环境与装备技术协同创新中心, 江苏 南京 210044

摘要 根据一般条件下电磁场的边界条件,研究了两种介质分界面存在面电荷分布时的反射与透射,证明了这一条件下反射定律和折射定律仍然成立,推导得到存在面电荷分布时入射波平行分量和垂直分量的振幅反射系数和振幅透射系数,即修正的菲涅耳公式。由于不同界面的导电特性不同,两种介质界面的面电荷分布会影响界面的面电导率,修正后的菲涅耳公式与面电导率和自由空间阻抗有关。计算结果表明当面电荷密度或界面特性使面电导率发生较大变化时,振幅反射系数和振幅透射系数及反射率和透射率发生变化。

关键词 物理光学; 电磁波; 菲涅耳公式; 反射与透射; 带电平面

中图分类号 O435 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201636.0626001

Reflection and Transmission on Charged Surface - Modified Fresnel Formulas

Zhang Zijia^{1,2} Pan Qi^{1,2} Chen Haixiu^{1,2} Liu Qingqing^{1,2} Yan Fei^{1,2}

¹*School of Information and Control, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing, Jiangsu 210044, China*

²*Jiangsu Collaborative Innovation Center on Atmospheric Environment and Equipment Technology, Nanjing, Jiangsu 210044, China*

Abstract According to the general boundary conditions of the electromagnetic field, the reflection and transmission laws of electromagnetic waves on the charged interface of two different media are studied. It is proved that the reflection and the refraction laws for the charged interface are the same as that for the uncharged interface. The amplitude reflection coefficient and the amplitude transmission coefficient are derived for the reflection and transmission of the parallel and vertical components of the incident waves on the charged surface, *i. e.* modified Fresnel formulas. Due to the different interface conduction characteristics, surface charge distribution on the interface of two different media will affect the surface conductivity of the interface, and the modified Fresnel formulas are related to the surface conductivity and electromagnetic impedance of free space. The calculation results show that the amplitude reflection coefficient and the amplitude transmission coefficient as well as the reflectance and the transmittance will change when the surface conductivity varies with the surface charge density or the interface characteristics.

Key words physical optics; electromagnetic wave; Fresnel formula; reflection and transmission; charged surface

OCIS codes 260.2030; 240.3695; 080.1753; 290.5850

1 引 言

光或电磁波通过两种均匀介质的界面时发生反射、折射或透射,传播方向遵从反射定律和折射定律,光的振幅、振动方向及强度分布可由菲涅耳公式描述^[1-2]。菲涅耳公式于 19 世纪 80 年代由法国物理学家推导

收稿日期: 2015-12-03; **收到修改稿日期:** 2016-02-01

基金项目: 国家自然科学基金(61172029, 51206082, 61302189)

作者简介: 张自嘉(1964—),男,博士,教授,主要从事大气探测、测控技术、气象仪器等方面的研究。

E-mail: zhizijia@126.com

得到,很好地解释了光在反射、折射时的偏振现象和双折射现象,但菲涅耳公式只适用于两种均匀介质的界面是中性,即不带电荷的情况,近年来的研究也主要是对中性界面条件下非均匀介质的菲涅耳公式的改进及应用^[3-4]。当界面存在面电荷分布时,面电荷会对光或电磁波的传播行为,如反射和透射规律等产生影响,但目前尚未见到全面、详细的研究。两种介质的界面存在面电荷分布是物理上可能存在的现象,在研究带电粒子对电磁波的散射时^[5-16],也需要研究带电平面及球面对电磁波散射的影响,特别是对较大带电粒子,可将球面在局部上近似看作平面^[15-18],以简化问题的处理,因此需要进一步研究界面存在面电荷分布时的电磁波反射与透射,从而全面认识电磁规律及其应用。

根据电磁场规律,界面上面电荷的存在改变了麦克斯韦方程的电磁场边界条件。两种介质的交界面为平面时,电磁波或光的反射与透射符合菲涅耳公式。当界面存在电荷时,需要对边界条件重新求解,以得到普遍条件下的菲涅耳公式。根据一般的电磁场边界条件,研究了两种介质分界面存在面电荷分布时的反射与透射,得到了特定条件下的菲涅耳公式,即入射波的平行分量与垂直分量在存在面电荷分布时的振幅反射系数与振幅透射系数,并对存在面电荷分布时的反射定律和折射定律进行了证明。

