

# 在超强耦合条件下对量子比特纠缠保持的研究

田贵花<sup>1</sup> 董 锬<sup>1</sup> 钟树泉<sup>2</sup>

<sup>1</sup>北京邮电大学理学院, 北京 100876

<sup>2</sup>北京邮电大学信息光子学与光通信国家重点实验室, 北京 100876

**摘要** 研究了与处于相干态的量子谐振腔相耦合的,具有相互作用的两个量子比特的动力学问题。量子比特与量子谐振腔之间处于超强耦合并且它们之间的失谐量很大。利用绝热近似的方法,可以通过选择量子谐振腔相干态的平均粒子数、量子谐振腔与量子比特的耦合强度、量子谐振腔以及量子比特各自的频率和量子比特之间的相互作用强度这4个参数,来保持量子比特的纠缠。如果量子比特之间的相互作用强度为负数,可以使它们之间的纠缠保持很长时间。这些结果不同于之前的研究,并做出了对应的解释。保持纠缠使得上述结果可能会应用到量子信息处理中。

**关键词** 量子光学; 拉比模型; 纠缠; 绝热近似

**中图分类号** O431.2 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/AOS201636.0427002

## Investigation on Maintaining Entanglement of Two Qubits in Ultrastrong Coupling Region

Tian Guihua<sup>1</sup> Dong Kun<sup>1</sup> Zhong Shuquan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China

<sup>2</sup>State Key Laboratory of Information Photonics and Optical Communications, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China

**Abstract** The dynamics of two qubits with inter-qubit interaction is investigated by an external quantum oscillator in its coherent state. The coupling between the two qubits and the oscillator is in the ultra-strong region and their detuning is large. With adiabatic approximation method, the reservation of one initially entangled state of two qubits by the quantum oscillator is accomplished through the careful choice of the four parameters, the average number of the coherent state of oscillator, the ultra-strong coupling strength, the ratio of two frequencies of qubit and oscillator, and the inter-interaction coupling of two qubits. If the inter-qubit interaction strength is negative, their entanglement can be kept further for a much longer time. These results are different from those in the previous studies and reasonable explanations are given. Maintaining the entanglement of two qubits with very high fidelity will be helpful for the quantum information process.

**Key words** quantum optics; Rabi model; entanglement; adiabatic approximation

**OCIS codes** 270.6620; 020.5580; 270.1670

## 1 引 言

当量子比特与外界装置耦合较弱时,控制量子比特是比较困难的<sup>[1-6]</sup>。为了克服上述困难,研究者开始研究在强耦合和超强耦合条件下控制量子比特的可能性<sup>[1-9]</sup>。随着腔量子电动力学(QED)和电路QED的发展,这种类型的实验已经可以实现了,而且可以加入量子比特之间的相互作用以及产生不同类型的量子比特。上述实验装置可以更好地应用到量子信息处理(QIP)中,比如对量子信息的调制、存贮和读取<sup>[1-6]</sup>。

收稿日期: 2015-10-23; 收到修改稿日期: 2015-12-14

基金项目: 国家自然科学基金(10875018)、国家973计划(2010CB923202)

作者简介: 田贵花(1967—),女,博士,教授,主要从事广义相对论和量子光学方面的研究。E-mail: tgh-2000@263.net

量子比特与量子谐振腔强耦合的实验成功,促使大家研究除旋转波近似(RWA)之外求解拉比模型的方法。研究得到了许多关于拉比模型的新结果<sup>[10-14]</sup>。在文献[15]中计算了强耦合零失谐条件下的拉比模型。在超强耦合大失谐的条件下,拉比模型出现了很多有趣的现象,比如辐射频率的改变,以及当量子谐振腔的初态为相干态或热态时,与量子谐振腔耦合的量子比特的信号会出现崩塌和复生<sup>[10-14]</sup>。之后,两个量子比特之间纠缠的崩塌和复生现象也得到了研究<sup>[12]</sup>。

