

正色散光学微腔中光场演化过程研究

徐 昕¹ 胡晓鸿¹ 冯 野¹ 刘元山^{1*} 王屹山¹ 魏儒义²

¹中国科学院西安光学精密机械研究所瞬态光学与光子技术国家重点实验室, 陕西 西安 710119

²中国科学院西安光学精密机械研究所光谱成像技术重点实验室, 陕西 西安 710119

摘要 以微腔内光场演化的理论模型 Lugiato-Lefever 方程为基础, 分别讨论了连续光(CW)抽运和连续光与脉冲光混合抽运两种情况下, 正色散微腔中光场的演化过程, 以及各参数对光场分布的影响。理论分析结果表明, 在 CW 抽运的情况下, 微腔中有稳定的暗孤子存在, 并且随着色散系数的增加, 暗孤子的脉宽会增加, 而失谐参量的增加会使暗孤子的形状发生变化。采用混合抽运可以在腔内形成脉冲形式的光场分布, 弥补了单一 CW 抽运时在特定参数的正色散腔内难以产生亮孤子脉冲的不足。抽运脉冲的振幅过高, 会导致腔内的脉冲发生分裂, 微腔失谐参量的增加会导致脉冲展宽以及脉冲能量降低。理论分析结果对实现高质量的 Kerr 光频梳具有重要意义, 能够帮助选择合适的微腔及抽运参数。

关键词 非线性光学; 微腔; Lugiato-Lefever 方程; 光场演化

中图分类号 O438 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201636.0619001

Spatiotemporal Evolution of the Light Field Inside the Microresonator with Normal Dispersion

Xu Xin¹ Hu Xiaohong¹ Feng Ye¹ Liu Yuanshan¹ Wang Yishan¹ Wei Ruyi²

¹State Key Laboratory of Transient Optics and Photonics, Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Xi'an, Shaanxi 710119, China

²Key Laboratory of Spectral Imaging Technology, Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Xi'an, Shaanxi 710119, China

Abstract Based on the Lugiato-Lefever equation, the spatiotemporal evolutions in microresonator are discussed respectively, which is pumped by the continuous wave (CW) light as well as the combination of CW light and periodical pulse train simultaneously, and the effect of each parameter on light field is studied. Simulation results indicate that the dark soliton can exist in the microresonator with CW pumped. The width of the dark soliton pulse increases with the dispersion coefficient. The shape of the dark soliton pulse is varied when the frequency detuning is increased. Meanwhile, in the normal dispersion regime, the pulses can form in the microresonator by the use of synthetical pumping manner. The drawback is compensated that the bright soliton pulse is difficult to be generated in the microresonator for single CW pumped of certain parameters configuration. Moreover, the high amplitude of the pump pulses leads to the pulse split, the pulse stretching and the loss of the pulse occur when the frequency detuning of the microresonator rises. Theoretical analysis results are significant for high-quality Kerr optical frequency comb and their practical applications, and they are helpful for selecting the proper microresonator and pump parameters.

Key words nonlinear optics; microresonator; Lugiato-Lefever equation; light field evolution

OCIS codes 190.4360; 190.4390; 190.4410

收稿日期: 2016-01-20; 收到修改稿日期: 2016-02-24

基金项目: 国家重大科学仪器设备专项(2011YQ120022)、国家自然科学基金(61275164, 11573058)

作者简介: 徐 昕(1986—), 女, 博士研究生, 主要从事超快光纤技术及应用方面的研究。E-mail: xuxin_1007@163.com

导师简介: 王屹山(1970—), 男, 博士, 研究员, 主要从事超快光纤技术及应用方面的研究。E-mail: yshwang@opt.ac.cn

* 通信联系人。E-mail: liuyuanshan@opt.ac.cn

1 引 言

光学频率梳因其超高的频率、稳定的相位以及超低的相位噪声,广泛应用于精确频率测量、绝对距离测量、任意波形产生、光钟等领域^[1-4]。目前为止,这些实际应用中主要采用的是基于锁模激光器的光频梳^[5-6]。随着光频梳应用领域的拓展,尤其在天文光谱仪校准及类地行星探测等领域需要使用高重复频率(小于10 GHz)的光频梳,传统的基于锁模激光器的光频梳因受到腔长的限制,重复频率一般为几十到几百兆赫兹^[7-8]。因此,为提高重复频率,一般采用光纤和空间结构相结合的方法来搭建振荡器,这种方法最多可以将光频梳的重复频率提高到吉赫兹量级^[9]。但是对于更高重复频率的光频梳,通过减小振荡器腔长的方法已经无法实现。因此,一种新型的光频梳——基于光学微腔的 Kerr 光频梳应运而生^[10-11]。

