

两维耦合腔系统中的纠缠特性

邱昌东 卢道明*

武夷学院机电工程学院, 福建 武夷山 354300

摘要 研究四个二能级原子与两维耦合腔的相互作用系统, 其中每个腔囚禁一个二能级原子, 并且原子通过单光子跃迁与腔场发生共振相互作用。利用负本征值度量两子系统间的纠缠, 讨论了腔与腔之间的耦合系数变化对原子与原子之间和腔与腔之间纠缠的影响。研究结果表明, 随腔与腔之间耦合系数的增大, 原子与原子之间纠缠增强, 腔与腔之间纠缠减弱。

关键词 量子光学; 两维耦合腔; 二能级原子; 量子纠缠

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201636.0527001

Entanglement Characteristics in Two-Dimensional Coupled Cavity Systems

Qiu Changdong Lu Daoming

College of Mechanical and Electrical Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China

Abstract The interaction system of four identical two-level atoms and two-dimensional coupled single-mode optical cavities is studied in which the atoms are trapped separately in the cavities, and each atom resonantly interacts with the cavity via a one-photon hopping. Negativity is used to quantify the degree of entanglement between two subsystems. The influences of cavity-cavity coupling coefficients on the atom-atom entanglement and the cavity-cavity entanglement are discussed based on the numerical calculation results. The obtained results show that the atom-atom entanglement is strengthened while the cavity-cavity entanglement is weakened with the increase of cavity-cavity coupling coefficient.

Key words quantum optics; two-dimensional coupled cavity; two-level atom; quantum entanglement

OCIS codes 270.5580; 020.5580; 270.5585

1 引 言

量子纠缠是指量子多体系统中各部分之间的相关与不可分离性, 是量子力学独有的物理属性, 在量子计算、量子密集编码^[1]、量子态传送和纠缠交换等量子信息处理领域具有重要作用^[2-3]。量子纠缠长期以来一直是量子光学领域研究的热点, 各国研究人员已对不同物理系统中的量子纠缠开展了大量研究^[4-10]。胡要花等^[4]研究了强度相关耦合双 Jaynes-Cummings 模型中的纠缠和量子失谐, Wu 等^[5]研究了运动原子与单模光场三光子相互作用过程中的纠缠, Ji 等^[6]讨论了两原子与两个腔非共振相互作用系统中的纠缠动力学。

腔量子电动力学(腔 QED)是实现量子信息处理和量子计算最有前途的技术之一。研究人员已利用该技术成功制备两原子 EPR(Einstein-Podolsky-Rosen)纠缠态^[11-12]、两腔模 EPR 纠缠态^[13]、三粒子 GHZ(Greenberger-Horne-Zeilinger)态和实现两比特量子逻辑门等^[14]。近年来, 虽然腔 QED 技术得到了飞速发展, 但要在一个腔中操纵多个原子仍然存在困难。耦合腔系统被认为是解决上述困难和构建量子网络最可靠的方案之一。近十多年来, 关于耦合腔系统的研究已有大量报道^[15-19]。Ye 等^[15]提出了利用光纤

收稿日期: 2015-12-16; 收到修改稿日期: 2016-01-06

基金项目: 福建省自然科学基金(2015J01020)

作者简介: 邱昌东(1973-), 男, 硕士, 副教授, 主要从事量子光学方面的研究。E-mail: qiucd_321@126.com

* 通信联系人。E-mail: ldming794703@163.com

耦合腔系统产生两原子纠缠态的方案。Zheng 等^[16]提出了产生双模压缩态的方案。在不同的耦合腔系统中,两维耦合腔不仅是连接空间分离量子寄存器的基础,而且是进行分布式量子计算的先决条件,引起了人们的高度重视^[20-22]。Zhong 等^[22]提出了利用两维耦合腔系统实现多原子相干耦合的理论方案。本文考虑两维耦合腔系统激发数等于 1 的情况,研究了该系统中两原子间和两腔场间的纠缠动力学。研究表明,随腔与腔之间耦合系数的增大,原子与原子之间纠缠增强,腔与腔之间纠缠减弱。

