

# 多频外差原理相位解包裹方法的改进

陈松林<sup>1,2</sup> 赵吉宾<sup>1</sup> 夏仁波<sup>1</sup>

<sup>1</sup>中国科学院沈阳自动化研究所装备制造技术研究室, 辽宁 沈阳 110016

<sup>2</sup>中国科学院大学, 北京 100049

**摘要** 为了消除现有多频外差原理相位解包裹后存在的相位跳跃性误差,对多频外差原理相位解包裹方法进行了改进。利用双频外差原理进行部分条纹解包裹,然后利用相位与条纹节距之间的关系将解包裹后的相位转换为其他条纹的相位,使用转换后的相位对其包裹相位进行校正,得到展开相位。为了使展开相位不存在跳跃性误差,提出了解包裹过程中所需满足的一系列约束条件。模拟和实验结果均表明该方法简单有效,展开后的相位光滑无跳跃性误差,无需再次进行误差校正,相比现有方法时间效率提升30%以上。

**关键词** 测量;多频外差;相位解包裹;相位跳跃;误差校正

中图分类号 TP391.4

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201636.0412004

## Improvement of the Phase Unwrapping Method Based on Multi-Frequency Heterodyne Principle

Chen Songlin<sup>1,2</sup> Zhao Jibin<sup>1</sup> Xia Renbo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Equipment Manufacturing Technology Department, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang, Liaoning 110016, China

<sup>2</sup>University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract** In order to eliminate the phase jump error of existing phase unwrapping method based on multi-frequency heterodyne principle, the improvement of the phase unwrapping method based on multi-frequency heterodyne principle is proposed. The partial fringes unwrapped phase is obtained by using the method of dual frequency heterodyne principle. Then the unwrapped phase is converted to other fringe relying on the relationship between the phase and the fringe pitch. After that, the wrapped phase is corrected by the converted phase, and the unwrapped phase is obtained. A series of constraints in the processing of unwrapping are derived in order to get the accurate and no jumped phase. The simulation and experimental results show that the method is simple and effective, and there is no phase jump in the unwrapped phase. The improvement of time efficiency is over 30% compared with the existing method.

**Key words** measurement; multi-frequency heterodyne; phase unwrapping; phase jump; error correction

**OCIS codes** 120.5050; 120.6650; 100.2650; 100.5070

## 1 引 言

光栅投影测量是一种重要的三维测量方法,具有非接触、低成本和高精度等优点,广泛应用于光学三维测量领域<sup>[1-4]</sup>。该方法将相位作为立体匹配的一个特征量,利用双目立体视觉的方法来求取物体的三维特征<sup>[1]</sup>,因此,精确地获取待测面的相位是该方法的关键问题之一。而相移法是目前最常用的相位测量方法之一,其测量精度较高,但只能得到 $(0, 2\pi]$ 的包裹相位,要想得到全场的真实相位,需要将包裹相位解开。

目前,相位解包裹方法主要可分为空间相位解包裹和时间相位解包裹两大类<sup>[5]</sup>,空间相位解包裹只采用

收稿日期: 2015-10-15; 收到修改稿日期: 2015-11-16

基金项目: 国家自然科学基金(51375476)

作者简介: 陈松林(1990—),男,博士研究生,主要从事三维测量方面的研究。E-mail: chensonglin@sia.cn

导师简介: 赵吉宾(1970—),男,博士,研究员,博士生导师,主要从事复杂曲面精密加工、三维测量等方面的研究。

E-mail: jbzhaos@sia.cn(通信联系人)

一幅包裹相位图,只有在被测轮廓简单,信噪比足够高的时候才能够正确展开相位<sup>[5-8]</sup>。时间相位解包裹通过投影一系列不同频率的光栅图像来进行展开,适应性广,其中,基于多频外差原理的相位解包裹方法测量精度较高,发展速度很快,但是直接通过多频外差原理解包裹后的相位存在跳跃性误差,需要进行误差校正<sup>[9-15]</sup>。陈玲等<sup>[12]</sup>和黄亚楠等<sup>[13]</sup>对解包裹后的相位误差点的邻域进行分析,并对误差进行校正,然而该方法具有一定的局限性,对于表面简单、过渡平缓的物体效果尚可,但是对于表面形状复杂、过渡剧烈的物体,无法判断相位跳跃是由物体表面的不连续性造成的,还是由相位误差造成的,因此,无法进行校正。并且由于需要使用邻域信息,失去了多频外差原理解相独立性的优点,也会造成误差的传递。雷志辉等<sup>[14]</sup>通过对多频外差原理的改进来对解包裹后的相位误差进行校正,但该方法只对双频外差有效,对多频外差解相后的相位跳跃误差并不能完全消除。章寒清<sup>[15]</sup>对文献[14]的方法进行扩展,推导出了多频外差解相的方法,但解相后的相位跳跃误差并不能完全避免。