所谓的 Kerr 光频梳就是在超高品质因数的光学微腔中利用级联的四波混频效应产生一系列等间距的频率成分,即耦合入光学微腔的抽运光场,当其强度(功率)达到一定阈值时,在参量增益作用下,其光子能量能够转移到邻近的模式上。新产生的频率成分与抽运光场模式(纵模)之间的频率间隔由微腔的自由光谱范围决定;在满足相位匹配条件的情况下,模式之间能够相互作用,发生级联的四波混频过程,使腔内产生更多模式。这一过程可以产生非常多的频率成分,最终在光谱上形成 Kerr 光频梳。该光频梳具有高频率间隔、体积小、结构简单、损耗低、易实现光学集成等优点,可应用于天文光谱仪的校准^[12]和相干通讯^[13]等领域。

本文以光场在微腔内演化的模型 Lugiato-Lefever 方程为基础,理论分析了在连续光(CW)抽运和混合抽运 2 种情况下,正色散光学微腔中光场的演化过程以及各参数对腔内光场分布的影响。该分析结果对于实验中微腔参数和抽运参数的选取有重要意义。

2 理论模型

在连续光抽运条件下,Kerr 光频梳产生的实验结构如图 1 所示^[14]。窄线宽的连续光激光器输出后经过掺铒的光纤放大器(EDFA)放大,由拉锥光纤将光耦合到微腔中,微腔中的光场仍然通过拉锥光纤耦合输出。由于微腔产生的梳状光谱频率间隔大部分都是几十到几百吉赫兹,甚至可达太赫兹量级,所以微腔产生的梳状光谱可以用高分辨率的光谱分析仪(OSA)直接观察,那么能够分辨的最小频率间隔远小于微腔光频梳的频率间隔。频梳的频率间隔即为微腔的自由光谱范围(FSR),其定义为光在腔内传播一周所用时间的倒数,即 $F_{SR} = 1/t_R$,其中 t_R 为光在微腔内循环一周的时间。

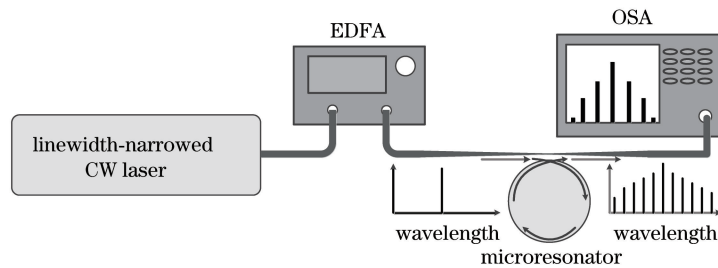


图 1 连续光抽运时 Kerr 光频梳产生的实验结构

Fig. 1 Experimental setup of Kerr frequency comb generation in the case of CW pumping

假定光在微腔中传播具有周期性的边界条件^[15],为描述腔内光场时间和空间上的演化,引入 Lugiato-Lefever 方程,其归一化形式为^[16-17]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -(1 + i\alpha)\Psi + i|\Psi|^2\Psi - i\frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + F, \quad (1)$$

式中 $\Psi(\theta, \tau)$ 为腔内总光场的复数表示, $\theta \in [-\pi, \pi]$ 为圆形微腔的方位角, $\tau = t/2\tau_{ph}$ 为无量纲的时间, $\tau_{ph} = 1/\Delta\omega_{tot}$ 为腔内光子寿命, $\Delta\omega_{tot} = \omega_0/Q_{tot}$ 为模式的线宽, Q_{tot} 为微腔总的品质因子, $\alpha = -2(\Omega - \omega_0)/\Delta\omega_{tot}$ 为抽运光角频率 Ω 和腔内谐振角频率 ω_0 之间的频率失谐参数, β 为微腔的二阶色散系数,抽运的连续光功率正比于抽运参量 F^2 。(1)式右边第一项表示微腔内光场的损耗。

目前有两种求解 Lugiato-Lefever 方程的方式:1)设 $\partial \Psi(\tau, \theta)/\partial \tau = 0$,使用多维 Newton-Rhapson 方法^[18]求解,可以得到稳态时腔内的光场分布,但该方法不能对腔内光场演化的过程进行研究;2)分步傅里叶

法^[19],其可以模拟腔内光场的演化过程以及最终的稳定状态。因此,本文采用分步傅里叶法求解 Lugiato-Lefever 方程。

3 连续光抽运时正色散微腔内光场演化

微腔内的初始光场是由调制不稳定性决定的^[20]。在实际应用中,光学微腔工作的理想状态是在腔内产生亮孤子,即腔内有稳定分布的高斯形式的脉冲光场。因此,假设初始光场为高斯分布的脉冲,如 $\Psi_0 = 0.5 + 0.5 \exp[-(\theta/0.5)^2]$,微腔的失谐参量为 $\alpha = 2.5$,色散值为 $\beta = 0.012$,抽运参数为 $F = 1$ 。腔内光场分布随时间的变化如图 2(a)所示,高斯脉冲在腔内先增强,后逐渐衰减为直流。图 2(b)中的黑线和红线分别表示图 2(a)中 $\tau = 1$ 和 $\tau = 20$ 时刻的光场分布,光场最终的稳定分布是直流形式。图 2(c)是在图 2(a)的基础上,增加抽运参数 F 至 2.7,结果只是增大了最终直流光场的大小,腔内并没有形成脉冲形式的光场。因此,在参数为 $\alpha = 2.5, \beta = 0.012$ 的情况下,腔内不能存在稳定的亮孤子。