介质界面的面电荷分布会根据不同的界面导电特性影响界面的面电导率,因此以面电导率为参量,当面电荷密度及界面特性使面电导率发生较大变化时,会对反射和透射产生影响。结果表明,界面带有面电荷分布时,反射定律和折射定律仍然成立,即折射定律和反射定律与中性时相同,差别在于反射光和透射光的振幅、振动方向及强度不同,与界面上因带电而增加的面电导率有关,面电导率还会影响界面发生反射时的布儒斯特角。

2 边界条件与反射定律和折射定律

设介质 1 和介质 2 的交界面为无限大平面,单色平面波从介质 1 入射到两种介质的界面上,如图 1 所示。两种介质的相对介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 ,折射率为 n_1 和 n_2 ,相对磁导率为 μ_1 和 μ_2 ,在界面上,边界条件可以写为^[1-2,17-18]

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \boldsymbol{\alpha}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \sigma \mathbf{E}_{2t}, \quad (3)$$

式中 \mathbf{n} 为界面的法线方向,垂直于平面向上, \mathbf{E}_1 、 \mathbf{E}_2 和 \mathbf{H}_1 、 \mathbf{H}_2 分别为介质 1 和 2 中的电场强度和磁场强度, \mathbf{E}_{2t} 为介质 2 中电场沿表面的切向分量, $\boldsymbol{\alpha}$ 为交界面的电流密度, σ 为界面的面电导率,该电导率实际上是界面存在面电荷分布时界面电导率的增加值。电导率与介质中存在的自由电荷有关,无论是导体还是电介质带有自由电荷时,电导率均会增加,(3)式中的电导率是带面电荷后增加的电导率,不包含原来中性时所带自由电荷而具有的电导率^[14]。对于金属界面,由于原有自由电荷密度较大,因此界面带电荷后对电导率的影响相对较小,而对纯净水之类的介质,原来并不导电,界面带电荷后其电导率相对变化较大。

如图 1 所示, \mathbf{k}_1 、 \mathbf{k}'_1 、 \mathbf{k}_2 和 ω_1 、 ω'_1 、 ω_2 分别为入射波、反射波和透射波的波矢量和角频率, θ_1 、 θ'_1 和 θ_2 分别为入射角、反射角和折射角,三个波的方程可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{1r} = \mathbf{E}_1 \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)] \\ \mathbf{E}'_{1r} = \mathbf{E}'_1 \exp[i(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r} - \omega'_1 t)] \\ \mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_2 \exp[i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)] \end{cases}, \quad (4)$$

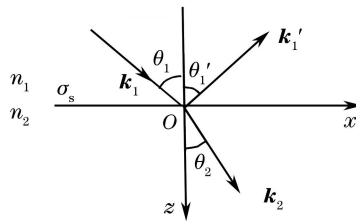


图 1 平面波入射到带电界面上

Fig. 1 Plane wave incidence on charged planar interface

式中 \mathbf{r} 为位置矢量, t 为时间。

由(1)式可得

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2, \quad (5)$$

将 \mathbf{E}_1 、 \mathbf{E}'_1 和 \mathbf{E}_2 的表达式代入后可得

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)] + \mathbf{n} \times \mathbf{E}'_1 \exp[i(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r} - \omega'_1 t)] = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 \exp[i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)], \quad (6)$$

(6)式对任意时刻 t 都成立, 要求 $\omega_1 = \omega'_1 = \omega_2$, 即三个波的频率相同。

由于对界面上的任意位置矢量 \mathbf{r} 都成立, 要求 $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}$ 或写为

$$\begin{cases} (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1) \cdot \mathbf{r} = 0 \\ (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} = 0 \end{cases}, \quad (7)$$

(7)式对界面上任意位置矢量 \mathbf{r} 都成立, 因此 \mathbf{k}_1 、 \mathbf{k}'_1 和 \mathbf{k}_2 共面, 均在入射面内, 并且有 $\mathbf{k}_1 \sin \theta_1 = \mathbf{k}'_1 \sin \theta'_1$, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}'_1 = \omega_1/c_1$, 其中 c_1 为介质 1 中光或电磁波的传播速度, 因此 $\theta_1 = \theta'_1$ 。另外 $\mathbf{k}_1 \sin \theta_1 = \mathbf{k}_2 \sin \theta_2$, $\mathbf{k}_2 = \omega_1/c_2$, c_2 为介质 2 中光或电磁波的传播速度, 可得 $\sin \theta_1/c_1 = \sin \theta_2/c_2$, 即 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, 这即为折射定律。因此在界面带电的情况下, 折射定律的几个关系均与中性时相同。