因此,为了克服现有多频外差原理相位解包裹后存在跳跃性误差的缺点,本文在对该误差成因进行深入分析后,对现有多频外差原理相位解包裹方法进行了改进,通过附加一系列约束条件来对条纹节距的选择进行约束,然后采用改进后的解包裹方法,得到的展开相位平滑、不存在跳跃性误差,无需进行误差校正。

## 2 相位求解与误差分析

采用标准四步相移算法进行包裹相位的求解,得到的相位主值在  $0 \sim 2\pi$  之间变化,因此,需要对相位进行展开,得到展开相位。

### 2.1 外差解相原理

外差解相原理是指将多种不同频率的光栅图像叠加到一起进行解相的方法,最常用的是双频外差解相和三频外差解相。

#### 1) 双频外差解相原理

在文献[14]、[15]中对双频外差解相原理进行了推导,分别向物体表面投射节距为  $p_1$  与  $p_2$  的两类正弦光栅条纹,其中,  $p_1 < p_2$ ,如图1所示,对于物体表面上某一点,设其对应的条纹级数分别为  $n_1$  与  $n_2$  (包含小数部分,如1.76),则有如下的等式成立,

$$p_1 n_1 = p_2 n_2 \quad , \quad (1)$$

$$\Delta n_i = \frac{\phi_i}{2\pi}, \Delta n_i \in [0, 1), i = 1, 2 \quad , \quad (2)$$

$$n_i = N_i + \Delta n_i, N_i \in Z \quad , \quad (3)$$

式中  $\phi_i$  代表第  $i$  幅光栅条纹的包裹相位,  $N_i$  代表条纹级数中的整数部分,  $\Delta n_i$  代表条纹级数中的小数部分,由(1)~(3)式可得

$$n_1 = \frac{p_2(n_1 - n_2)}{p_2 - p_1} = \frac{p_2(N_1 - N_2 + \Delta n_1 - \Delta n_2)}{p_2 - p_1} \quad , \quad (4)$$

$$n_2 = \frac{p_1(n_1 - n_2)}{p_2 - p_1} = \frac{p_1(N_1 - N_2 + \Delta n_1 - \Delta n_2)}{p_2 - p_1} \quad , \quad (5)$$

$$N_1 - N_2 = \frac{p_2 - p_1}{p_1} n_2 + \Delta n_2 - \Delta n_1 \quad . \quad (6)$$

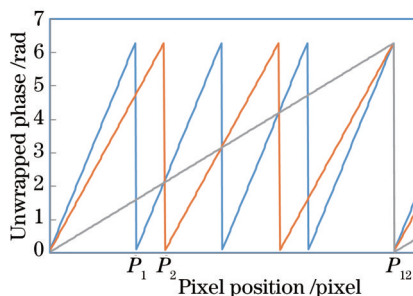


图1 外差原理

Fig.1 Heterodyne principle

因此,如果能够求出  $N_1 - N_2$ , 即可求出  $n_1$  与  $n_2$ , 若用  $\varphi_i$  代表将  $\phi_i$  展开后的相位, 则由  $\varphi_i = 2\pi n_i$  可求出  $\varphi_1$  与  $\varphi_2$ 。由叠栅条纹原理可知, 若节距分别为  $p_1$  与  $p_2$  的两个不同条纹相互叠加时, 将形成节距为  $p_{12} = \frac{p_1 p_2}{(p_2 - p_1)}$  的虚拟叠栅条纹, 如图 1 中  $p_{12}$  所示, 设其级数为  $n_{12}$ , 整数部分为  $N_{12}$ , 小数部分为  $\Delta n_{12}$ 。根据文献[14]的推导, 可知

$$\varphi_1 = \frac{p_2 [2\pi(N_{12} + \alpha) + (\phi_1 - \phi_2)]}{p_2 - p_1}, \quad (7)$$

$$\varphi_2 = \frac{p_1 [2\pi(N_{12} + \alpha) + (\phi_1 - \phi_2)]}{p_2 - p_1}, \quad (8)$$

当  $\phi_2 > \phi_1$  时,  $\alpha = 1$ , 当  $\phi_2 \leq \phi_1$  时,  $\alpha = 0$ 。观察(7)、(8)式可知, 将  $\phi_1 - \phi_2$  的差值乘以因子  $\frac{p_2}{p_2 - p_1}$  或  $\frac{p_1}{p_2 - p_1}$ , 会使  $\phi_1 - \phi_2$  的误差被放大很多倍, 造成所求的  $\varphi_1$  与  $\varphi_2$  产生很大的误差。