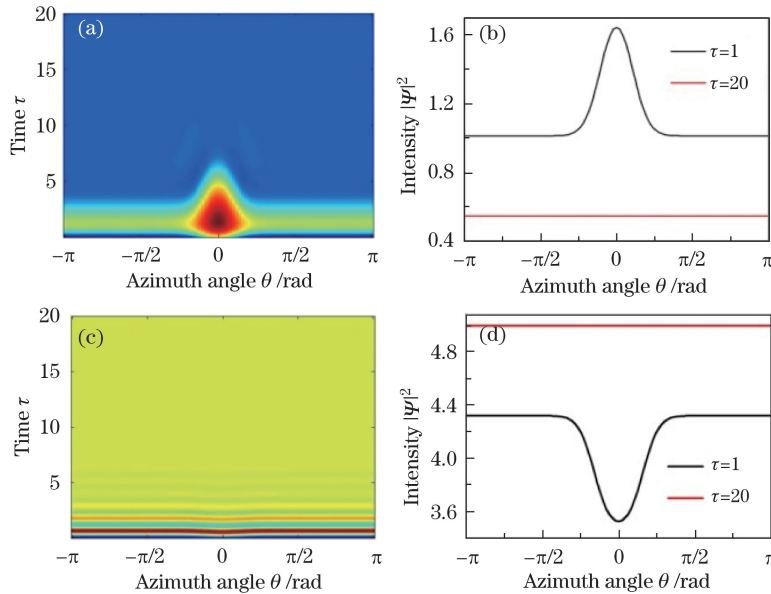


图 2 高斯脉冲在正色散微腔中演化。(a) $F = 1$; (b) $F = 1, \tau = 1$ 和 $\tau = 20$ 时刻腔内的光场; (c) $F = 2.7$; (d) $F = 2.7, \tau = 1$ 和 $\tau = 20$ 时刻腔内的光场

Fig. 2 Evolution of the Gaussian pulse in the microresonator with normal dispersion. (a) $F = 1$;

(b) intensity profiles at $F = 1, \tau = 1$ and $\tau = 20$; (c) $F = 2.7$; (d) intensity profiles at $F = 2.7, \tau = 1$ and $\tau = 20$

暗孤子同样是微腔内可能存在的光场分布形式,所谓暗孤子是指脉冲强度低于背景强度的光场分布,它的产生和腔内光场的初始形式有关,只有当腔内光场的非线性作用与损耗之间达到平衡时,暗孤子才能稳定存在。因此,假设腔内初始的光场为负高斯脉冲,讨论其在腔内的演化过程中是否存在稳定暗孤子。在图 2 的基础上,假设腔内初始的脉冲为 $\Psi_0 = 1.5 - \exp[-(\theta/0.9)^2]$, $\alpha = 2.5, \beta = 0.0125$,结果如图 3(a)所示,脉冲宽度不断窄化,最终形成稳定的暗孤子。图 3(b)的光谱也表现为频率间隔为 FSR 的 Kerr 光频梳,其中横坐标中 l 为模式数, l_0 为腔内的谐振模式。

改变各参数的大小,讨论微腔参数和抽运参数对正色散微腔中暗孤子的影响。腔内初始光场仍然选择 $\Psi_0 = 1.5 - 0.5 \exp[-(\theta/0.9)^2]$, $\alpha = 2.5$,改变 β ,最终腔内稳定存在的暗孤子如图 4 所示。可见,在一定范围内变化色散值,不会改变腔内最终的稳定光场分布,腔内光场仍然是以暗孤子的形式存在;随着 β 的增大,暗孤子的脉冲宽度增加,而其最低的功率值基本没有变化。图 5 为 $\beta = 0.125, \alpha$ 变化的结果。结果显示, α 改变导致腔内最终稳定光场的分布发生变化,光场分布不再是一个反向的高斯脉冲的形状,其底部变平坦;随着 α 的增大,底部平坦的区域也增大。此外,在微腔参数保持不变的情况下,讨论 F 对腔内光场的影响,结果如图 6 所示。 F 过大或过小都会导致腔内的光场最终演化成直流分布, F 仅在适当的范围内才能维持暗孤子的存在。因而,抽运功率的选择对 Kerr 光频梳的产生十分重要。