2 物理模型和系统态矢演化规律

两维耦合腔系统模型示意图如图 1 所示,每个腔中囚禁一个二能级原子。假定原子通过单光子跃迁与腔场发生共振相互作用,相邻腔之间存在耦合,并假定不同腔与腔之间耦合系数相等。在旋波近似下,系统的相互作用哈密顿可表示为

$$\hat{H}_1 = \sum_{j=1}^4 g_j a_j s_j^\dagger + J [a_1^\dagger (a_2 + a_4) + a_3^\dagger (a_2 + a_4)] + \text{H.C.}, \quad (1)$$

式中 a_j^\dagger 和 a_j ($j=1,2,3,4$) 分别为第 j 个腔模的产生和湮没算符, $s_j^\dagger = |e\rangle_{jj}\langle g|$, $|e\rangle_j$ 和 $|g\rangle_j$ 分别为第 j 个原子的激发态和基态, g_j 为第 j 个腔中的原子与腔场间的耦合系数, J 为腔与腔之间的耦合系数, H.C. 为厄米共轭项。为简单起见, 设 $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g$ 。

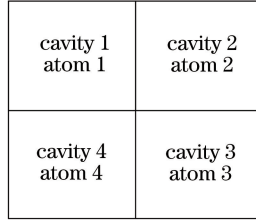


图 1 系统框图

Fig. 1 Sketch of the system

由于系统的激发数算符 $\hat{N} = \sum_{j=1}^4 (|e\rangle_{jj}\langle e| + a_j^\dagger a_j)$ 与 \hat{H}_1 对易, 所以系统激发数守恒。考虑系统激发数等于 1 的情况, 系统将在如下基矢构成的子空间中演化:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\varphi_1\rangle = |eggg\rangle_a |0000\rangle_c \\ |\varphi_2\rangle = |gegg\rangle_a |0000\rangle_c \\ |\varphi_3\rangle = |ggeg\rangle_a |0000\rangle_c \\ |\varphi_4\rangle = |ggge\rangle_a |0000\rangle_c \\ |\varphi_5\rangle = |gggg\rangle_a |1000\rangle_c \\ |\varphi_6\rangle = |gggg\rangle_a |0100\rangle_c \\ |\varphi_7\rangle = |gggg\rangle_a |0010\rangle_c \\ |\varphi_8\rangle = |gggg\rangle_a |0001\rangle_c \end{array} \right., \quad (2)$$

$|\varphi_l\rangle$ 态表达式中的下标 a 和 c 分别表示原子状态和腔场状态, 其中第 l ($l=1,2,3,4$) 位表示第 l 个原子(腔)的状态, $|i\rangle$ 表示光子数等于 i 的 Fock 态。设初始时刻系统处于 $|\varphi_1\rangle$ 态, 则 t 时刻系统的态矢为

$$|\varphi(t)\rangle = A|\varphi_1\rangle + B|\varphi_2\rangle + C|\varphi_3\rangle + D|\varphi_4\rangle + E|\varphi_5\rangle + F|\varphi_6\rangle + G|\varphi_7\rangle + H|\varphi_8\rangle, \quad (3)$$

$|\varphi(t)\rangle$ 满足薛定谔方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\varphi(t)\rangle = \hat{H}_1 |\varphi(t)\rangle. \quad (4)$$

将(3)式代入(4)式, 解得

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \cos(gt) + u \cos(at) + v \cos(\beta t) \\ B = -\frac{i}{2J} \left[\frac{\alpha^2 - g^2}{\alpha} u \sin(at) + \frac{\beta^2 - g^2}{\beta} v \sin(\beta t) \right] \\ C = -\frac{1}{2} \cos(gt) + u \cos(at) + v \cos(\beta t) \\ D = B \\ E = -\frac{i}{g} \left[u \alpha \sin(at) + v \beta \sin(\beta t) + \frac{1}{2} g \sin(gt) \right] \\ F = \frac{1}{2gJ} [(\alpha^2 - g^2) u \cos(at) + (\beta^2 - g^2) v \cos(\beta t)] \\ G = -\frac{i}{g} \left[u \alpha \sin(at) + v \beta \sin(\beta t) - \frac{1}{2} g \sin(gt) \right] \\ H = F \end{array} \right. , \quad (5)$$