在最近的研究中,提到一种绝热近似,当耦合强度达到强耦合或超强耦合并且大失谐时,有着很好的表现<sup>[10,12,14,16-22]</sup>。 $\omega_0$ 和 $\omega$ 分别代表量子比特和量子谐振腔的频率,当 $\omega_0 \ll \omega$ 时,对于任意的耦合强度绝热近似都成立<sup>[14]</sup>。当 $\omega_0 \approx \omega$ 时,绝热近似存在误差,但相关的文献证明这些误差是很小的<sup>[23-25]</sup>。当 $\omega_0 \gg \omega$ 时,情形变得比较复杂。有一些关于绝热近似的修正方法,可以提升基态本征值和本征向量的精度,但是对于激发态并不适用<sup>[26]</sup>。当 $\omega_0 \gg \omega$ 且耦合强度较小时,激发态会出现所谓的共振现象,这是绝热近似出现误差的根本原因<sup>[11,27-28]</sup>。但当耦合强度很大时,共振现象带来的影响将变得很小,绝热近似又有了很好的结果<sup>[14,29]</sup>。综上所述,在耦合强度很强时,绝热近似还是可以很好地描述拉比模型的。

受到上述工作的启发,将着重研究如何利用外部设备来保持量子比特的纠缠。本文将重点研究如何保持两个处于贝尔态的量子比特的纠缠。外部装置将选择拉比模型,拓展文献[12],加入了两个量子比特之间的相互作用,利用绝热近似的方法,得到当两个量子比特之间的相互作用为负数时,两个量子比特之间的纠缠可以保持很长时间,并且相对于其他系统参数,两个量子比特之间的相互作用对纠缠的保持更加有效,而且,不再会出现纠缠的突然崩塌现象。

本文的结构如下:首先将利用绝热近似求解拉比模型;然后研究系统的动力学问题并给出数值计算的结果;最后将讨论系统参数对纠缠的影响并给出最后的结论。随着超导电路(SC)的发展,已经可以尽量避免外界噪声对量子比特的影响。因此在下面的讨论中,将不再考虑环境噪声对量子比特的作用<sup>[10-12]</sup>。

## 2 拉比模型以及绝热近似方法

拉比模型<sup>[30]</sup>经常应用到实验装置中。拉比模型的哈密顿量为<sup>[30]</sup>(以 $z$ 轴为量子化轴)

$$H_{\text{Rabi}} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \hbar\omega\frac{\beta}{2}(\hat{a}^+ + \hat{a})(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-), \quad (1)$$

式中 $\hat{\sigma}_z$ 和 $\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_x$ 是量子比特的泡利算符, $\hat{a}^+$ 和 $\hat{a}$ 各自表示量子谐振腔的产生算符和湮灭算符, $\beta$ 代表量子比特和量子谐振腔之间的耦合强度。

尽管拉比模型的形式很简单,但其解析解的形式很复杂,因此有许多近似的方法应用到求解拉比模型中。当光场的频率和原子的频率比较接近,以及原子与光场的耦合强度比较弱时,可以忽略 $\hat{a}^+\hat{\sigma}_+$ 和 $\hat{a}\hat{\sigma}_-$ 这两项,对应的哈密顿量变为杰尼斯-卡明斯(JC)模型<sup>[31]</sup>

$$H_{\text{JC}} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \hbar\omega\frac{\beta}{2}(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^+\hat{\sigma}_-), \quad (2)$$

即是RWA。

为了计算方便,将拉比模型的哈密顿量,沿 $y$ 轴旋转 $\pi/4$ ,使得 $\hat{\sigma}_z \rightarrow \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_x \rightarrow -\hat{\sigma}_z$ 。也可以通过么正变换来表示:

$$\begin{cases} \hat{H} = \hat{V}\hat{H}_{\text{Rabi}}\hat{V}^+ \\ \hat{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (3)$$

将(3)式拓展到双量子比特并加入量子比特之间的相互作用: $\kappa\hbar\omega_0\hat{\sigma}_x^1\hat{\sigma}_x^2$ ( $\kappa$ 为相互作用参数)。最终哈密顿量的形式为

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \hbar\omega\frac{\beta}{2}(\hat{a}^+ + \hat{a})(\hat{\sigma}_z^1 + \hat{\sigma}_z^2) - \hbar\omega_0\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x^1 + \hat{\sigma}_x^2) - \kappa\hbar\omega_0\hat{\sigma}_x^1\hat{\sigma}_x^2, \quad (4)$$

性质为

$$\begin{cases} \sigma_z^i = \sigma_+^i + \sigma_-^i \\ \sigma_+^i |+\rangle = 0 \\ \sigma_+^i |-\rangle = |+\rangle \\ \sigma_-^i |-\rangle = 0 \\ \sigma_-^i |+\rangle = |-\rangle \end{cases}, \quad (5)$$