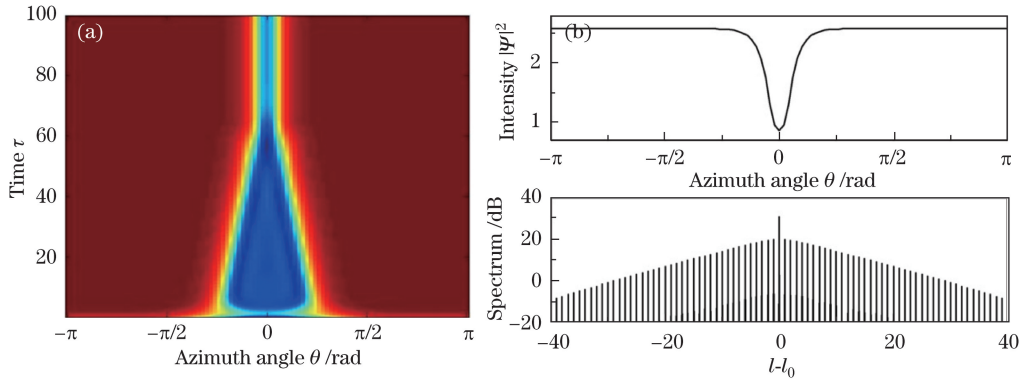


图 3 暗孤子在正色散微腔中的演化。(a) $F=1.6$; (b) 微腔中光场分布及其光谱
 Fig. 3 Evolution of the dark soliton in the microresonator with normal dispersion.
 (a) $F=1.6$; (b) intensity profile in the microresonator and spectrum

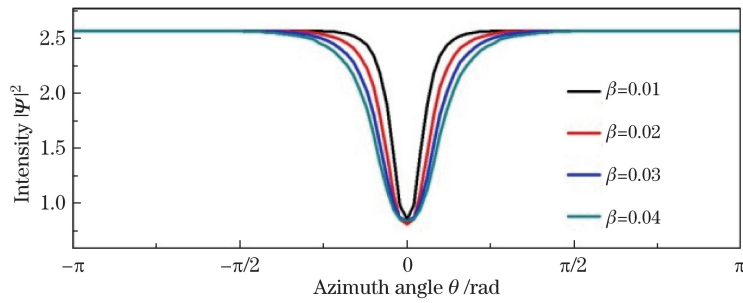


图 4 $\alpha=2.5, F=1.6$ 时 β 对微腔内暗孤子的影响
 Fig. 4 Influence of β on the dark soliton in the microresonator when $\alpha=2.5, F=1.6$

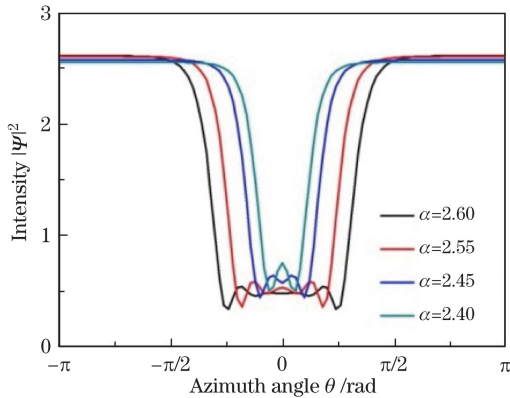


图 5 $\beta=0.0125, F=1.6$ 时 α 对腔内光场分布的影响
 Fig. 5 Influence of α on field profile in microresonator
 when $\beta=0.0125, F=1.6$

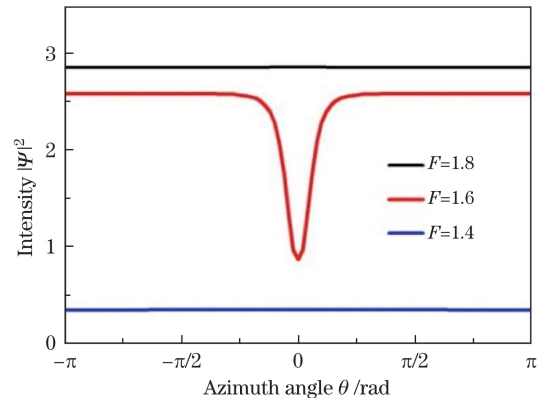


图 6 $\alpha=2.5, \beta=0.0125$ 时 F 对腔内光场分布的影响
 Fig. 6 Influence of F on field profile in microresonator
 when $\alpha=2.5, \beta=0.0125$

4 混合抽运下正色散微腔内光场演化

第 3 节研究了高斯脉冲在连续光抽运的作用下,在正色散微腔中的演化过程。在 $\alpha=2.5, \beta=0.012$ 的情况下,高斯光场逐渐衰减为直流形式的光场分布,如图 2 所示。对于特定参数的正色散微腔,仅由连续光抽运难以在腔内产生亮孤子脉冲。因此,为了在正色散的微腔中产生高斯形式的光场分布,采用连续光与周期性脉冲混合抽运的方式,并建立微腔内光场演化的模型,分析各参数对光场分布的影响。

4.1 理论模型

连续光和周期性的脉冲光同时对微腔抽运的实验结构如图 7 所示。连续光和脉冲光通过耦合器同时输入到拉锥光纤中,并选取拉锥光纤与微腔间合适的距离,将连续光和脉冲光耦合进入微腔中。

