一种一步 π 移相相位快速提取算法

朱荣刚 朱日宏 何 勇

南京理工大学电子工程与光电技术学院, 江苏 南京 210094

摘要 提出可实现动态测量的一步 π 移相相位提取算法。该算法是将具有 π 移相的两幅干涉图进行重新排列组合,构造出一幅含有时域-空域信息的时空条纹图,通过提取时空条纹图中的信号谱来快速求解相位。在时空条纹图的频谱中,时间频率的引入使得信号频谱能够与背景干扰频谱有效分离,因此在不需要高载频的情况下依然能够对信号谱进行有效提取。将其应用在移相干涉测量中,与传统移相法进行对比发现,此算法不仅能够有效地消除移相误差,而且能够有效地消除高频噪声。另外,分析了此法在不同频率以及不同移相误差值下对测量精度的影响,在归一化空间频率大于 0.03、移相误差值在 \pm 30°范围内,其面形恢复偏差均方根值能够控制在 1.358 \times 10⁻³ λ 以内。

关键词 测量;时空条纹图;相位误差;傅里叶变换;干涉测量 中图分类号 O436.1 **文献标识码** A doi: 10.3788/AOS201636.0612003

A Fast Phase Extraction Algorithm with One-Step π Phase-Shifting

Zhu Ronggang Zhu Rihong He Yong

School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China

Abstract The one-step π phase-shifting phase extraction algorithm is presented to achieve dynamic measurement. Two interferograms with π phase-shifting are rearranged to form a spatial-temporal fringe containing time domain and space domain information. This algorithm can solve phase fast by extracting spatial-temporal pattern signal. In frequency spectrum of spatial-temporal fringe pattern, time frequency is introduced in this method, signal spectrum of spatial-temporal pattern is effectively separated from the background interference spectrum, and the signal spectrum can be extracted effectively without high carry frequency. The proposed algorithm is applied in phaseshifting interferometry. Comparing with the traditional phase shifting method, this method can eliminate phaseshifting error and high-frequency noise in test result effectively. In addition, the influence of different frequencies and phase-shifting errors on measurement accuracy is analyzed. The measurement error root mean square of the reconstruction surface can be controlled in $1.358 \times 10^{-3} \lambda$ when the normalized spatial frequency is more than 0.03 and phase-shifting error changes within $\pm 30^{\circ}$.

Key words measurement; spatial-temporal fringes; phase error; Fourier transformation; interferometry OCIS codes 120.3180; 120.5050; 120.7280

1 引 言

在干涉图相位求取过程中最常见的是移相法^[1-2]和傅里叶变换法^[3-5]。移相法具有计算速度快、测量精 度高等特点,但是由于移相器移相不准^[6]以及气流和振动^[7]等环境因素,往往对测量结果的稳定性及精度造 成影响。为了应对这种影响,提出了降低移相误差的算法。例如,卢丙辉等^[8]提出一种误差互补修正五步移 相相位提取算法来抑制线性误差;朱日宏等^[9-10]采用重叠四步平均法校正移相器的标定误差与非线性误差;

收稿日期: 2016-01-06; 收到修改稿日期: 2016-02-28

基金项目:国家自然科学基金(A030801)

作者简介:朱荣刚(1984-),男,博士研究生,主要从事光学干涉测量以及图像处理技术等方面的研究。

E-mail: zhuronggang@foxmail.com

导师简介:朱日宏(1964-),男,教授,博士生导师,主要从事精密光学仪器理论与技术及光学图像的压缩与处理技术等 方面的研究。E-mail: zhurihong@mail.njust.edu.cn(通信联系人) Okada 等^[11]将移相量考虑成随机值,采用最小二乘迭代法求取相位分布; Wang 等^[12]在此基础上做出改进,提高了迭代效率并且不用限定迭代的初始值;Deck^[13]采用 N 步移相算法实现了对振动的抑制等。另外,同步移相干涉仪则在硬件上消除移相误差^[14]。傅里叶变换法仅仅需要采集一幅干涉图,因此可以实现动态测量,但是其需要提供高载频以实现信号频谱与零级干扰频谱的完全分离。另外,普通移相干涉仪在干涉条纹高频段会引入较大的回程误差,所以采用傅里叶变换法的干涉仪需要专门的光学系统设计。