式中  $|+\rangle, |-\rangle$  是算符  $\sigma_x^i$  的本征函数。

当量子比特与量子谐振腔超强耦合并且大失谐 ( $\hbar\omega \gg \hbar\omega_0$ ) 时, 可以把量子比特部分的能级当微扰来处理, 先考虑量子谐振腔以及耦合部分的能级, 即

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega \frac{\beta}{2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})(\hat{\sigma}_z^1 + \hat{\sigma}_z^2), \quad (6)$$

$\hat{\sigma}_z^1 + \hat{\sigma}_z^2$  部分的能级为

$$\begin{cases} |1, 1\rangle = |\uparrow, \uparrow\rangle \\ |1, -1\rangle = |\downarrow, \downarrow\rangle \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle), \\ |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle) \end{cases}, \quad (7)$$

式中  $\hat{\sigma}_z |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle, \hat{\sigma}_z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$ 。

剩余部分  $\hat{H}_0$  的本征向量为位移粒子数态:

$$|N_m\rangle = \hat{D}(-m\beta)|N\rangle = \exp(m\beta)(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)|N\rangle, \quad (8)$$

式中  $\hat{D}(-m\beta)$  是位移算符。与(7)式给出的本征态  $|j, m\rangle, j=1, 0, m=0, \pm 1$  的直积为:

$$\hat{H}_0 |j, m\rangle |N_m\rangle = \hbar\omega(N - m^2\beta^2) |j, m\rangle |N_m\rangle, \quad (9)$$

可以看到  $|0, 0\rangle |N_0\rangle$  是  $\hat{H}$  的本征态, 对应的本征值为  $\hbar\omega\left(N + \kappa\frac{\omega_0}{\omega}\right)$ 。利用  $|j, m\rangle |N_m\rangle$  这组基矢, 去展开哈密顿量  $\hat{H}$ 。根据绝热近似, 只保留  $N$  值相同的项, 这样可以实现矩阵的分块对角化<sup>[8,10]</sup>, 其中每个子块的矩阵形式为

$$\hat{H}_N = \hbar\omega \begin{pmatrix} N - \beta^2 & \Omega_{1,N} & \Omega_{2,N} \\ \Omega_{1,N} & N - \kappa\frac{\omega_0}{\omega} & \Omega_{1,N} \\ \Omega_{2,N} & \Omega_{1,N} & N - \beta^2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\Omega_{1N} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega_0}{\omega} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right) L_N(\beta^2), \quad (11)$$

$$\Omega_{2N} = -\kappa \frac{\omega_0}{\omega} \exp(-2\beta^2) L_N(4\beta^2), \quad (12)$$

最后得到的本征值和本征向量为

$$\tilde{E}_{N,0}^0 = \hbar\omega(N - \beta^2 - \Omega_{2N}), \quad (13)$$

$$|\tilde{E}_{N,0}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle |N_1\rangle - |1, -1\rangle |N_{-1}\rangle), \quad (14)$$

$$\tilde{E}_{N,\pm}^0 = \hbar\omega \left( N - \kappa\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\tilde{T}_0 \pm \sqrt{\tilde{T}_0^2 + 8\Omega_{1N}^2}}{2} \right), \quad (15)$$

$$|\tilde{E}_{N,\pm}^0\rangle = \frac{1}{\tilde{L}_{N,\pm}} (|1, 1\rangle |N_1\rangle + |1, -1\rangle |N_{-1}\rangle) + \frac{\tilde{Y}_{N,\pm}}{\tilde{L}_{N,\pm}} |1, 0\rangle |N_0\rangle, \quad (16)$$

$$\tilde{T}_0 = -\beta^2 + \kappa\frac{\omega_0}{\omega} + \Omega_{2N}, \quad (17)$$

$$\tilde{Y}_{N,\pm} = \left( -\tilde{T}_0 \pm \sqrt{\tilde{T}_0^2 + 8\Omega_{1N}^2 / 2\Omega_{1N}} \right), \quad (18)$$

$$\tilde{L}_{N,\pm}^2 = \tilde{Y}_{N,\pm}^2 + 2, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