又因为  $\varphi$  亦可表示成  $\varphi_i = 2\pi N_i + \phi_i$ , 采用该式进行求解, 可避免误差放大现象的发生, 其中  $N_i$  是整数级条纹, 可通过对  $n_i$  取整得到, 由(7)、(8)式可知

$$N_1 = \text{floor} \left\{ \frac{p_2 \left[ (N_{12} + \alpha) + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2\pi} \right]}{p_2 - p_1} \right\}, \quad (9)$$

$$N_2 = \text{floor} \left\{ \frac{p_1 \left[ (N_{12} + \alpha) + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2\pi} \right]}{p_2 - p_1} \right\}, \quad (10)$$

式中 floor() 表示向下取整, 因此,

$$\varphi_1 = 2\pi \times \text{floor} \left\{ \frac{p_2 \left[ (N_{12} + \alpha) + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2\pi} \right]}{p_2 - p_1} \right\} + \phi_1, \quad (11)$$

$$\varphi_2 = 2\pi \times \text{floor} \left\{ \frac{p_1 \left[ (N_{12} + \alpha) + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2\pi} \right]}{p_2 - p_1} \right\} + \phi_2. \quad (12)$$

通过选择合适的  $p_1$  与  $p_2$ , 可使叠栅条纹节距  $p_{12}$  覆盖整个视场, 此时  $N_{12} = 0$ , 则可由(11)与(12)式计算出  $\varphi_1$  与  $\varphi_2$ 。但为了使叠栅条纹节距  $p_{12}$  覆盖整个视场, 需要选择较大的  $p_1$  与  $p_2$ , 当  $p_1$  与  $p_2$  较大时, 会使三维重建的结果细节特征模糊。因此一般采用三频外差解相的方法。

## 2) 三频外差解相原理

由(11)与(12)式可知, 若能够求出叠栅条纹的整数部分  $N_{12}$ , 可求出  $\varphi_1$  与  $\varphi_2$ 。这可通过投影第三条条纹来解决, 若其节距为  $p_3$ , 则可以选择适当的  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$ , 使  $p_{12} < p_3$ ,  $p_{12}$  与  $p_3$  形成的虚拟叠栅条纹节距为  $p_{123}$ , 其整数部分记为  $N_{123}$ , 小数部分记为  $\Delta n_{123}$ , 从而可知

$$n_{12} = \frac{p_3 [(N_{123} + \alpha) + \Delta n_{12} - \Delta n_3]}{p_3 - p_{12}}, \quad (13)$$

$$N_{12} = \text{floor}(n_{12}), \quad (14)$$

式中  $\Delta n_{12}$  为叠栅条纹  $p_{12}$  的小数部分, 为

$$\Delta n_{12} = \begin{cases} \Delta n_1 - \Delta n_2, & \Delta n_2 - \Delta n_1 \leq 0 \\ \Delta n_1 - \Delta n_2 + 1, & \Delta n_2 - \Delta n_1 > 0 \end{cases}, \quad (15)$$

当  $\Delta n_3 > \Delta n_{12}$  时,  $\alpha = 1$ ; 当  $\Delta n_3 \leq \Delta n_{12}$  时,  $\alpha = 0$ ; 若  $p_{123}$  可覆盖整个视场, 则  $N_{123} = 0$ , 从而可求得  $N_{12}$ , 代入(11)、(12)式即可解出  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ 。

## 2.2 相位展开误差分析

为了对三频外差解包裹后的相位误差进行分析, 使用分辨率为  $1024 \text{ pixel} \times 768 \text{ pixel}$  的投影仪向白色平板投射节距分别为  $p_1 = 25$ 、 $p_2 = 28$ 、 $p_3 = 288$  的光栅条纹, 所形成的叠栅条纹  $p_{12} = 233.3$ 、 $p_{123} = 1229.3$ , 满足要求。使用 AVT 的 CCD 相机进行同步拍摄, 相机型号为 Manta-G125C, 分辨率为  $1292 \text{ pixel} \times 964 \text{ pixel}$ 。

图 2 为对拍摄到的图像第 300 行前 300 pixel 进行解包裹得到的展开相位图,  $\theta_3$  为采用(11)式对  $\phi_1$  进行展开的结果。从图中可以看出, 展开的相位并不是平滑的, 存在一些较小和较大的跳跃性误差, 分析(11)式可知, 在相位展开时, 对条纹级数进行了取整, 取整的错误造成了相位的跳跃性误差, 对于这种展开错误, 主要是由于  $N_{12}$  与  $\frac{\phi_1 - \phi_2}{2\pi}$  的误差造成的, 下面分别对这两种误差进行分析。