式中

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \sqrt{g^2 + 2J^2 + w} \\ \beta = \sqrt{g^2 + 2J^2 - w} \\ w = \sqrt{(g^2 + 2J^2)^2 - g^4} \\ u = \frac{w - 2J^2}{4w} \\ v = \frac{w + 2J^2}{4w} \end{array} \right. . \quad (6)$$

3 原子间的纠缠特性

对于两子系统间的纠缠,已有成熟的度量方法,如共生纠缠度和负本征值方法。本文采用负本征值方法度量两子系统间的纠缠。对于一个用密度矩阵 ρ 描述的两粒子系统,其纠缠度定义为^[23]

$$N = -2 \sum_i u_i , \quad (7)$$

式中 u_i 是 ρ^T 的负本征值, ρ^T 是密度矩阵 ρ 的部分转置矩阵。

讨论第 1 个和第 2 个原子间的纠缠。利用(3)式,在两维基矢 $|ee\rangle_{12}$ 、 $|eg\rangle_{12}$ 、 $|ge\rangle_{12}$ 、 $|gg\rangle_{12}$ 下(下标 1 和 2 表示第 1 个和第 2 个原子),描述原子 1 和原子 2 构成的两粒子体系的密度矩阵为

$$\rho_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |A|^2 & AB^* & 0 \\ 0 & A^* B & |B|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |CDEFGH|^2 \end{bmatrix} , \quad (8)$$

式中 $|CDEFGH|^2 = |C|^2 + |D|^2 + |E|^2 + |F|^2 + |G|^2 + |H|^2$, 为简单起见,在后文中采用同样的缩写表示。通过计算,不难得出原子 1 和原子 2 间的纠缠度为

$$N_{12} = \sqrt{|CDEFGH|^4 + 4|AB|^2 - |CDEFGH|^2} . \quad (9)$$

为了探讨腔场间耦合系数变化对纠缠度 N_{12} 的影响,耦合系数 J 分别等于 $0.5g$ 、 $1.0g$ 、 $2.0g$ 、 $5.0g$ 时, N_{12} 随规范时间 gt 的演化曲线如图 2 所示。由图 2 可见, N_{12} 随时间作不规则振荡,随耦合系数 J 的增大,曲线峰值增大,重心上移。当 $J=0.5g$ 时,数值计算结果 $\bar{N}_{12}=0.04516$; $J=1.0g$ 时, $\bar{N}_{12}=0.05966$; $J=2.0g$ 时, $\bar{N}_{12}=0.07869$; $J=5.0g$ 时, $\bar{N}_{12}=0.0933$ 。这表明随耦合系数 J 的增大,原子 1 和原子 2 间的纠缠增强。物理机制上,对于两个腔相互耦合的情况,两个相互耦合的腔模哈密顿可对角化为两个频率不同且没有耦合的非定域场模哈密顿^[18],因此系统可等效为两个二能级原子与两个独立场模的非共振作用。腔场间耦合增

强,相当于系统的失谐量增加,因而场模被激发的可能性降低,初始的激发子由两原子分享的可能性增加,这导致两原子间的纠缠增强。在两维耦合腔系统中腔与腔之间的耦合与文献[18]类似,随腔场间耦合的增强,原子间分享激发子的几率增大,导致原子间纠缠增强。