需要说明的是,  $L_N(\beta^2), L_N(4\beta^2)$  是拉盖尔多项式。

### 3 系统动力学问题

为了拉比模型能够应用到实际的 QIP 系统中, 对其系统随时间演化的动力学行为的研究显得尤为重要<sup>[32-34]</sup>。

令量子比特的初态处于一种最大的纠缠态(贝尔态)上

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle \right), \quad (20)$$

量子谐振腔的初态处于相干态  $|\alpha\rangle$  上。两个量子比特演化到其他态(即:  $|1, 1\rangle = |\uparrow, \uparrow\rangle$  和  $|1, -1\rangle = |\downarrow, \downarrow\rangle$ ) 的概率为

$$T(t) = \sum_{N=0}^{\infty} p(N) \frac{\tilde{Y}_{N,+}^2}{\tilde{L}_{N,+}^4} \left\{ 1 - \cos \frac{1}{\hbar} \left[ (\tilde{E}_{N,+}^0 - \tilde{E}_{N,-}^0) t \right] \right\}, \quad (21)$$

式中  $p(N) = \exp(-\alpha\alpha^*) |\alpha|^2 / N!$ ,  $t$  为时间。

由(21)式可知参数  $|\alpha|^2, \frac{\omega_0}{\omega}, \beta, \frac{\kappa\omega_0}{\omega}$  会影响系统的动力学问题。  $T(t)$  关于不同参数的图像如图 1 所示。

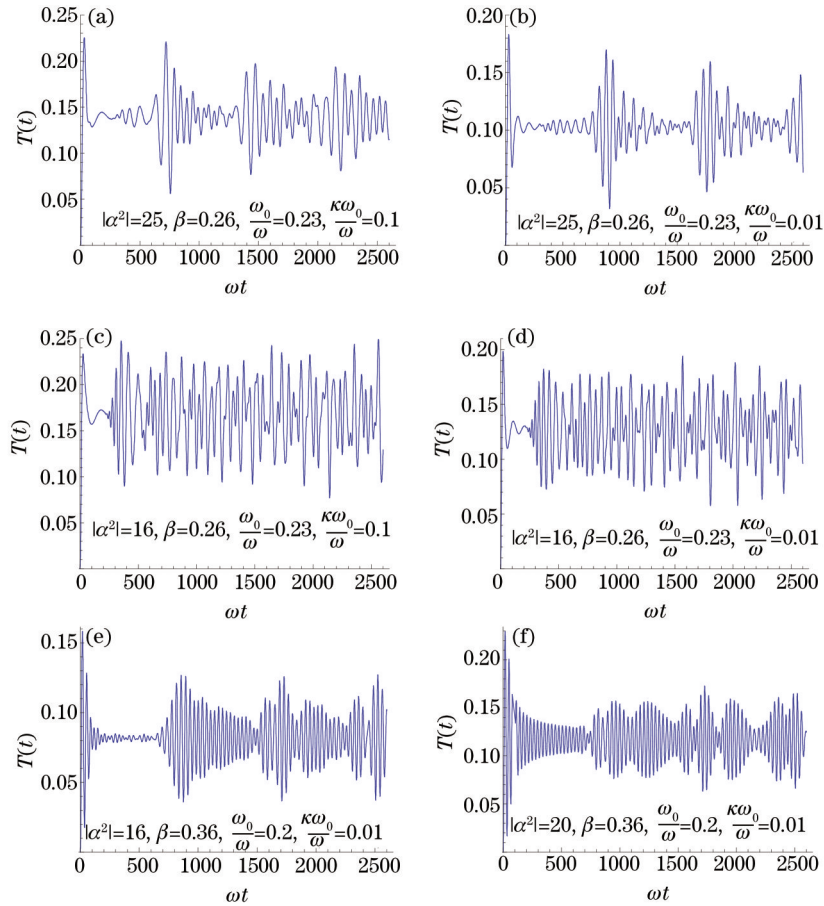


图 1 参数  $|\alpha|^2, \frac{\omega_0}{\omega}, \beta, \frac{\kappa\omega_0}{\omega}$  对概率  $T(t)$  演化的影响

Fig.1 Influence of parameters of  $|\alpha|^2, \frac{\omega_0}{\omega}, \beta$  and  $\frac{\kappa\omega_0}{\omega}$  on the time evolution of  $T(t)$