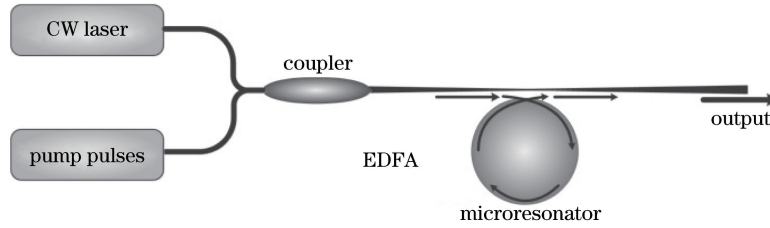


图 7 混合抽运的实验结构图

Fig. 7 Experimental setup of synthetical pumping manner

周期性的脉冲主要是由锁模激光器产生,包括主动锁模激光器^[21]和被动锁模激光器^[22],输出脉冲频率多为兆赫兹到吉赫兹量级,一般小于微腔的FSR。因此,假设FSR是抽运脉冲重复频率 f 的整数倍,即 $f = R_{FS}/m$,其中 m 为任意整数。这样,微腔内的光场循环 m 圈之后,就会产生一个抽运脉冲输入,叠加在腔内原有的光场上。而在第一个抽运脉冲耦合进入微腔至下一个抽运脉冲进入之前,腔内光场的演化可以由Lugiato-Lefever方程描述。以此模型为基础,采用分步傅里叶法求解,讨论正色散情况下微腔内光场的演化。

4.2 光场演化

设定与图2(a)中相同的高斯型脉冲、微腔参数以及抽运参数,在连续光抽运的基础上加入重复频率为 $f = R_{FS}/500$ 的抽运脉冲 $\Psi_{in} = 0.5 \exp[-(\theta/0.5)^2]$ 。

光场演化结果如图8(a)所示,经过一段时间的演化后,腔内光场呈现稳定的周期性变化,且变化周期等于抽运脉冲周期。选取同一变化周期内的3个不同时刻,分别绘制光场分布和相对应的光谱,如图8(b)所示。其光谱为梳状,模式间的频率间隔均为FSR,腔内有Kerr光频梳产生。因此,在连续光抽运无法激发Kerr光频梳的情况下,可以使用混合抽运的方式使腔内存在脉冲形式光场。虽然该方式导致光场的强度随时间变化,但其光谱成分较稳定。而光频梳多用于精密测量领域,要求光频梳的光谱成分稳定,对于光强的稳定没有特别的要求,因此,混合抽运下导致的微腔光场不稳定对它的实际应用影响不大。

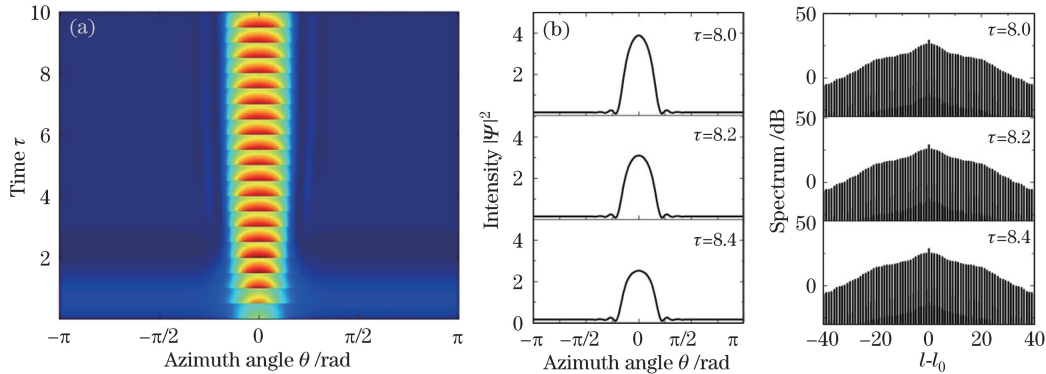


图 8 混合抽运时正色散微腔内的光场演化。(a) $\Psi_{in} = 0.5 \exp[-(\theta/0.5)^2]$, $f = R_{FS}/500$;

(b) 同一演化周期内三个不同时刻的光场分布和相应光谱

Fig. 8 Evolution of the field in microresonator of synthetical pumping manner. (a) $\Psi_{in} = 0.5 \exp[-(\theta/0.5)^2]$,

$f = R_{FS}/500$; (b) intensity profiles and corresponding spectra of the fields at three different moments within a period

下面将讨论连续光与脉冲混合抽运时各项参数对腔内光场的影响。在图8的基础上,改变 f ,可见随着 f 的增加,腔内光场稳定变化的频率也增加,如图9所示。 f 的增加并未引起腔内发生非线性效应,光场变化的频率始终和入射脉冲的重复频率一致;入射脉冲的重复频率越高,腔内的光场变化的频率也越高。

另外,保持 $f = R_{FS}/500$ 不变,改变抽运脉冲宽度,光场变化如图10所示。腔内脉冲宽度正比于抽运的脉冲宽度。因此,腔内光场在保持单脉冲的情况下,可以通过控制抽运脉冲的脉宽来调节微腔内脉冲的脉宽,抽运脉冲的宽度越窄,腔内越容易形成脉宽较窄的脉冲。