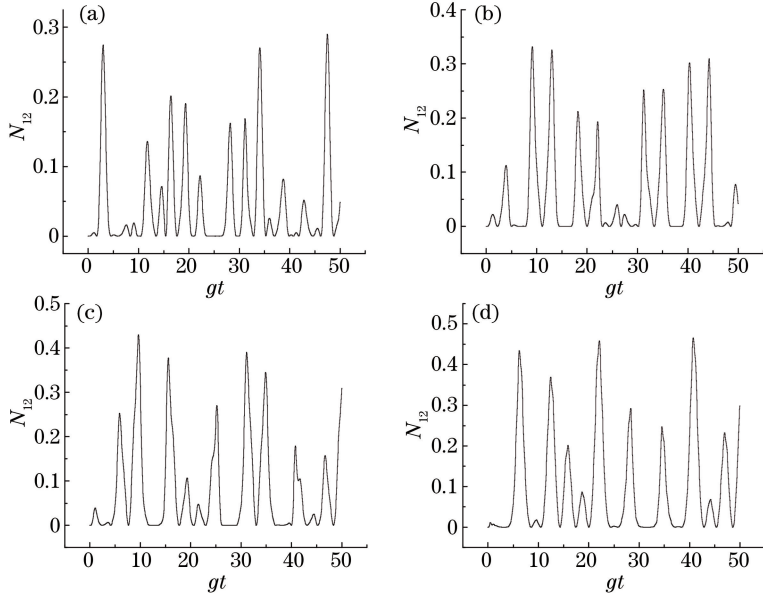


图 2 N_{12} 随规范时间 gt 的演化。(a) $J=0.5g$; (b) $J=1.0g$; (c) $J=2.0g$; (d) $J=5.0g$

Fig. 2 Evolution of N_{12} with scaled time gt . (a) $J=0.5g$; (b) $J=1.0g$; (c) $J=2.0g$; (d) $J=5.0g$

同样,通过类似(9)式的计算,可得原子 2 和原子 3 间的纠缠度为

$$N_{23} = \sqrt{|ABEFGH|^4 + 4|CD|^2} - |ABEFGH|^2, \quad (10)$$

N_{23} 随规范时间 gt 的演化数值计算结果如图 3 所示。图 3 显示结果与图 2 相似,即随耦合系数 J 的增大,曲线峰值增大,重心上移。当 $J=0.5g$ 时, $\bar{N}_{23}=0.04419$; $J=g$ 时, $\bar{N}_{23}=0.05596$; $J=2g$ 时, $\bar{N}_{23}=0.0861$; $J=5g$ 时, $\bar{N}_{23}=0.09192$ 。这表明随耦合系数 J 的增大,原子 2 和原子 3 间的纠缠增强。

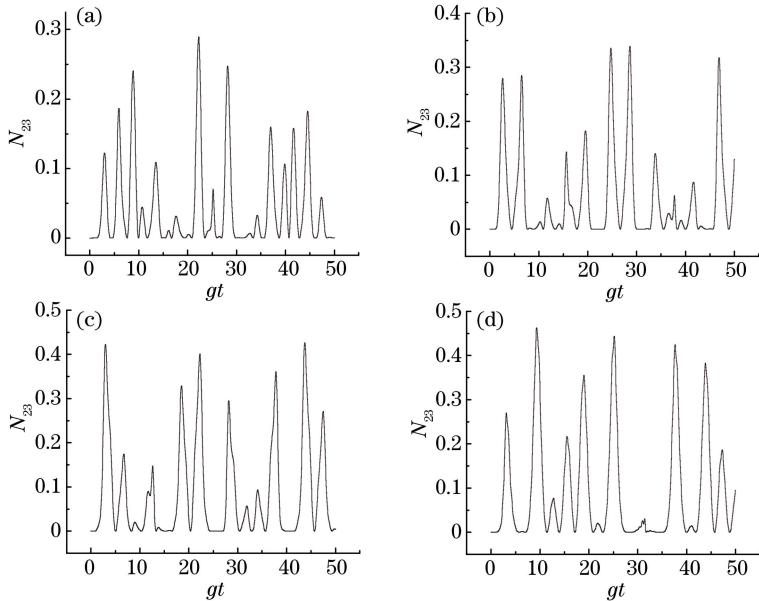


图 3 N_{23} 随规范时间 gt 的演化。(a) $J=0.5g$; (b) $J=1.0g$; (c) $J=2.0g$; (d) $J=5.0g$

Fig. 3 Evolution of N_{23} with scaled time gt . (a) $J=0.5g$; (b) $J=1.0g$; (c) $J=2.0g$; (d) $J=5.0g$