从图1中可以看出一般情况下  $T(t)$  不为零。因此量子比特保持在初态  $|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle)$  的概率  $R(t) = 1 - 2T(t)$  不会始终为1,即量子比特不会始终保持在初态  $|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle)$  上。

在图2中可以看到在某些参数下,  $T(t)$  的值很大,因而  $R(t)$  的值会很小,即量子比特几乎不再保持在初态  $|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle)$  上。而且相对于其他参数,参数  $\beta$  对纠缠动力学问题的影响更加敏感。

从图1和图2可以看出  $T(t)$  一般不为零,但由于(11)~(21)式的复杂性,可以通过参数的选择使得  $T(t)$  变得很小。从图3可以看出选择特殊的参数时,  $T(t)$  可以变得非常小,这样量子比特几乎一直保持在初态上,即纠缠态  $|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle)$ , 概率接近97%。比较图3中的三幅图可以看出参数  $\beta, |\alpha|^2$  较小的改变对  $T(t)$  的影响很小。

但是,当量子比特之间的相互作用参数  $\kappa$  为正数时,  $T(t)$  很难继续减小了。从图4可以看到,  $\kappa$  为负数时,  $T(t)$  接近零,也就是说两个量子比特几乎一直保持在初态上。

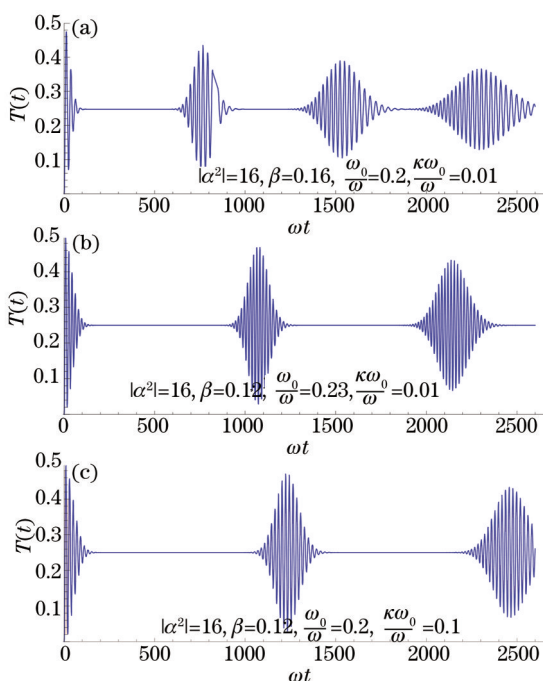


图2  $T(t)$  在相同参数  $|\alpha|^2$  不同参数  $\frac{\omega_0}{\omega}, \beta, \frac{\kappa\omega_0}{\omega}$  下的时域演化

Fig.2 Time evolution of  $T(t)$  with the same parameter  $|\alpha|^2$ ,

but different parameters  $\beta, \frac{\omega_0}{\omega}, \kappa \frac{\omega_0}{\omega}$ .

在超强耦合的区间,  $T(t)$  的表达式为

$$T(t) = \sum_{N=0}^{\infty} p(N) \frac{\tilde{Y}_{N,+}^2}{\tilde{L}_{N,+}^4} [1 - \cos(\omega_{N,0}t)], \quad (22)$$

式中  $\omega_{N,0} = \tilde{E}_{N,+}^0 - \tilde{E}_{N,-}^0$ 。拉盖尔多项式  $L_N(\beta^2), L_N(4\beta^2)$  使得(22)式与参数  $\beta, N, |\alpha|^2$  相关,而且呈非线性的复杂关联。对于某些特定的  $N$ ,使得  $\frac{\tilde{Y}_{N,+}^2}{\tilde{L}_{N,+}^4}$  有可能接近于零。当  $|\alpha|^2 = N_0$  时,量子谐振腔相干态的表达式  $p(N)$  达到

最大值。综合上面两个因素,在  $|\alpha|^2 = N_0$  周围相对较大的区间内,  $\frac{\tilde{Y}_{N,+}^2}{\tilde{L}_{N,+}^4}$  足够小的时候,  $T(t)$  趋近于零,图5给