2008年, Servin等^[15]提出一种巧妙的思路,对移相干涉图数据的重新排列组合,将 M 幅大小为 N×N 移相干涉图变换为一幅大小为 MN×N(或者 N×MN)的线性载频干涉图,即将原本只包含空域信息(相位 分布)的条纹图组合为一幅同时包含时域信息和空域信息的时空条纹图(STF)。在 STF 图频谱中,由于时 域移相量的存在,使得 0 级背景频谱与±1 级信号频谱相互分离,从而可以通过滤波提取出+1 级信号频谱 来重构相位。Li 等^[16-18]基于此原理提出了载频交叠重构干涉术(CSI)用以抑制 PZT 移相不准以及振动带 来的测量误差。但是其仍然需要采集三幅以上干涉图进行处理,无法实现动态测量的目的。

本文在 STF 图的基础上,提出一种可实现动态测量的一步 π 移相相位提取算法。该方法将实时采集的 π 移相动态条纹图与上一帧采集的条纹图组合成一幅 STF 图,在 STF 图中引入了时域频谱,使得信号频谱 往高频处搬移,从而降低了背景频谱对信号的干扰,有利于信号谱相位提取。因此在不需要提供高载频的情 况下,依然能实现高精度测量。通过公式推导和仿真实验对该方法进行详细说明,实验中将测试结果与传统 移相法测试结果进行比较。此外还分析了本文方法在不同频率和不同移相误差下对面形恢复结果的影响。

2 原 理

一步 π 移相相位提取原理主要包括 STF 图构建过程和傅里叶变换相位提取过程两部分。通过原始干涉图和 π 移相的干涉图来构建 STF 图,通过对 STF 图的+1级信号的提取来恢复相位。





以常见的圆形光学件为例,仿真一幅口径为 100 mm 的波面图 w(x,y),如图 1 所示,其像元为400 pixel×400 pixel。参考面为绝对平面,参考面与测试面在 x 方向存在 θ 倾斜量,此时干涉条纹图可表示为

$$I(x,y) = a(x,y) + b(x,y)\cos\left\{\frac{4\pi}{\lambda} [x \tan(\theta) + w(x,y)] + C\right\},$$
(1)

式中*a*(*x*, *y*)是背景光强分布,*b*(*x*, *y*)是条纹强度分布,*C*是初始光程差为常数(在相位计算结果中可作为常数项被直接消除)。

根据(1)式仿真出两幅干涉条纹图如图 2 所示,其中图 2(a)是没有移相时的干涉图,图 2(b)是相位移动 π时的干涉图。其公式表示为

$$\begin{cases} I_0(x,y) = a(x,y) + b(x,y)\cos\left\{\frac{4\pi}{\lambda}\left[x\,\tan(\theta) + w(x,y)\right]\right\} \\ I_1(x,y) = a(x,y) + b(x,y)\cos\left\{\frac{4\pi}{\lambda}\left[x\,\tan(\theta) + w(x,y)\right] + \pi\right\} \end{cases},$$
(2)

(2) 式可简化为



图 2 仿真干涉条纹图。(a)未移相干涉图;(b)移相 π 后干涉图

Fig. 2 Simulated fringe interferogram. (a) Interferogram without phase-shifting; (b) interferogram with π phase shift

$$I_{i}(x,y) = a(x,y) + b(x,y)\cos[2\pi f_{0}x + \alpha(x,y) + i\pi], (i = 0,1),$$
(3)

式中
$$f_0 = \frac{2}{\lambda} \tan(\theta)$$
 是条纹空间频率, $\alpha(x,y) = \frac{4\pi}{\lambda} w(x,y)$ 是所求相位。