关于原子 3 和原子 4 间纠缠,以及原子 1 和原子 4 间纠缠,根据对称性,不难得出原子 3 和原子 4 间纠缠度满足 $N_{34}=N_{23}$,原子 1 和原子 4 间纠缠度满足 $N_{14}=N_{12}$ 。

4 腔场间的纠缠特性

利用负本征值法度量两腔场间的纠缠。利用(3)式,采用与原子间纠缠计算相同的方法,不难得出腔场1与腔场2间的纠缠度为

$$N_{c12} = \sqrt{|CDEFGH|^4 + 4|AB|^2} - |CDEFGH|^2. \quad (11)$$

同样,参数 J 分别等于 $0.5g$ 、 $1.0g$ 、 $2.0g$ 和 $5.0g$ 时, N_{c12} 随规范时间 gt 的演化曲线如图4所示。由图4可见, N_{c12} 随时间作不规则振荡,并且随耦合系数 J 的增大,振荡频率增大,曲线峰值减小,平均值减小,重心下移。当 $J = 0.5g$ 时, $\bar{N}_{c12} = 0.03047$; $J = 1.0g$ 时, $\bar{N}_{c12} = 0.01896$; $J = 2.0g$ 时, $\bar{N}_{c12} = 0.00442$; $J = 5.0g$ 时, $\bar{N}_{c12} = 0.00075$ 。这表明随耦合系数 J 的增大,腔1与腔2间的纠缠减弱。物理机制上,两个相互耦合的腔模哈密顿量可等效为两个二能级原子与两个独立场模的非共振作用^[18]。腔场间耦合增强,相当于系统失谐量增加,因而腔模被激发的可能性降低。因此,随耦合系数 J 的增大,腔场分享激发子的几率减小,导致腔场间纠缠减弱。

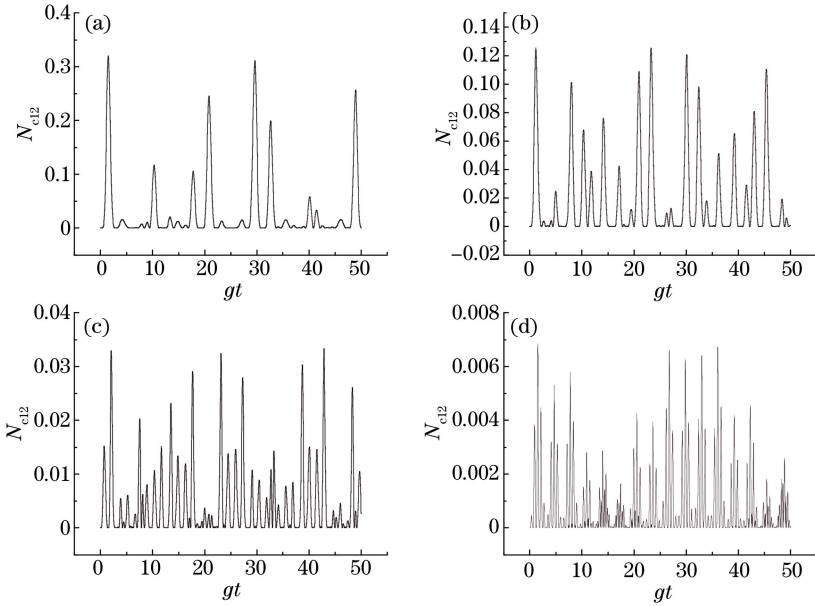


图4 N_{c12} 随规范时间 gt 的演化。(a) $J=0.5g$; (b) $J=1.0g$; (c) $J=2.0g$; (d) $J=5.0g$

Fig. 4 Evolution of N_{c12} with scaled time gt . (a) $J=0.5g$; (b) $J=1.0g$; (c) $J=2.0g$; (d) $J=5.0g$