图11比较了抽运脉冲的振幅对腔内光场的影响。当抽运脉冲的振幅增加时,腔内光强增大导致非线性作用发生,腔内的光场出现了脉冲分裂的现象,可以观察到两个或者多个峰值。因此,为了保持腔内光场是

单脉冲的形式,抽运脉冲的振幅需要控制在适当范围内。

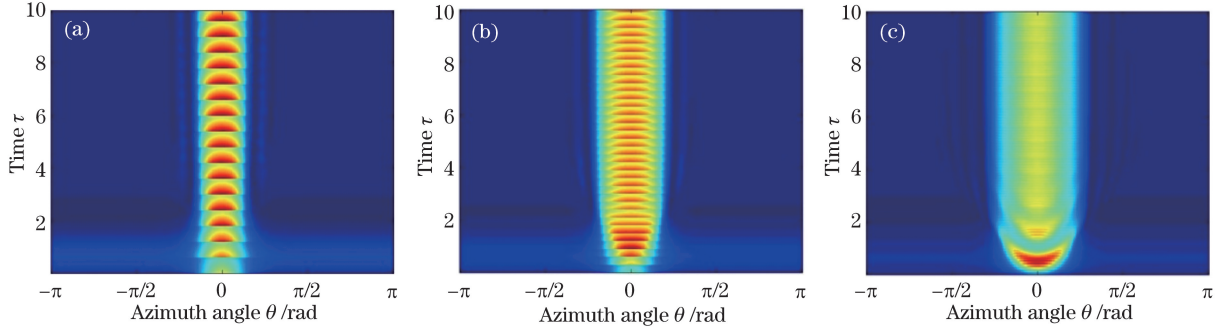


图 9 不同 f 下腔内光场的演化。(a) $m=600$; (b) $m=300$; (c) $m=100$

Fig. 9 Evolution in microresonator of field with different f . (a) $m=600$; (b) $m=300$; (c) $m=100$

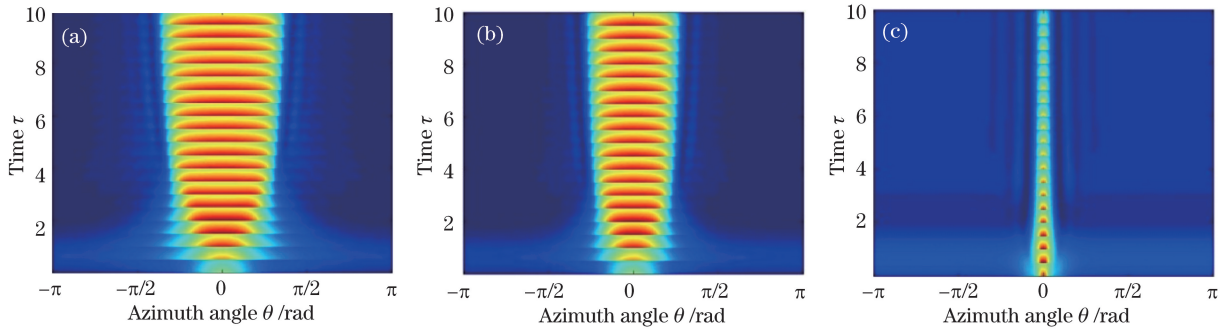


图 10 不同脉宽下腔内光场的演化。(a) $\Psi_{in}=0.5 \exp[-(\theta/1.5)^2]$; (b) $\Psi_{in}=0.5 \exp[-\theta^2]$; (c) $\Psi_{in}=0.5 \exp[-(\theta/0.1)^2]$

Fig. 10 Evolution of the field in the microresonator with different pulse widths. (a) $\Psi_{in}=0.5 \exp[-(\theta/1.5)^2]$; (b) $\Psi_{in}=0.5 \exp[-\theta^2]$; (c) $\Psi_{in}=0.5 \exp[-(\theta/0.1)^2]$

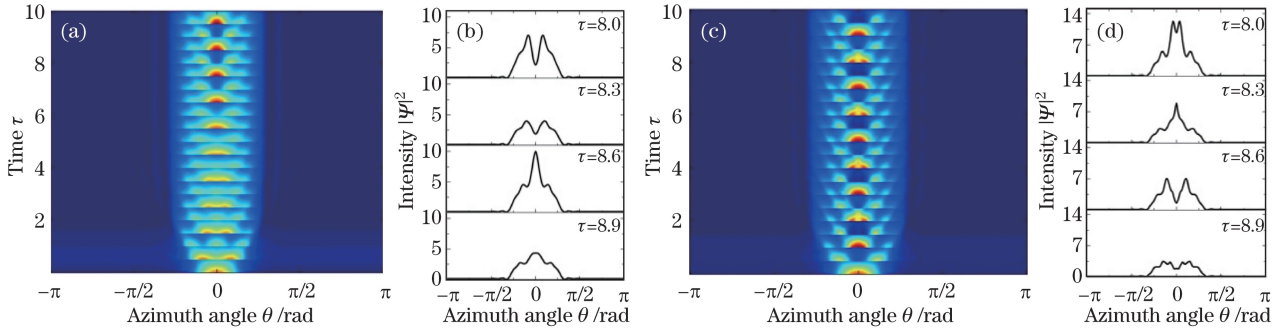


图 11 不同抽脉冲振幅下腔内光场的演化。(a) $\Psi_{in}=2 \exp[-(\theta/0.5)^2]$; (b)图(a)中不同时刻的光场分布;