假设一幅干涉图的像元尺寸是 *M*×*N*,则两幅干涉图按行构造出 STF 图的物理尺寸是 2*M*×*N*,其中, STF 图中的每两行分别是两幅干涉图的每一行的顺序组合,或者按列构造出物理尺寸为 *M*×2*N* 的 STF 图,这其中每两列分别是两幅干涉图的每一列的顺序组合。按照后一种方式构造的 STF 图如图 3 所示。



图 3 STF 图

Fig. 3 STF pattern

由图 3 可知,其坐标在 x 方向扩展了两倍,扩展后的新坐标可写成 x',由此扩展后的 STF 图可写成

$$I'(x',y) = a\left(\frac{x'}{2},y\right) + b\left(\frac{x'}{2},y\right)\cos\left[2\pi f_s x' + \alpha\left(\frac{x'}{2},y\right) + n_t\right],\tag{4}$$

式中 $f_s = f_0/2$ 是单幅条纹图空间频率在 STF 中扩展后的空间频率, n_t 可以看成相移(时域)调制信号, $n_t = \int_0^0, x'$ is odd number

 $\{\pi, x' \text{ is even number}^\circ\}$

对(4)式进行余弦分解,分解后的表达式为

$$I'(x',y) = a\left(\frac{x'}{2},y\right) + b\left(\frac{x'}{2},y\right)\cos\left[2\pi f_s x' + \alpha\left(\frac{x'}{2},y\right)\right]\cos(n_t) + b\left(\frac{x'}{2},y\right)\cos\left[2\pi f_s x' + \alpha\left(\frac{x'}{2},y\right) + \frac{\pi}{2}\right]\sin(n_t).$$
(5)

通过频域的方法对(5)式进行分析,对(5)式进行傅里叶变换后的频谱可表示为

$$\mathscr{F}[I'(x',y)] = A_0 + \frac{1}{2\pi}S * E + \frac{1}{2\pi}S' * E', \qquad (6)$$

式中"*"是二维卷积运算符, $A_0 = \mathscr{F}\left[a\left(\frac{x'}{2}, y\right)\right]$ 是背景频谱, $S = \mathscr{F}\left\{b\left(\frac{x'}{2}, y\right)\cos\left[2\pi f_s x' + \alpha\left(\frac{x'}{2}, y\right)\right]\right\}$ 与 $S' = \mathscr{F}\left\{b\left(\frac{x'}{2}, y\right)\cos\left[2\pi f_s x' + \alpha\left(\frac{x'}{2}, y\right) + \frac{\pi}{2}\right]\right\}$ 是信号谱, $E = \mathscr{F}\left[\cos\left(n_t\right)\right]$ 和 $E' = \mathscr{F}\left[\sin\left(n_t\right)\right]$ 是相移调制频谱。

由于 E 和 E'是有限长周期性序列,为讨论方便将其看成是无限长周期性序列,因此可求得

$$\begin{cases} E = \delta(f + f_{\tau}) + \delta(f - f_{\tau}) \\ E' = 0 \end{cases},$$
(7)

式中 f_t=1/2,是由一步 π移相引入的时域相移调制频率。则(6)式可表示为

$$\mathscr{F}[I'(x',y)] = A_0 + \frac{1}{2\pi}S * \delta(f+f_t) + \frac{1}{2\pi}S * \delta(f-f_t)_{\circ}$$
(8)

STF 图的频谱分析过程如图 4 所示,其中图 4(a)是 STF 图中单幅条纹图的空间频率,信号频谱 S(S') 位于 $\pm f_s \psi$,一般情况下如果信号谱频率未能足够高,其将与背景干扰频谱发生混叠;图 4(b)是时域相移调制频谱 E,其值是为位于 $\pm f_t \psi$ 的单位冲击函数组合;图 4(c)是 STF 图的完整频谱分布(虚线框内为实际可显示部分), $\pm f_s \psi$ 的信号频谱 S,在时域相移调制频谱 E 的作用下搬移至干($f_t - f_s$)处。实际仿真的 STF 图频谱如图 5 所示。