3 s 波的振幅反射系数与透射系数

振幅反射系数与振幅透射系数反映了反射波与透射波振幅与入射波振幅的关系。根据边界条件(1)~(3)式及折射定律, 由于入射波电场矢量垂直和平行于入射面时, 反射及透射系数不同, 因此分别考虑入射波电场矢量垂直和平行于入射面的两种情况。首先考虑电矢量垂直于入射平面的情况, 即 s 波的反射和透射, 如图 2 所示, 根据边界条件可得

$$E_{1s} + E'_{1s} = E_{2s}, \quad (8)$$

$$H_{1p} \cos \theta_1 - H'_{1p} \cos \theta_1 = H_{2p} \cos \theta_2 + \sigma E_{2s}, \quad (9)$$

求解(8)、(9)式, 取 $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376.73 \Omega$, Z_0 为自由空间阻抗或真空特征阻抗^[19], 可得振幅透射系数和振幅反射系数为

$$t_s = \frac{E_{2s}}{E_{1s}} = \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_1}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_1 + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_2 + Z_0 \sigma_s}, \quad (10)$$

$$r_s = \frac{E'_{1s}}{E_{1s}} = \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_1 - \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_2 - Z_0 \sigma_s}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_1 + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_2 + Z_0 \sigma_s}, \quad (11)$$

式中 σ_s 为界面带有面电荷后的面电导率。如果介质 1、2 均为无磁性材料, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, 则振幅透射系数和振幅反射系数为

$$t_s = \frac{E_{2s}}{E_{1s}} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) + \frac{Z_0 \sigma_s}{n_2} \sin \theta_1}, \quad (12)$$

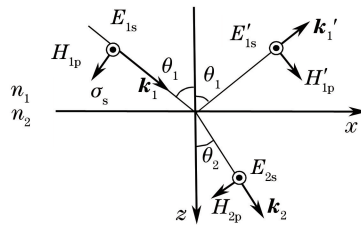


图 2 带电界面上 s 波的反射与透射

Fig. 2 Reflection and transmission of the s wave on the charged planar interface

$$r_s = \frac{E'_{1s}}{E_{1s}} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{Z_0 \sigma_s}{n_2} \sin \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) + \frac{Z_0 \sigma_s}{n_2} \sin \theta_1}, \quad (13)$$

(10)~(13)式即为 s 波在两种介质界面带电条件下反射与透射的非涅耳公式,与一般情况下非涅耳公式的不同之处在于式中均含有与 $Z_0 \sigma_s$ 有关的项,即与界面带有面电荷后的面电导率 σ_s 有关。由(3)式可知,对 s 波应有 $t_s = 1 + r_s$,上述公式符合这一条件。

4 p 波的振幅反射系数与透射系数

考虑 p 波的反射和透射,p 波的电矢量在入射平面内,如图 3 所示。根据边界条件可得

$$E_{1p} \cos \theta_1 - E'_{1p} \cos \theta_1 = E_{2p} \cos \theta_2, \quad (14)$$

$$H_{1s} + H'_{1s} = H_{2s} + \sigma E_{2p} \cos \theta_2. \quad (15)$$

同理,求解(14)、(15)式可得 p 波振幅透射系数和振幅反射系数为

$$t_p = \frac{E_{2p}}{E_{1p}} = \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_2}{\frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_1 + \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_2 + Z_0 \sigma_s \cos \theta_1 \cos \theta_2}, \quad (16)$$

$$r_p = \frac{E'_{1p}}{E_{1p}} = \frac{\frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_1 - \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_2 + Z_0 \sigma_s \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_1 + \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_2 + Z_0 \sigma_s \cos \theta_1 \cos \theta_2}, \quad (17)$$

对无磁性材料, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$,则振幅透射系数和振幅反射系数为

$$t_p = \frac{E_{2p}}{E_{1p}} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{Z_0 \sigma_s}{n_2} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2}, \quad (18)$$

$$r_p = \frac{E'_{1p}}{E_{1p}} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2) + \frac{Z_0 \sigma_s}{n_2} \frac{\sin \theta_1}{1 - \tan^2 \theta_1 \tan^2 \theta_2}}{\tan(\theta_1 + \theta_2) + \frac{Z_0 \sigma_s}{n_2} \frac{\sin \theta_1}{1 - \tan^2 \theta_1 \tan^2 \theta_2}}. \quad (19)$$

同理,(16)~(19)式是 p 波在两种介质界面带电条件下反射与透射的非涅耳公式,均与 $Z \sigma_s$ 有关,即与界面带有面电荷后的面电导率 σ_s 有关。