(c) $\Psi_{in}=2.5 \exp[-(\theta/0.5)^2]$; (d)图(c)中不同时刻的光场分布

Fig. 11 Evolution of the field in the microresonator with different amplitudes of the pump pulses.

(a) $\Psi_{in}=2 \exp[-(\theta/0.5)^2]$; (b) optical field distribution in Fig. (a) at different moments within a period;

(c) $\Psi_{in}=2.5 \exp[-(\theta/0.5)^2]$; (d) optical field distribution in Fig. (c) at different moments within a period

此外, α 也会对光场的演化产生影响。由于 α 表示的是微腔的损耗,因此为了更明显地说明 α 对光场的影响,将直流抽运的参数 F 设定为 2。比较图 12(a)和 (b)可见,随着腔内损耗增强,腔内的脉冲光场发生明显的展宽现象;图 12(c)中,由于腔内的损耗太大,光场衰减成峰值功率相对较弱的分布形式。

5 结 论

通过建立连续光抽运和混合抽运下光场在微腔内演化的理论模型 Lugiato-Lefever 方程,并采用分步傅里叶法求解方程,得到了微腔中光场的演化过程。

研究表明,在连续光抽运的情况下,在正色散的微腔中有稳定的暗孤子存在,并且随着色散系数的

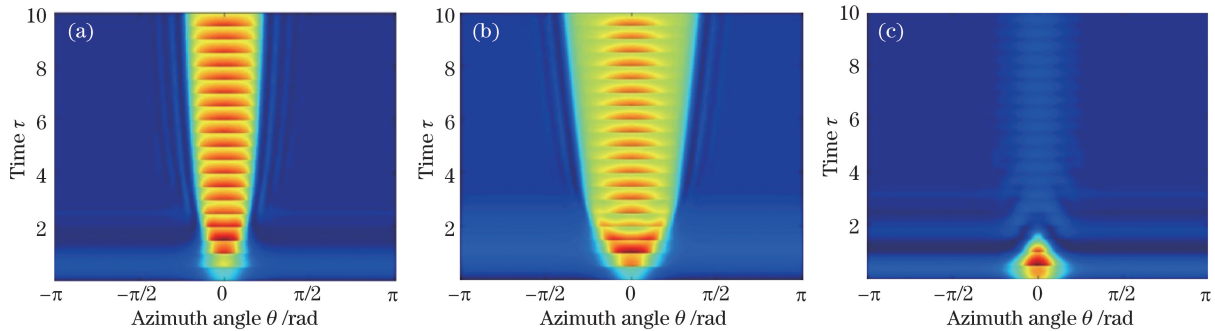


图 12 不同 α 下微腔内光场的演化。(a) $\alpha=3$; (b) $\alpha=4$; (c) $\alpha=5$

Fig. 12 Evolution of the field in the microresonator with different α . (a) $\alpha=3$; (b) $\alpha=4$; (c) $\alpha=5$

增加,暗孤子的脉宽会增加;而失谐参量的增加导致暗孤子的形状发生变化。此外,抽运参数过大或者过小都会导致腔内的暗孤子演化成直流形式的光场。同时,计算结果显示,仅在连续光抽运的情况下,初始的高斯型的光场在正色散的微腔中最终会演化成为直流形式的光场分布,难以在腔内形成稳定的亮孤子脉冲。

对正色散的微腔中,采用混合抽运方式可以在腔内形成脉冲形式的光场分布,弥补了单一连续光抽运情况下特定参数的正色散腔内难以产生亮孤子脉冲的不足。此外,通过模拟不同微腔参数和抽运参数条件下光场的演化,讨论了混合抽运下这些参数对光场的影响。对正色散的微腔,抽运脉冲的重复频率越高,腔内的光场越稳定;而抽运脉冲的振幅过高,会导致腔内的脉冲发生分裂;微腔失谐参量的增加会导致脉冲展宽以及脉冲能量降低。该理论分析结果对于实验中微腔参数和抽运参数的选取有重要意义。