图 4 频谱分析。(a)单幅条纹图空域频谱;(b)时域相移调制频谱;(c)STF 图频谱示意图

Fig. 4 Frequency analysis. (a) Spectrum of single fringe in spatial domain;

(b) modulation spectrum of phase shift in time domain; (c) sketch map of STF spectrum



图 5 STF 图频谱 Fig. 5 Spectrum of STF

对(f₁-f_s)处频谱进行提取,并且进行傅里叶逆变换操作,可得

$$I''(x',y) = \frac{1}{4\pi} b\left(\frac{x'}{2}, y\right) \exp\left\{j\left[2\pi (f_{t} - f_{s}) x' - \alpha\left(\frac{x'}{2}, y\right)\right]\right\},$$
(9)

由此可求得相位为

$$\alpha\left(\frac{x'}{2},y\right) = -\arctan\left\{\frac{\operatorname{Im}\left[I''(x',y)\right]}{\operatorname{Re}\left[I''(x',y)\right]}\right\} + 2\pi(f_{t} - f_{s})x'.$$
(10)

此时,直接通过(10)式将计算出一组折叠相位,对此相位进行相位解包裹后再进行消倾斜操作消除 $2\pi(f_t-f_s)x'项,将得到的相位值\alpha(x'/2,y)按顺序每两列提取一列来最终求得\alpha(x,y);也可以先对$ $(10)式求取的压包相位按顺序每两列提取一列,此时得到载频为<math>f_0$ 的压包相位图,通过解包运算和消倾斜 操作直接得到 $\alpha(x,y)$ 。按照上述任意相位求取步骤,提取 STF 图中(f_t-f_s)处频谱,求得相位 $\alpha(x,y)$ 如 图 6 所示。

由 $w(x,y) = \frac{\lambda}{4\pi} \alpha(x,y)$,可求得被测件的面形,写成波长单位形式为 $w_{\lambda}(x,y) = \frac{\alpha(x,y)}{4\pi}$ 。图 7 是由 相位 $\alpha(x, y)$ 恢复出的面形结果以及将此结果与原始面形求取偏差的结果,面形偏差峰谷(PV)值可控制在 ±1.5×10⁻³ λ 以内。





3 实验与分析

3.1 实物实验

实验是在口径为 100 mm 的移相干涉仪上进行的,对平面进行测试,干涉仪波长 λ=632.8 nm,相机像 元为 1000 pixel×1000 pixel。测试过程中设定移相值为 π,测试过程中采集的两幅干涉图,以及由这两幅干 涉图构建的 STF 图如图 8 所示,其中图 8(a)是未移相时采集的干涉图;图 8(b)是移相 π 后采集的干涉图; 图 8(c)是由图 8(a)和图 8(b)按列构建的 STF 图。



图 8 实验采集干涉条纹图。(a)0°移相;(b)π移相;(c) STF 图

Fig. 8 Interference fringes captured in the experiment. (a) 0° phase shift; (b) π phase shift; (c) STF image

对图 8 中求得的 STF 图进行傅里叶变换,变换后的频谱图如图 9 所示,从图中可以发现,虽然零级干涉 谱的强度较强,但是±(f。-f。')处的信号谱分布在频域两端,能够与零级干涉谱完全分离。



图 10 是最终恢复面形结果图,其 PV 值为 0.0586 λ。

Fig. 10 Surface restored map obtained by the proposed method

将此测试结果与移相干涉仪本身测试结果进行比较,比较结果如图 11 所示,其中图 11(a)是移相干涉 仪移相法本身测试结果,其 PV 值为 0.0812;图 11(b)是 STF 图法与移相法测试结果偏差图。对比结果可以 发现,本文方法能够消除移相法测试结果中移相误差引起的频率为 2f。的寄生条纹和干涉图中散斑噪声等 引起的毛刺。