5 反射率与透射率

透射系数和反射系数反映了透射、反射波振幅与入射波振幅的关系,反射率和透射率反映了反射和透射波的能量与入射波能量的关系。平面波的强度 $I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2$,其中 ϵ 和 μ 分别为平面波存在空间的介电常

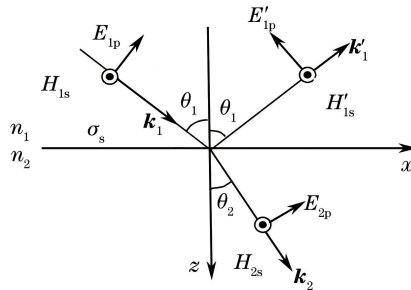


图 3 带电界面上 p 波的反射与透射

Fig. 3 Reflection and transmission of the p wave on the charged planar interface

数和磁导率, E 为平面电磁波的振幅。类似于文献[1-2]的方法, 根据以上结果, 可得 s 波的反射率和透射率分别为

$$R_s = \left| \frac{E'_{1s}}{E_{1s}} \right|^2 = \left| \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{Z_0 \sigma_s}{n_2} \sin \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) + \frac{Z_0 \sigma_s}{n_2} \sin \theta_1} \right|^2, \quad (20)$$

$$T_s = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} \left| \frac{E_{2s}}{E_{1s}} \right|^2 = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} \left| \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) + \frac{Z_0 \sigma_s}{n_2} \sin \theta_1} \right|^2. \quad (21)$$

p 波的反射率和透射率分别为

$$R_p = \left| \frac{E'_{1p}}{E_{1p}} \right|^2 = \left| \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2) + \frac{Z_0 \sigma_s}{n_2} \frac{\sin \theta_1}{1 - \tan^2 \theta_1 \tan^2 \theta_2}}{\tan(\theta_1 + \theta_2) + \frac{Z_0 \sigma_s}{n_2} \frac{\sin \theta_1}{1 - \tan^2 \theta_1 \tan^2 \theta_2}} \right|^2, \quad (22)$$

$$T_p = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} \left| \frac{E_{2p}}{E_{1p}} \right|^2 = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} \left| \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{Z_0 \sigma_s}{n_2} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2} \right|^2. \quad (23)$$

(20)~(23)式与普通条件下的透射率和反射率公式相比多出了与 $Z_0 \sigma_s$ 有关的项。

6 结果计算

根据理论分析, 可对上述结果进行计算, 并比较 s 波和 p 波在界面带电前后的反射与透射规律。取 $n_1 = n_2 = 1.33$, 可得 s 波和 p 波的振幅反射与透射系数如图 4 所示, 而不同面电导率时的反射率和透射率如图 5 所示, 图中 σ_s 的单位为西门子(S)。

界面存在面电荷分布使面电导率发生变化时, 振幅反射系数和振幅透射系数均会发生改变。图 4 中

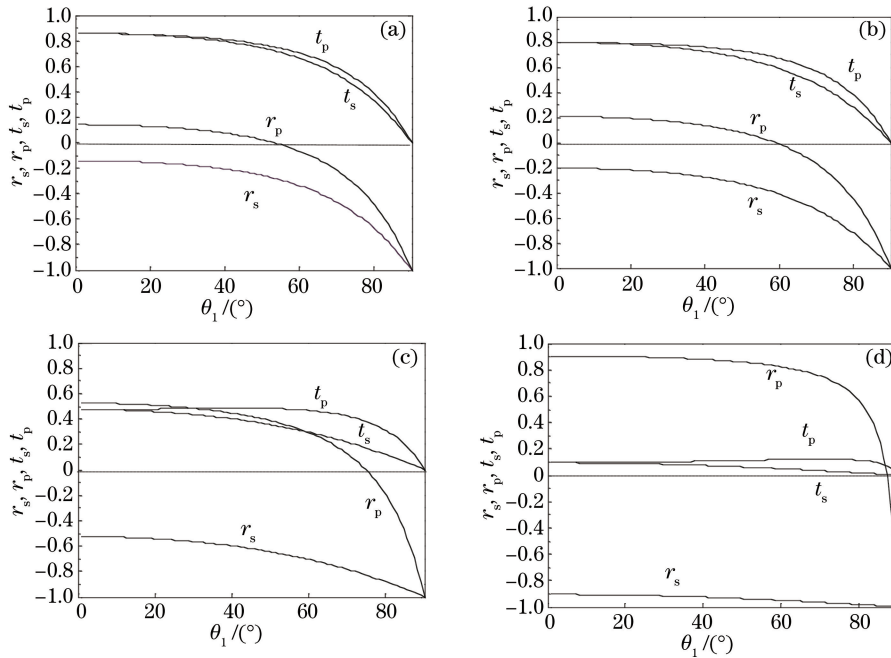


图 4 s 波和 p 波的振幅透射系数和振幅反射系数。(a) $\sigma_s = 0$; (b) $\sigma_s = 0.0005$; (c) $\sigma_s = 0.005$; (d) $\sigma_s = 0.05$