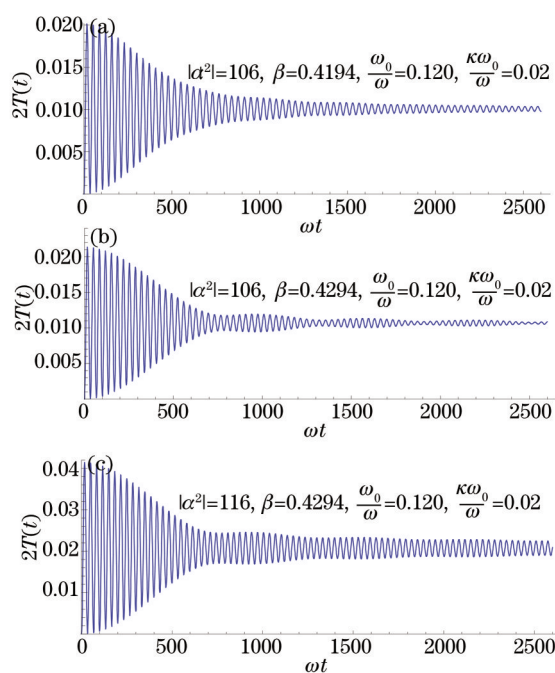


图3  $2T(t)$  在相同参数  $\frac{\omega_0}{\omega} = 0.12, \kappa \frac{\omega_0}{\omega} = 0.02$  不同参数  $|\alpha|^2, \beta$  下的时域演化

Fig.3 Time evolution of  $2T(t)$  with the same parameters

$\frac{\omega_0}{\omega}$  and  $\kappa \frac{\omega_0}{\omega}$ , but different parameters  $|\alpha|^2$  and  $\beta$



出了  $S_N = \frac{\tilde{Y}_{N,+}^2}{\tilde{I}_{N,+}^4}$ ,  $|\alpha|^2 = N_0$  时周围相对较大区间内的数值, 明显可以看到  $S_N$  的数值足够小。只要参数  $\frac{\omega_0}{\omega}$ ,  $\kappa \frac{\omega_0}{\omega}$ ,  $\beta$  选得合适, 便可以实现上面的结果, 就像图 3 和图 4 所呈现的一样。

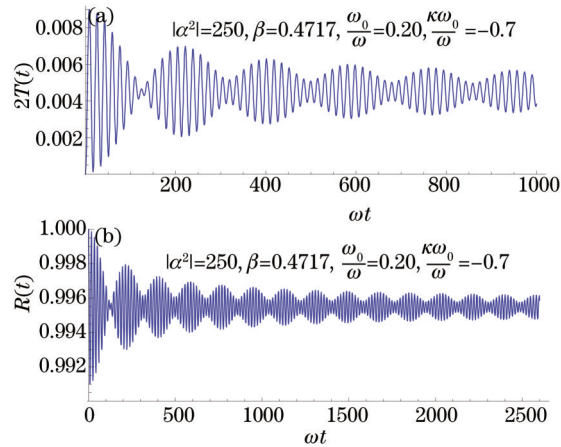


图 4  $2T(t)$  和  $R(t)$  的时域演化图

Fig.4 Time evolution of  $2T(t)$  and  $R(t)$

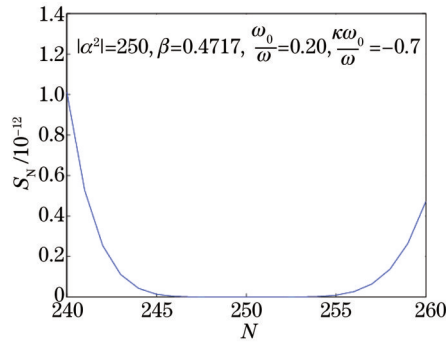


图 5  $S_N$  随  $N$  的变化图

Fig.5  $S_N$  versus  $N$

上述所有结果都依赖于(21)式的复杂性, 这些都发生在超强耦合的区间。当耦合较弱时便会出现不同的现象, 即崩塌和复生现象<sup>[35]</sup>。在这里给出文献[36]的计算结果:

$$W(t) = \sum_{N=0}^{\infty} p(N) \left[ \frac{\Delta^2}{\tilde{\Omega}_N^2} + \frac{4g^2(N+1)}{\tilde{\Omega}_N^2} \cos(\tilde{\Omega}_N t) \right], \quad (23)$$