Fig. 11 (a) Surface restored map obtained by phase shift method; (b) deviation map of the test results by the proposed method and phase shift method

3.2 分析

1) 频率选取范围

STF 图法本身对 f_0 有要求,当 f_0 减小时, $f_1 - f_s$ 会朝着边缘移动。当 f_0 小到一定程度时,其频谱会在 边缘 f_1 处发生截断,出现吉布斯效应,从而导致相位求解误差变大。图 12 仿真了归一化频率 f_0 在 0.02~ 0.08范围内,STF 图法恢复波面与仿真波面的偏差均方根(ERMS)值。可以看到低频段随着频率的增加面





Fig. 12 Curve of ERMS value changes with normalized frequency

形恢复 ERMS 值急剧减小,在 $f_0 \ge 0.03$ 时面形恢复 ERMS 值能够稳定控制在 $1.216 \times 10^{-3} \lambda$ 以内。

2)移相误差对测量精度的影响

在原理部分分析过,当移相量为 π 时,其时移调制频谱 $E'=0, E=\delta(f+f_c)+\delta(f-f_c)$ 。假设存在移相 误差 ϵ ,第二幅图移相值为($\pi+\epsilon$),则可求得时移调制频谱为

$$\begin{cases} E = \frac{1 + \cos \varepsilon}{2} \delta(f - f_{c}) + \frac{1 - \cos \varepsilon}{2} \delta(f) + \frac{1 + \cos \varepsilon}{2} \delta(f + f_{c}) \\ E' = \frac{\sin \varepsilon}{2} \delta(f - f_{c}) - \frac{\sin \varepsilon}{2} \delta(f) + \frac{\sin \varepsilon}{2} \delta(f + f_{c}) \end{cases}$$
(11)

因此在 STF 图中信号谱被移至±(f_t - f_s)、±(f_t + f_s)和± f_s 处。此时对(f_t - f_s)处提取的频谱成份 不仅仅只有信号频谱 S,还包含信号频谱 S'的成份。简单推导可以发现 S'的存在其反应在相位测试结果中 相当于添加了一个常数项,理论上并不影响测试结果。另外,当存在移相误差时,由于信号谱有一部分被搬 移至± f_s 处,使得±(f_t + f_s)处信号强度减弱,降低了信噪比,不利于信号提取和相位恢复。图 13 则仿真 了 f_0 =0.003 时移相误差在 0°~30°(但是其反映了±30°)时面形恢复的 ERMS 值,发现随着移相误差的增 加面形恢复 ERMS 值缓慢增加,移相误差在±30°范围内其面形恢复 ERMS 能控制在 1.358×10⁻³ λ 以内。 由此可见,其对移相器精度要求极低。



图 13 ERMS 值随移相误差变化曲线图 Fig. 13 Curve of ERMS value changes with phase shift error

4 结 论

基于 STF 图提出一种一步 π 移相动态干涉条纹相位提取方法,将该方法测试结果与传统移相干涉仪自 身的测试结果进行比较,结果发现该方法较传统移相法不仅可以消除移相误差,还可以消除高频噪声,测量 精度有大幅提高。讨论了不同频率以及不同移相误差对测量结果的影响,可以发现移相误差对测量结果影 响较小,且只要干涉图中满足一定的频率要求(条纹数目)就能进行高精度的测量。由于傅里叶变换进行相 位提取存在边缘效应,可通过条纹延拓算法来减弱或消除此效应对测量结果的影响。另外也可应用窗口傅 里叶变换、小波变换等单幅条纹图相位提取手段来提高测量精度。