对于  $N_{12}$  的误差, 由(13)~(15)式可知, 主要与  $\Delta n_{12}$  和  $\Delta n_3$  有关。对于  $\Delta n_{12}$ , 由(15)式可知, 当  $\Delta n_1$  与  $\Delta n_2$  近似相等时, 如果  $\Delta n_1$  与  $\Delta n_2$  存在误差, 即使非常小, 也容易引起  $\Delta n_{12}$  在 0 与 1 之间跳跃, 如图 3 中  $\Delta n_{12}$  所示, 在第 241 pixel 附近,  $\Delta n_{12}$  出现了跳跃性误差, 此时, 对应的  $\Delta n_1$  与  $\Delta n_2$  相交, 近似相等, 与上文分析的相同。对于  $\Delta n_3$ , 主要是相移法解相造成的误差, 该误差较小, 不存在跳跃现象。虽然  $\Delta n_{12}$  存在 0 与 1 之间的跳跃性误差, 但是, 通过分析(13)与(14)式可知, 并不会对  $N_{12}$  的求解造成影响。类比(15)式, 可知

$$\Delta n_{123} = (N_{123} + \alpha) + \Delta n_{12} - \Delta n_3, \quad (16)$$

即

$$\Delta n_{123} = \begin{cases} \Delta n_{12} - \Delta n_3 + 1, & \Delta n_3 - \Delta n_{12} > 0 \\ \Delta n_{12} - \Delta n_3, & \Delta n_3 - \Delta n_{12} \leq 0 \end{cases} \quad (17)$$

当  $\Delta n_{12}$  由 1 跃变为 0 时,  $\Delta n_{123}$  变为  $\Delta n'_{123}$ ,  $\Delta n_{123} = \Delta n_{12} - \Delta n_3 = 1 - \Delta n_3$ , 而  $\Delta n'_{123} = \Delta n_{12} - \Delta n_3 + 1 = 1 - \Delta n_3$ , 因此可知  $\Delta n_{12}$  的跳跃并不会引起  $\Delta n_{123}$  的跳跃, 如图 3 中  $\Delta n_{123}$  在  $\Delta n_{12}$  存在跳跃时, 仍能平滑过渡, 因此,  $\Delta n_{12}$  的跳跃亦不会引起  $N_{12}$  的跳跃。在求  $N_{12}$  的过程中, 如(14)式所示, 采用了向下取整操作, 当  $n_{12}$  趋近于整数的时候, 例如 0.99,  $\Delta n_{123}$  任何微小的误差都可能使其大于 1, 变为 1.01, 从而导致  $N_{12}$  从 0 跃变为 1, 造成  $N_{12}$  的震荡。这种情况主要发生在  $\Delta n_{12}$  条纹级数改变处, 因为在条纹级数改变处,  $n_{12}$  趋近于整数, 如图 4 中  $N_{12}$  在 241 pixel 附近出现了跳跃性误差, 跳跃幅值为 1, 对应于图 3 中  $\Delta n_{12}$  条纹级数改变处。综上所述,  $N_{12}$  只会在  $n_{12}$  条纹级数改变处产生跳跃性误差, 跳跃幅值为 1。

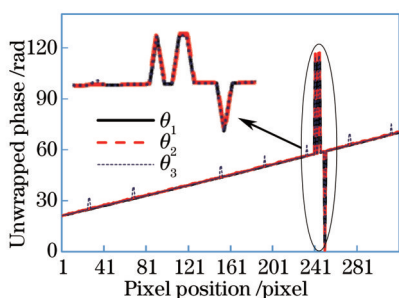


图 2 展开相位( $\varphi_1$ )

Fig.2 Unwrapped phase( $\varphi_1$ )

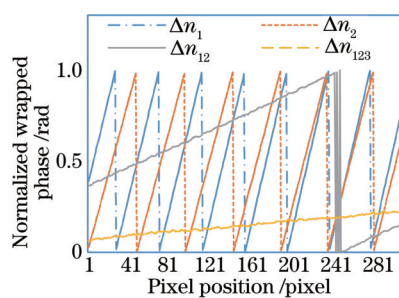


图 3 归一化包裹相位

Fig.3 Normalized wrapped phase

对于  $\frac{\phi_1 - \phi_2}{2\pi}$ , 即  $\Delta n_1 - \Delta n_2$  的误差, 主要是由于相移法解相造成的误差, 不存在跳跃现象, 幅值也较小, 但对相位的展开亦会造成很大的影响。

以上分析的两种误差, 对求解的  $\varphi_1$  会产生不同的影响,  $N_{12}$  的跳跃性误差经过  $\frac{p_2}{p_2 - p_1}$  放大后会造成  $\varphi_1$  出现至少  $\text{floor}\left(\frac{p_2}{p_2 - p_1}\right) \times 2\pi$  的跳跃性误差, 如图 2 中  $\theta_3$  在 241 pixel 附近的误差。对于  $\frac{\phi_1 - \phi_2}{2\pi}$  的微小误差,

由(9)与(11)式可知,在  $n_1$  条纹级数改变处,所求得  $N_{12}$  会出现幅值为 1 的跳跃性误差,也就造成了  $\varphi_1$  出现以  $2\pi$  为差值的小的跳跃性误差,这种误差主要出现在  $N_{12}$  条纹级数改变处,如图 2 与图 3 所示,  $\varphi_1$  小的跳跃性误差对应于  $\Delta n_1$  的改变处。