Fig. 4 Amplitude reflection and transmission coefficients of s and p waves on the charged planar interface.

(a) $\sigma_s = 0$; (b) $\sigma_s = 0.0005$; (c) $\sigma_s = 0.005$; (d) $\sigma_s = 0.05$

$\sigma_s=0$ 为不带电荷时的振幅反射系数与振幅透射系数,可以看出,面电导率增加时, t_s 、 t_p 减小, r_s 、 r_p 的绝对值增加,负值表示与入射波相比相位相反,即存在相位跃变。

反射率与透射率随面电导率增加的变化如图5所示,图中 $\sigma_s=0$ 为中性时的情况,与通常的公式计算结果相同, $\sigma_s \neq 0$ 时,可以看出,透射率随着面电导率的增加而减小,反射率在小入射角时增加。p波反射率为零时的角度,即布儒斯特角,也随着面电导率的增加而变大。因此可以通过改变面电导率来改变界面的反射率、透射率和布儒斯特角。

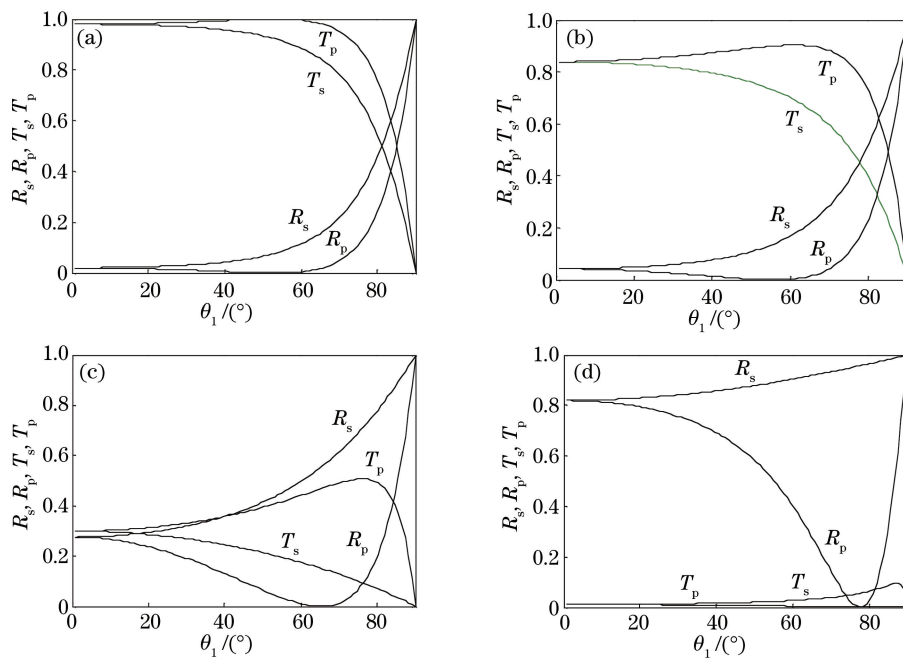


图5 s波和p波的反射率和透射率。(a) $\sigma_s=0$; (b) $\sigma_s=0.0005$; (c) $\sigma_s=0.005$; (d) $\sigma_s=0.05$

Fig. 5 Reflectance and transmittance of s and p waves on the charged planar interface.