同样,通过类似(11)式的计算,不难得出腔场2与腔场3间的纠缠度为

$$N_{c23} = \sqrt{|ABCDEF|^4 + 4|GH|^2} - |ABCDEF|^2, \quad (12)$$

N_{c23} 随规范时间 gt 的演化数值计算结果如图5所示。图5显示结果与图4相似,即随耦合系数 J 的增大,腔场2与腔场3间的纠缠减弱。

同样,根据对称性,不难得出腔场3与腔场4间的纠缠度满足 $N_{c34} = N_{c23}$,腔场1与腔场4间的纠缠度满足 $N_{c14} = N_{c12}$ 。

5 结 论

研究两维耦合腔系统,考虑每个腔囚禁一个二能级原子,并且原子跃迁频率等于腔场频率的情况。采用数值计算方法,给出两原子之间纠缠以及两个腔之间纠缠的演化曲线。讨论了腔与腔之间耦合系数变化对纠缠的影响。研究表明,随腔与腔之间耦合系数的增大,原子与原子间纠缠曲线峰值增大,重心上移,平均值增大。相反,随腔与腔之间耦合系数的增大,腔与腔之间的纠缠曲线峰值减小,重心下移,平均值减小。这表明随腔与腔之间耦合系数的增大,原子与原子之间纠缠增强,腔与腔之间纠缠减弱。

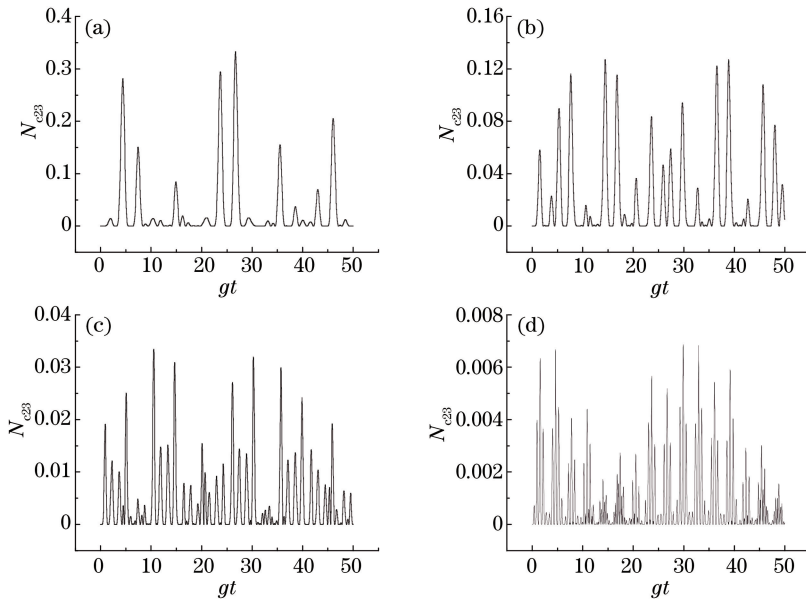


图 5 N_{c23} 随规范时间 gt 的演化。(a) $J=0.5g$; (b) $J=1.0g$; (c) $J=2.0g$; (d) $J=5.0g$

Fig. 5 Evolution of N_{c23} with scaled time gt . (a) $J=0.5g$; (b) $J=1.0g$; (c) $J=2.0g$; (d) $J=5.0g$