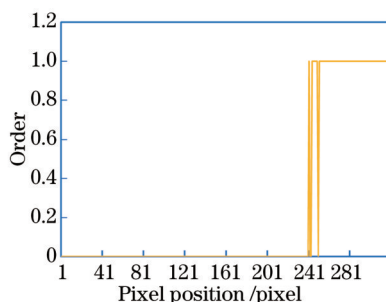


图 4 条纹级数  $N_{12}$

Fig.4 Fringe order of  $N_{12}$

因此,从以上分析可以看出,对于直接利用多频外差原理解相得到的  $\varphi_1$ ,会存在不同程度的跳跃性误差,需要对  $\varphi_1$  进行校正。对于小的跳跃性误差,可以先采用(7)式展开相位,记为  $\varphi'_1$ ,虽然  $\varphi'_1$  误差较大,但是不会达到  $2\pi$  的倍数误差,整体上与真实值比较接近,因此,可以采用它对(11)式解得的  $\varphi_1$  进行校正。若  $|\varphi_1 - \varphi'_1| \geq \pi$ ,则对  $\varphi_1$  加减  $2\pi$ ,使  $|\varphi_1 - \varphi'_1| < \pi$ ,但这种方法具有一定的局限性,当  $\varphi'_1$  的误差大于  $\pi$  的时候,将会得到错误的  $\varphi_1$ 。另外,对于  $\varphi_1$  中大的跳跃性误差,由于此时  $N_{12}$  具有误差,所以求得的  $\varphi'_1$  也将具有较大的误差,不能通过校正得到正确的  $\varphi_1$ 。如图 2 中  $\theta_2$  为采用(7)式解得的  $\varphi'_1$ ,可以看出,在  $\theta_3$  中小的跳跃性误差处,  $\theta_2$  并没有出现跳跃性误差,仍在真值附近,但是在大的跳跃性误差处,  $\theta_2$  同样也出现了大的跳跃性误差,与分析结果一致,  $\theta_1$  为采用该校正方法进行校正后的相位,可以看出,  $\theta_1$  中已经不存在小的跳跃性误差,但是大的跳跃性误差仍然存在。对于大的跳跃性误差,如引言中所述,文献[12]、[15]等对其进行了校正,但是具有一定的局限性,效果不是很好。

### 3 改进的解相方法

为了解决这些问题,在基于上述分析的基础上,对多频外差原理解相方法进行了改进,可以对相位跳跃误差进行很好的抑制,并且算法实现简单,已在实际工程中得到应用。该方法实现过程为

- 1) 向被测物体表面投射节距分别为  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$  的光栅条纹,要求  $p_1 < p_2$ ,且  $p_{12} < p_3$ ,  $p_{123}$  能覆盖整个视场;
- 2) 采用相移法求解出  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$  的包裹相位  $\phi_1$ 、 $\phi_2$ 、 $\phi_3$ ;
- 3) 求解出  $p_1$  与  $p_2$  所形成的叠栅条纹  $p_{12}$  的包裹相位  $\phi_{12}$ ,再根据  $p_{12}$  与  $p_3$  所形成的叠栅条纹覆盖整个视场的特性,对  $p_3$  的包裹相位  $\phi_3$  进行展开得到展开相位  $\varphi_3$ ;
- 4) 根据  $\varphi_3$  与  $\varphi_1$  之间的关系将  $\varphi_3$  转换到  $\varphi_1$ ,记为  $\varphi'_1$ ,使用  $\varphi'_1$  对  $\phi_1$  进行校正最终得到  $\varphi_1$ ,同理,亦可得到  $\phi_2$  的展开相位  $\varphi_2$ 。

该方法避免了直接采用(11)式求解  $\varphi_1$ ,并且无需计算  $N_{12}$ ,实现简单,得到的展开相位光滑且无跳跃现象。然后对该方法进行详细阐述,并对其中所需要施加的约束条件进行了分析。

采用四步相移法求解出的包裹相位中,会存在四倍频的误差,该误差主要是由于投影仪和相机等的非线性造成的,在文献[11]中,证明了该误差与条纹节距无关,因此可以假设求解出的三个包裹相位的最大绝对相位误差相等且均为  $\phi_{err}$ ,投影仪横向分辨率为  $h_{pixel}$ ,光栅条纹纵向分布。

$\phi_3$  的展开相位为

$$\varphi_3 = \frac{2\pi p_{12} [(N_{123} + \alpha) + \Delta n_{12} - \Delta n_3]}{p_3 - p_{12}}, \quad (18)$$

$$\varphi_3 = 2\pi \times \text{floor} \left\{ \frac{p_{12} [(N_{123} + \alpha) + \Delta n_{12} - \Delta n_3]}{p_3 - p_{12}} \right\} + \phi_3, \quad (19)$$