参考文献

- 1 Malacara D, Servin M, Malacara Z. Interferogram analysis for optical testing [M]. Boca Raton: Crc Press, 2003: 259-358.
- 2 Servin M, Estradal J C, Quiroga J A. The general theory of phase shifting algorithms[J]. Opt Express, 2009, 17(24): 21867-21881.
- 3 Takeda M, Ina H, Kobayashi S. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry[J]. J Opt Soc Am, 1982, 72(1): 156-160.
- 4 Roddier C, Roddier F. Interferogram analysis using Fourier transform techniques [J]. Appl Opt, 1987, 26(9): 1668-1673.
- 5 Massig J H, Heppner J. Fringe-pattern analysis with high accuracy by use of the Fourier-transform method: theory and experimental tests[J]. Appl Opt, 2001, 40(13): 2081-2088.
- 6 Schwider J, Burow R, Elssner K E, et al.. Digital wave-front measuring interferometry: Some systematic error sources [J]. Appl Opt, 1983, 22(21): 3421-3432.
- 7 Groot P J D. Vibration in phase-shifting interferometry[J]. J Opt Soc Am A, 1995, 12(2): 354-365.
- 8 Lu Binghui, Liu Guodong, Sun Heyi, et al.. Phase extraction method of microsphere interferometry based on error complementary correction[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 42(5): 0508004.

卢丙辉,刘国栋,孙和义,等.基于误差互补修正的微球干涉测量相位提取方法[J].光学学报,2015,42(5):0508004.

- 9 Zhu Rihong, Chen Jinbang, Wang Qing, et al.. A new algorithm on phase shifting interferometry: The overlapping averaging 4-frame algorithm[J]. Acta Optica Sinica, 1994, 14(2): 1288-1293.
- 朱日宏,陈进榜,王 青,等.移相干涉术的一种新算法:重叠四步平均法[J].光学学报,1994,14(2):1288-1293.
- Mao Xinjie, He Yong, Zhu Ronggang. Fiber-optic interferometer projection based on wavelength phase-shifting for three-dimensional profile measurement[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2015, 52(10): 101202.
 毛心洁,何 勇,朱荣刚.基于波长移相的光纤投影三维轮廓测量方法[J].激光与光电子学进展, 2015, 52(10): 101202.
- 11 Okada K, Sato A, Tsujiuchi J. Simultaneous calculation of phase distribution and scanning phase-shift in phase-shifting interferometry[J]. Opt Commun, 1991, 84(3-4): 118-124.
- 12 Wang Z, Han B. Advanced iterative algorithm for phase extraction of randomly phase-shifted interferograms [J]. Opt Lett, 2004, 29(14): 1671-1673.
- 13 Deck L L. Suppressing phase errors from vibration in phase-shifting interferometry [J]. Appl Opt, 2009, 48(20): 3948-3960.
- 14 Zheng Donghui, Chen Lei, Li Bo, *et al.*. Research on phase-shifting characteristic of retarder array in simultaneous phase-shifting interferometer[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(4): 0412004.
- 郑东晖,陈 磊,李 博,等.同步移相干涉仪中的延迟阵列移相特性研究[J].光学学报,2015,35(4):0412004.
- 15 Servin M, Cywiak M, Malacara-Hernandez D, *et al.*. Spatial carrier interferometry from M temporal phase shifted interferograms: Squeezing interferometry[J]. Opt Express, 2008, 16(13): 9276-9283.
- 16 Li B, Chen L, Tuya T W, et al.. Carrier squeezing interferometry: Suppressing phase errors from the inaccurate phase shift[J]. Opt Lett, 2011, 36(6): 996-998.
- 17 Li B, Chen L, Xu C, et al.. The simultaneous suppression of phase shift error and harmonics in the phase shifting interferometry using carrier squeezing interferometry[J]. Opt Commun, 2013, 296(6): 17-24.
- Li Jinpeng, Chen Lei, Li Bo, *et al.*. Method based on carrier squeezing interferometry for suppressing phase errors from inaccurate phase shift in a Φ600 Fizeau interferometer[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(3): 0312003.
 李金鹏, 陈 磊, 李 博, 等. 基于载频交叠重构干涉术的大口径干涉仪相移误差校正方法[J]. 光学学报, 2013, 33(3):

0312003.