(a) $\sigma_s=0$; (b) $\sigma_s=0.0005$; (c) $\sigma_s=0.005$; (d) $\sigma_s=0.05$

7 分析与讨论

光或电磁波在两种介质界面上的反射与透射满足菲涅耳公式,但菲涅耳公式只适用于两种介质的界面没有净电荷分布的情况。界面上存在面电荷分布时,相应的边界条件不同于中性时的情况。根据带有面电荷时的边界条件,研究了两种介质界面存在面电荷分布时的反射与透射,得到了一般条件下的菲涅耳公式,即存在面电荷分布时入射波平行分量与垂直分量的反射率与透射率公式。面电荷会使面电导率发生变化,一般条件下的菲涅耳公式与界面电导率和真空阻抗系数有关。对给出的理论结果进行计算,结果表明面电荷分布使面电导率发生变化时,s波和p波的振幅反射系数和振幅透射系数以及对应的反射率与透射率均发生了改变,面电导率还会影响界面发生反射时的布儒斯特角。

界面带有面电荷分布时,反射定律和折射定律仍然成立,差别在于反射光和折射光强度受界面电荷分布的影响,可以通过控制界面电荷分布改变光或电磁波的反射率或透射率,也可以对界面的布儒斯特角进行控制。应用中存在的问题可能在于如何选取介质以使相应的界面携带并保持一定的电荷密度,介质要求中性时不导电,携带电荷后具有一定的导电能力。

参 考 文 献

- 1 Hecht E. Optics (4th edition)[M]. New Jersey: Addison Wesley, 2001.
 - 2 Liang Quanting. Physical optics (3rd edition)[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2012.
- 梁铨廷. 物理光学(第3版)[M]. 北京: 电子工业出版社, 2008.

- 3 Wen Jing, Zuo Chunying. Fresnel formula of plane wave in anisotropic crystals[J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(7): 2000-2005.
温 静, 左春英. 平面波在各向异性晶体中的菲涅耳公式[J]. 光学学报, 2009, 29(7): 2000-2005.
- 4 Zhao Jinlong, Li Lin, Cui Zhengjun, *et al.*. Calculation of flux density distribution on focal plane in linear Fresnel reflector[J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(12): 1208001.
赵金龙, 李 林, 崔正军, 等. 线性菲涅耳反射聚光器聚焦光斑能流密度分布的计算[J]. 光学学报, 2012, 32(12): 1208001.
- 5 Bohren C F, Hunt A J. Scattering of electromagnetic waves by a charged sphere[J]. Canadian Journal of Physics, 2011, 55(21): 1930-1935.
- 6 Klacka J, Kocifa M. Scattering of electromagnetic waves by charged spheres and some physical consequences[J]. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2007, 106: 170-183.
- 7 Eremin J A, Orlov N V, Rozenberg V I. Electromagnetic scattering from single electrified raindrops[J]. Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, 1995, 57(2): 141-149.
- 8 Heifetz A, Chien H T, Liao S, *et al.*. Millimeter-wave scattering from neutral and charged water droplets[J]. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2010, 111(17): 2550-2557.
- 9 Xie L, Li X C, Zheng X J. Attenuation of an electromagnetic wave by charged dust particles in a sandstorm[J]. Applied Optics, 2010, 49(35): 6756-6761.
- 10 Li X C, Xie L, Zheng X J. The comparison between the Mie theory and the Rayleigh approximation to calculate the EM scattering by partially charged sand[J]. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2012, 113(3): 251-258.
- 11 Kocifaj M, Klacka J. Scattering of electromagnetic waves by charged spheres: Near-field external intensity distribution [J]. Optics Letters, 2012, 37(2): 265-267.
- 12 Zhang Zijia, Pan Qi, Chen Haixiu. On the Rayleigh scattering by charged particle[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(5): 0529002.
张自嘉, 潘 琦, 陈海秀. 带电粒子的瑞利散射研究[J]. 光学学报, 2015, 35(5): 0529002.
- 13 何琴淑, 周又和, 郑晓静. 带电沙粒的散射场及其对电磁波传播的影响[J]. 中国科学 G 辑, 2005, 35(3): 308-317.
- 14 Zhang Zijia, Pan Qi, Chen Haixiu. Mie scattering of electromagnetic waves by charged sphere particle [J]. Chinese Journal of Radio Science, 2015, 30(3): 429-436.
张自嘉, 潘 琦, 陈海秀. 带电粒子的 Mie 散射研究[J]. 电波科学学报, 2015, 30(3): 429-436.
- 15 Dave J V. Scattering of visible light by large water spheres[J]. Applied Optics, 1969, 8(1): 155-164.
- 16 Wang R T, Van de Hulst H C. Rainbows: Mie computations and the Airy approximation[J]. Applied Optics, 1991, 30(1): 106-117.
- 17 Van de Hulst H C. Light scattering by small particles[M]. New York: Wiley, 1957.
- 18 Bohren C F, Huffman D D. Absorption and scattering of light by small particles[M]. New York: Wiley, 1998.
- 19 Clemmow P C. An introduction to electromagnetic theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.