式中  $p_{12}$  与  $p_3$  所形成的叠栅条纹  $p_{123}$  覆盖了整个视场,所以  $N_{123}=0$ 。

$\Delta n_{123} = (N_{123} + \alpha) + \Delta n_{12} - \Delta n_3$ , 在分析  $\Delta n_{123}$  的误差时,可知  $\Delta n_{12}$  的跳跃并不会对  $\Delta n_{123}$  造成影响,但是,在  $\Delta n_{123}$  的两端,即当  $\Delta n_3$  与  $\Delta n_{12}$  近似相等时,  $\Delta n_{123}$  会在 0 与 1 之间跳跃,如图 5 中  $\Delta n_{123}$  在 1 pixel 和 1200 pixel 附近出现跳跃性误差。此时,会使求解出的  $\varphi_3$  在此区域亦出现跳跃性误差,因此,为了避免求解出的  $\varphi_3$  存在大的跳跃性误差,可以在产生投影光栅图像的时候,避开两端的像素,只投影中间  $h_{\text{pixel}}$  个像素。

由(15)式可知,  $\phi_{12}$  的最大绝对相位误差应为  $2\phi_{\text{err}}$ 。  $\phi_3$  的最大绝对相位误差为  $\phi_{\text{err}}$ , 因此,如图 6 所示,只有当  $\Delta\phi > 3\phi_{\text{err}}$  时,  $\Delta n_{123}$  才不会存在跳跃现象,设此时所对应的像素位置为  $x$ ,则  $\Delta n_{123}$  的前  $x$  像素不可用,同理,分析可知,  $\Delta n_{123}$  的后  $x$  个像素亦不可而用,因此,可得如下两个约束条件为

$$\frac{2\pi x}{p_{12}} - \frac{2\pi x}{p_3} > 3\phi_{\text{err}}, \quad (20)$$

$$p_{123} > h_{\text{pixel}} + 2x. \quad (21)$$

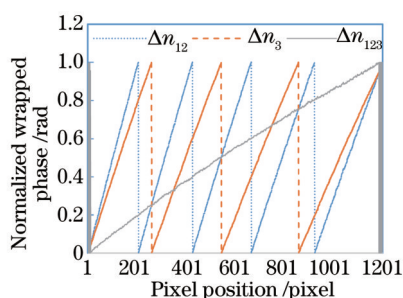


图 5 归一化包裹相位(在光栅节距分别为 17,19, 202 下拍摄解相)

Fig.5 Normalized wrapped phase(captured and unwrapped range at grating pitches of 17,19,202)

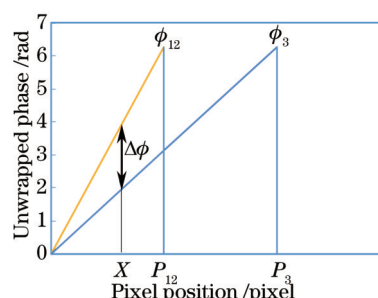


图 6 不可用像素范围求解示意图

Fig.6 Schematic diagram of solving the useless pixels

当按(19)式使用  $\Delta n_{123}$  的中间线性部分进行求解得到  $\varphi_3$  时,不会出现大的相位跳跃现象,但是,如前文分析,仍会出现以  $2\pi$  为差值的跳跃,需要使用(18)式进行校正。由于  $\phi_3$  中存在最大值为  $\phi_{\text{err}}$  的绝对相位误差,只有当(18)式求解出的  $\varphi_3$  的误差小于  $\pi - \phi_{\text{err}}$  时,才能正确校正,由(17)式可知,  $\Delta n_{123}$  的最大绝对误差为  $\frac{3\phi_{\text{err}}}{2\pi}$ , 因此,可得如下约束条件:

$$\frac{2\pi p_{12}}{p_3 - p_{12}} \times \frac{3\phi_{\text{err}}}{2\pi} < \pi - \phi_{\text{err}}. \quad (22)$$

满足(20)~(22)式三个约束条件即可保证求解出正确的  $\varphi_3$ , 另外,在对  $\varphi_3$  进行求解时,可直接使用(18)式求解出的  $\varphi_3$  对包裹相位  $\phi_3$  进行校正,而不用对(19)式求解出的结果进行校正,因为从(19)式可以看出,其与  $\phi_3$  只相差  $2\pi$  的整数倍。