参 考 文 献

- Xing Shujian, Zhang Fumin, Cao Shiyong, *et al.*. Study of the femtosecond fiber comb and absolute optical frequency measurement[J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(17): 170603.
邢书剑, 张福民, 曹士英, 等. 飞秒光频梳的任意长绝对测距[J]. 物理学报, 2013, 62(17): 170603.
- Meng Fei, Cao Shiyong, Zhao Guangzhen, *et al.*. Application of an Er: Doped fiber comb for Sr lattice clock[J]. Chinese J Lasers, 2015, 42(7): 0702012.
孟 飞, 曹士英, 赵光贞, 等. 掺铒光纤光梳在铯晶格钟中的应用研究[J]. 中国激光, 2015, 42(7): 0702012.
- Dou Yujie, Zhang Hongming, Yao Minyu. Ultra-short optical pulse generation based on optical frequency comb and application in optical analog-to-digital conversion[J]. Chinese J Lasers, 2012, 39(12): 1205006.
窦玉杰, 张洪明, 姚敏玉. 基于光频梳的超短光脉冲的产生及其在光模数转换中的应用[J]. 中国激光, 2012, 39(12): 1205006.
- Meng Fei, Cao Shiyong, Cai Yue, *et al.*. Study of the femtosecond fiber comb and absolute optical frequency measurement[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(10): 100601.
孟 飞, 曹士英, 蔡 岳, 等. 光纤飞秒光学频率梳的研制及绝对光学频率测量[J]. 物理学报, 2011, 60(10): 100601.
- Washburn B R, Fox R W, Newbury N R, *et al.*. Fiber-laser-based frequency comb with a tunable repetition rate[J]. Optics Express, 2004, 12(20): 4999-5004.
- Swann W C, McFerran J J, Coddington, *et al.*. Fiber-laser frequency combs with subhertz relative linewidths[J]. Optics Letters, 2006, 31(20): 3046-3048.
- Huang Bao, Feng Ming, Chen Xindong, *et al.*. Optical frequency comb based on mode-locked fiber laser[J]. Laser Journal, 2009, 30(2): 16-19.
黄 保, 冯 鸣, 陈新东, 等. 基于锁模光纤激光器的光学频率梳[J]. 激光杂志, 2009, 30(2): 16-19.
- Lim J, Knabel K, Tillman K A, *et al.*. A phase-stabilized carbon nanotube fiber laser frequency comb[J]. Optics Express, 2009, 17(16): 14115-14120.
- Chao David. Self-referenced 1.5 μm fiber frequency combs at GHz repetition rates[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2012.
- Herr T, Brasch V, Jost J D, *et al.*. Temporal solitons in optical microresonators[J]. Nature Photonics, 2012, 8(2): 145-152.
- Lamont M R E, Okawachi Y, Gaeta A L. Route to stabilized ultrabroadband microresonator-based frequency combs[J].

- Optics Letters, 2013, 38(18): 3478-3481.
- 12 Tilo S, Tobtas W, Constanza A H, *et al.*. Laser frequency combs for astronomical observations[J]. Science, 2008, 321(5894): 1335-1337.
 - 13 Pfeifle J, Lauermann M, Wegner D, *et al.*. Coherent data transmission with microresonator Kerr frequency combs[J]. Nature Photonics, 2013, 8(5): 375-380.
 - 14 Pascal D, Katja B, Papp S B, *et al.*. Self-injection locking and phase-locked states in microresonator-based optical frequency combs[J]. Physics Review Letters, 2014, 112(4): 147-241.
 - 15 Matsko A B, Savchenkov A A, Liang W, *et al.*. Mode-locked Kerr frequency combs[J]. Optics Letters, 2011, 36(15): 2845-2847.
 - 16 Lugiato L A, Lefever R. Spatial dissipative structures in passive optical systems[J]. Physics Review Letters, 1987, 25(58): 2209-2211.
 - 17 Stéphane C, Miro E. Universal scaling laws of Kerr frequency combs[J]. Optics Letters, 2013, 38(11): 1790-1792.
 - 18 Stéphane C, Randle H G, Thibaut S, *et al.*. Modeling of octave-spanning Kerr frequency combs using a generalized mean-field Lugiato-Lefever model[J]. Optics Letters, 2013, 38(1): 37-39.
 - 19 Chembo Y K, Menyuk C R. Spatiotemporal Lugiato-Lefever formalism for Kerr-comb generation in whispering-gallery-mode resonators[J]. Physics Review A, 2014, 87(5): 053852.
 - 20 Coen S, Haelterman M. Continuous-wave ultrahigh-repetition-rate pulse-train generation through modulational instability in a passive fiber cavity[J]. Optics Letters, 2001, 26(1): 39-41.
 - 21 Peng Can, Yao Minyu, Zhang Hongming, *et al.*. 10 GHz actively mode-locked fiber ring laser[J]. Chinese J Lasers, 2003, 30(2): 101-104.
彭 璨, 姚敏玉, 张洪明, 等. 10 GHz 主动锁模光纤激光器[J]. 中国激光, 2003, 30(2): 101-104.
 - 22 He Jingliang, Hao Xiaopeng, Xu Jinlong, *et al.*. Ultrafast mode-locked solid-state lasers with graphene saturable absorber[J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(9): 0900138.
何京良, 郝霄鹏, 徐金龙, 等. 基于石墨烯可饱和吸收被动锁模超快全固体激光器的研究[J]. 光学学报, 2011, 31(9): 0900138.