式中  $\Delta = \omega - \omega_0$  是失谐参数,  $g$  是耦合强度,  $\tilde{\Omega}_N = \Delta^2 + 4g^2(N+1)$ 。(23)式是一些与时间相关的项在叠加, 在最开始时, 这些项保持着相关性, 随着时间的演化, 由于相关项受到了其他的激发 (如  $\tilde{\Omega}_N$ ) 变得不再相关, 便出现了崩塌现象。再往后演化, 便会出现复生现象<sup>[36]</sup>。因为即使改变系统参数,  $\frac{\Delta^2}{\tilde{\Omega}_N^2}$ ,  $\frac{4g^2(N+1)}{\tilde{\Omega}_N^2}$  这些项也不会变得很小, 因此  $W(t)$  不会一直为零。

## 4 总 结

研究了与量子谐振腔进行超强耦合的, 具有内在相互作用的量子比特的纠缠动力学问题。当量子比特初态处于贝尔态  $\left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle) \right]$ , 量子谐振腔初态处于相干态时, 通过选择系统的参数, 会出现一些新的现象。量子比特会有很高的概率保持在初始状态上, 当相互作用参数为负时, 概率接近于 1。这个现象只出现在超强耦合条件下的拉比模型中。上述结论有可能应用到 QIP 中。

- 1 Z L Xiang, S Ashhab, J Q You, *et al.*. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems[J]. *Rev Mod Phys*, 2013, 85(1): 623–653.
- 2 J Q You, J S Tsai, F Nori. Controllable manipulation and entanglement of macroscopic quantum states in coupled charge qubits[J]. *Phys Rev B*, 2003, 68(2): 024510.
- 3 J Q You, F Nori. Superconducting circuits and quantum information[J]. *Phys Today*, 2005, 58(11): 42–48.
- 4 J Q You, F Nori. Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits[J]. *Nature*, 2011, 474(7353): 589–597.
- 5 M Wallquist, K Hammerer, P Rabl, *et al.*. Hybrid quantum devices and quantum engineering[J]. *Phys Scr*, 2009, 137: 014001.
- 6 A Wallraff, D I Schuster, A Blais, *et al.*. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics[J]. *Nature*, 2004, 431(7005): 162–167.
- 7 T Niemczyk, F Deppe, H Huebl, *et al.*. Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime[J]. *Nat Phys*, 2010, 6(10): 772–776.
- 8 P D Nation, J R Johansson, M P Blencowe, *et al.*. Colloquium: Stimulating uncertainty: Amplifying the quantum vacuum with superconducting circuits[J]. *Rev Mod Phys*, 2012, 84(1): 1–24.
- 9 J M Martinis, S Nam, J Aumentado. Rabi oscillations in a large Josephson-Junction qubit[J]. *Phys Rev Lett*, 2002, 89(11): 117901.
- 10 E K Irish, J Gea-Banacloche, I Martin, *et al.*. Dynamics of a two-level system strongly coupled to a high-frequency quantum oscillator [J]. *Phys Rev B*, 2005, 72(19): 195410.
- 11 E K Irish. Generalized rotating-wave approximation for arbitrarily large coupling[J]. *Phys Rev Lett*, 2007, 99(17): 173601.
- 12 S Agarwal, S M Hashemi Rafsanjani, J H Eberly. Tavis-Cummings model beyond the rotating wave approximation: Quasi-degenerate qubits[J]. *Phys Rev A*, 2012, 85(4): 043815.
- 13 Q Ai, Y Li, H Zheng, *et al.*. Quantum anti-Zeno effect without rotating wave approximation[J]. *Phys Rev A*, 2010, 81(4): 042116.
- 14 S Ashhab, F Nori. Qubit-oscillator systems in the ultrastrong-coupling regime and their potential for preparing nonclassical state[J]. *Phys Rev A*, 2010, 81(4): 042311.
- 15 A T Sornborger, A N Cleland, M R Geller. Superconducting phase qubit coupled to a nanomechanical resonator: Beyond the rotating-wave approximation[J]. *Phys Rev A*, 2004, 70(5): 052315.
- 16 S Y Hao, Y Xia, J Song, *et al.*. One-step generation of multiatom Greenberger - Horne - Zeilinger states in separate cavities via adiabatic passage[J]. *J Opt Soc Am B*, 2013, 30(2): 468–474.
- 17 M Lu, Y Xia, J Song, *et al.*. Driving three atoms into a singlet state in an optical cavity via adiabatic passage of a dark state[J]. *J Phys B*, 2013, 46(1): 015502.
- 18 Y H Chen, Y Xia, J Song. Effective protocol for generation of multiple atoms entangled states in two coupled cavities via adiabatic passage [J]. *Quan Inf Process*, 2013, 12(12): 3771–3783.
- 19 Y H Chen, Y Xia, J Song, *et al.*. Shortcuts to adiabatic passage for multiparticles in distant cavities: applications to fast and noise-resistant quantum population transfer, entangled states' preparation and transition[J]. *Laser Phys Lett*, 2014, 11(11): 115201.
- 20 Y H Chen, Q Q Chen, Y Xia, *et al.*. Efficient shortcuts to adiabatic passage for fast population transfer in multiparticle systems[J]. *Phys Rev A*, 2014, 89(3): 033856.
- 21 O Gittsovich, N J Beaudry, V Narasimhaচার, *et al.*. Squashing model for detectors and applications to quantum-key-distribution protocols [J]. *Phys Rev A*, 2015, 89(1): 012325.
- 22 Y H Chen, Y Xia, Q Q Chen, *et al.*. Fast and noise-resistant implementation of quantum phase gates and creation of quantum entangled states[J]. *Phys Rev A*, 2015, 91(1): 012325.
- 23 J Hausinger, M Grifoni. Qubit-oscillator system: An analytical treatment of the ultrastrong coupling regime[J]. *Phys Rev A*, 2010, 82(6): 062320.
- 24 T Liu, K L Wang, M Feng. The generalized analytical approximation to the solution of the single-mode spin-boson model without rotating-wave approximation[J]. *Europhysics Lett*, 2009, 86(5): 054003.
- 25 J Casanova, G Romero, I Lizuain, *et al.*. Deep strong coupling regime of the Jaynes-Cummings model[J]. *Phys Rev Lett*, 2010, 105(26): 263603.
- 26 M J Hwang, M S Choi. Variational study of a two-level system coupled to a harmonic oscillator in an ultrastrong-coupling regime[J]. *Phys Rev A*, 2010, 82(2): 025802.
- 27 I D Feranchuk, L I Komarov, A P Ulyanekov. Two-level system in a one-mode quantum field: Numerical solution on the basis of the