在求出  $\varphi_3$  后,为了对  $\phi_1$  进行展开,需要将  $\varphi_3$  转换到  $\varphi_1$ , 然后再对  $\phi_1$  进行校正,最后得到正确的  $\varphi_1$ 。  $\varphi_3$  与  $\varphi_1$  之间的关系为

$$\varphi_1 = \frac{p_3}{p_1} \varphi_3, \quad (23)$$

可以看出,将  $\varphi_3$  乘以因子  $\frac{p_3}{p_1}$ , 会将  $\varphi_3$  的误差放大  $\frac{p_3}{p_1}$  倍,则  $\varphi_1$  误差较大,但是可以通过其来校正  $\phi_1$ , 从而得到正确的  $\varphi_1$ 。为了进行正确的校正,由  $\varphi_3$  转换到  $\varphi_1$  的误差必须小于  $\pi - \phi_{\text{err}}$ , 则  $\varphi_3$  的最大相位误差为  $\phi_{\text{err}}$ , 因此可得如下约束条件:

$$\frac{p_3}{p_1} \phi_{err} < \pi - \phi_{err} \quad , \quad (24)$$

若需要对  $\phi_2$  进行展开,则可将  $\varphi_3$  转换到  $\varphi_2$ ,需要满足如下约束条件:

$$\frac{p_3}{p_2} \phi_{err} < \pi - \phi_{err} \quad , \quad (25)$$

(24)、(25)式保证了展开的  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  光滑无跳跃现象。当条纹节距较小的时候,对物体细节纹理的分辨能力较高,因此,可以对  $p_1$  的条纹节距加以限制,附加如下约束条件:

$$p_1 < p_{1max} \quad . \quad (26)$$

综上所述,为了准确解相,需要满足如下约束条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{12} = \frac{p_1 p_2}{(p_2 - p_1)}, p_1 < p_2, p_{12} < p_3 \\ p_{123} = \frac{p_{12} p_3}{(p_3 - p_{12})} \\ \frac{2\pi x}{p_{12}} - \frac{2\pi x}{p_3} > 3\phi_{err} \\ p_{123} > h_{pixel} + 2x \\ \frac{2\pi p_{12}}{p_3 - p_{12}} \times \frac{3\phi_{err}}{2\pi} < \pi - \phi_{err} \\ \frac{p_3}{p_1} \phi_{err} < \pi - \phi_{err} \\ \frac{p_3}{p_2} \phi_{err} < \pi - \phi_{err} \\ p_1 < p_{1max} \end{array} \right. \quad , \quad (27)$$

前两个等式保证了可以使用三频外差原理求解  $\varphi_3$ ,中间三个不等式保证了所求  $\varphi_3$  的准确性,后两个不等式保证了展开的  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  的准确性,最后一个不等式保证了展开的相位对细节的分辨能力。

对(27)式进行求解,设  $p_{1max} = 30$ ,  $h_{pixel} = 1024$ ,  $\phi_{err} = \pi/14$ ,则得到的满足要求的整数级条纹组合共有 21 组。需要指出的是,在不进行投影仪伽马校正的情况下,四步相移求解包裹相位的最大相位误差在 0.08 rad 左右<sup>[5, 11, 16-17]</sup>,远小于  $\pi/14$ ,因此,求解出的条纹组合完全可以满足实际的使用需求。表 1 列出了  $\phi_{err} = \pi/14$  时满足要求的结果。表 2 列出了随着  $\phi_{err}$  的变化,所满足约束要求的整数级条纹的组合数目和  $p_1$  最小时的条纹节距组合,可以看出,当  $\phi_{err}$  为  $\pi/13$  时,没有满足要求的组合,因此,如果包裹相位的误差大于  $\pi/13$ ,将无法进行正确的展开。随着  $\phi_{err}$  的逐渐减小,满足要求的组合数越来越多,并且允许的  $p_1$  的最小值也越来越小,因此,在能够保证包裹相位的求解误差,或者对相位误差进行补偿的情况下,可以选取  $p_1$  较小的条纹组合,这样可以提高对物体细节分辨能力。

表 1 满足要求的条纹节距组合

Table 1 Combinations of different pitches that meet requirements

$P_1$ /pixel	$P_2$ /pixel	$P_3$ /pixel	$P_1$ /pixel	$P_2$ /pixel	$P_3$ /pixel	$P_1$ /pixel	$P_2$ /pixel	$P_3$ /pixel
26	29	310	27	30	338	28	31	361
26	29	311	27	30	339	28	31	362
27	30	333	27	30	340	28	31	363
27	30	334	28	31	357	28	31	364
27	30	335	28	31	358	30	34	314
27	30	336	28	31	359	30	34	315
27	30	337	28	31	360	30	34	316

表2 不同误差下结果

Table 2 Results with different errors

$\phi_{err}$ / rad	Quantity	$P_1$ /pixel	$P_2$ /pixel	$P_3$ /pixel
$\pi/13$	0			
$\pi/14$	21	26	29	310
$\pi/16$	203	20	22	265
$\pi/18$	454	19	21	235
$\pi/20$	901	13	14	211
$\pi/25$	2101	12	13	176
$\pi/30$	3240	11	12	146