参 考 文 献

- Li X Y, Pan Q, Jing J T, *et al.*. Quantum dense coding exploiting a bright Einstein-Podolsky-Rosen beam[J]. Physical Review Letters, 2002, 88(4): 047904.
- Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, *et al.*. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. Physical Review Letters, 1993, 70(13): 1895-1899.
- Abdi M, Pirandola S, Tombesi P, *et al.*. Entanglement swapping with local certification: Application to remote micromechanical resonators[J]. Physical Review Letters, 2012, 109(14): 143601.
- Hu Yaohua, Tan Yonggang, Liu Qiang. Entanglement and quantum discord in a double J-C model with intensity-dependent coupling[J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(7): 074202.
胡要花, 谭勇刚, 刘 强. 强度相关耦合双 Jaynes-Cummings 模型中的纠缠和量子失谐[J]. 物理学报, 2013, 62(7): 074202.
- Wu C, Fang M F. The entanglement of two moving atoms interacting with a single-mode field via a three-photon process [J]. Chinese Physics B, 2010, 19(2): 020309.
- Ji X, Lü T Q, Zhang S. Entanglement dynamics of two distant atoms in two detuning cavities[J]. Chinese Physics B, 2010, 19(11): 110304.
- Wu P P, Shan C J, Liu T K. Entanglement properties of entangled coherent state in symmetrical phase space interacting with entangled atoms[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2014, 54(4): 1352-1361.
- Guo Zhanying, Zhang Xinhai, Xiao Ruihua, *et al.*. Dynamics of quantum entanglement in a two-qubit XXZ Heisenberg system[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(7): 0727001.
郭战营, 张新海, 肖瑞华, 等. 两粒子 XXZ 海森堡系统中的量子纠缠动力学[J]. 光学学报, 2014, 34(7): 0727001.
- Zheng Xiaolan, Zhang Bin. Quantum entanglement and correlation between two qubits induced by a heat bath[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(1): 0127002.
郑小兰, 张 斌. 热库诱导的两比特量子纠缠与量子关联[J]. 光学学报, 2014, 34(1): 0127002.
- Wang Chengzhi, Yu Xiaoqin, Li Chunxian, *et al.*. Entanglement between two atoms mediated by two dissipative optical cavities[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(s2): s227001.
王成志, 喻小琴, 李春先, 等. 耗散双光腔调制的两原子间的纠缠[J]. 光学学报, 2013, 33(s2): s227001.
- Hagley E, Maitre X, Nogues G, *et al.*. Generation of Einstein-Podolsky-Rosen pairs of atoms[J]. Physical Review Letters, 1997, 79(1): 1-5.

- 12 Osnaghi S, Bertet P, Auffeves A, *et al.*. Coherent control of an atomic collision in a cavity[J]. Physical Review Letters, 2001, 87(3): 037902.
- 13 Rauschenbeutel A, Nogues G, Osnaghi S, *et al.*. Step-by-step engineered multiparticle entanglement[J]. Science, 2000, 288(5473): 2024-2028.
- 14 Rauschenbeutel A, Nogues G, Osnaghi S, *et al.*. Coherent operation of a tunable quantum phase gate in cavity QED[J]. Physical Review Letters, 1999, 83(24): 5166-5169.
- 15 Ye S Y, Zhong Z R, Zheng S B. Deterministic generation of three-dimensional entanglement for two atoms separately trapped in two optical cavities[J]. Physical Review A, 2008, 77(1): 014303.
- 16 Zheng S B, Yang Z B, Xia Y. Generation of two-mode squeezed states for two separated atomic ensembles via coupled cavities[J]. Physical Review A, 2010, 81(1): 015804.
- 17 Yin Z Q, Li F L. Multiatom and resonant interaction scheme for quantum state transfer and logical gates between two remote cavities via an optical fiber[J]. Physical Review A, 2007, 75(1): 012324.
- 18 Ogden C D, Irish E K, Kim M S. Dynamics in a coupled-cavity array[J]. Physical Review A, 2008, 78(6): 063805.
- 19 Serafini A, Mancini S, Bose S. Distributed quantum computation via optical fibers[J]. Physical Review Letters, 2006, 96(1): 010503.
- 20 Cho J, Angelakis D G, Bose S. Fractional quantum hall state in coupled cavities[J]. Physical Review Letters, 2008, 101(24): 246809.
- 21 Lin G W, Zou X B, Lin X M, *et al.*. Scalable, high-speed one-way quantum computer in coupled-cavity arrays[J]. Applied Physics Letters, 2009, 95(22): 224102.
- 22 Zhong Z R, Lin X, Zhang B, *et al.*. Controllable operation for distant qubits in a two-dimensional quantum network[J]. European Physical Journal D, 2012, 66(12): 316.
- 23 Akhtarshenas S J, Farsi M. Negativity as entanglement degree of the Jaynes-Cummings model[J]. Physica Scripta, 2007, 75(5): 608-614.