- operator method[J]. *J Phys A: Math Gen*, 1996, 29(14): 4035–4047.
- 28 M A Talab, S Guerin, H R Jauslin. Quantum averaging and resonances: Two-level atom in a one-mode quantized field[J]. *J Math Phys*, 2005, 46(4): 042311.
- 29 F A Wolf, F Vallone, G Romero, *et al.*. Dynamical correlation functions and the quantum Rabi model[J]. *Phys Rev A*, 2013, 87(2): 023835.
- 30 I I Rabi. Space quantization in a gyrating magnetic field[J]. *Phys Rev*, 1937, 51(8): 652–654.
- 31 E T Jaynes, F W Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser[J]. *Proc IEEE*, 1963, 51(1): 89–109.
- 32 Li Fang, Zhou Yaoyao, Jia Xiaojun. Entanglement enhancement of bipartite entangled states through coherent feedback control[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(10): 1027001.  
李 芳, 周瑶瑶, 贾晓军. 相干反馈控制实现两组份纠缠态光场纠缠增强[J]. *光学学报*, 2014, 34(10): 1027001.
- 33 Guo Zhanying, Zhang Xinhai, Xiao Ruihua, *et al.*. Dynamics of quantum entanglement in a two-qubit XXZ Heisenberg system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(7): 0727001.  
郭战营, 张新海, 肖瑞华, 等. 两粒子 XXZ 海森堡系统中的量子纠缠动力学[J]. *光学学报*, 2014, 34(7): 0727001.
- 34 Zhai Shuqin, Yang Rui. Three-color and tripartite entangled state from cascaded type I second-harmonic generations[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(4): 0427002.  
翟淑琴, 杨 瑞. I类倍频级联过程中的三色三组份纠缠[J]. *光学学报*, 2014, 34(4): 0427002.
- 35 Ting Yu, J H Eberly. Sudden death of entanglement [J]. *Science*, 2009, 323(5914): 598–601.
- 36 M O Scully, M Zubairy. *Quantum optics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

栏目编辑: 刘丰瑞