## 4 实验与仿真分析

### 4.1 仿真分析

为了验证本文算法的可行性,从表1中选取条纹节距组合,采用Matlab产生包裹相位数据,在其上分别添加最大幅值为 $\phi_{err}$ 的随机误差,然后采用本文算法进行解相。由于所使用的条纹组合是按照 $\phi_{err} = \pi/14$ 产生的,所以,该组条纹组合在所添加的随机误差不大于 $\pi/14$ 时,必须都能成功解相才能证明该算法的可行性。

图7(a)为在条纹节距为26、29、310下, $\phi_{err}$ 为 $\pi/14$ ,进行相位展开的结果,从图中可以看到在条纹的两端,相位出现了跳跃性误差,采用(20)式计算所得的两端跳跃性误差的最大像素数为142.29,从图中可看出跳跃部分的像素数在141以下,因此,(20)式的计算是正确的,在实际投影光栅条纹时,应该避开两端的区域,采用中间的像素区域进行投影。

图7(b)~(d)为采用中间144~1167 pixel(共1024 pixel)进行模拟所得的结果,其中图7(b)、(c)是在条纹节距为26、29、310下,在 $\phi_{err}$ 分别为 $\pi/10$ 、 $\pi/12$ 下解相的结果,图7(d)是在条纹节距为30、34、315下, $\phi_{err}$ 为 $\pi/16$ 下解相的结果。从图7(b)、(c)中可以看出,当添加的相位误差大于 $\pi/14$ 时,解相会出现跳跃性误差,并且误差越大,跳跃性误差出现的概率也越大。从图7(a)、(d)可以看出,当误差不大于 $\pi/14$ 时,采用表1中的不同条纹节距组合,均能正确解相。

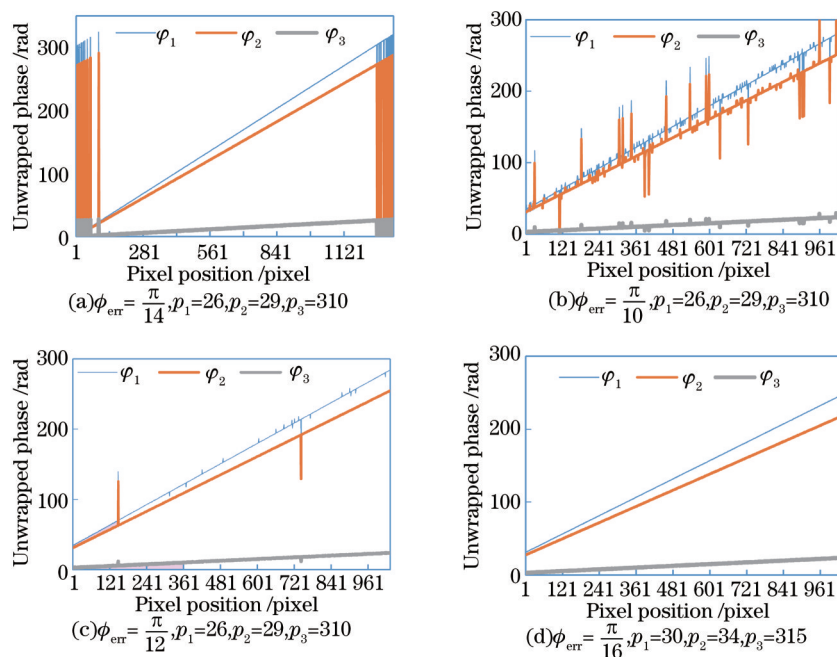


图7 不同条件下相位展开结果

Fig.7 Results of phase unwrapping with different conditions



4.2 实验分析

为了进一步评估本文算法的有效性,向标准白板投射节距为 26、29、310 的光栅图像,实验设备与上文所述相同,分别采用文献[15]算法和本文算法对三个节距的光栅图像进行 7 次解相(算法在 vs2012 平台下编程实现, Intel core i3 处理器, 4 Gb 内存),所用时间如表 3 所示。从表 3 可以看出,本文算法相较于文献[15]的算法,时间效率提升了 30% 左右。之后对该平面进行三维重构,结果如图 8 所示,重构出的平面表面光滑,点云分布均匀,对其进行平面拟合,所得结果的最大绝对偏差为 0.088 mm,平均绝对偏差为 0.0145 mm,标准偏差为 0.0182 mm。对图 9(a)的工件表面进行测量,左边的工件表面有一些细小的纹理,右边的工件表面分布着不均匀的小的突起点,拍摄到的光栅图像如图 9(b)、(c)所示(条纹节距为 26),其中图 9(b)为左相机拍摄,图 9(c)为右相机拍摄,红色部分表示待测区域,对图 9(b)中红色区域进行解相,所得结果如图 10 所示。从图中可以看出,文献[15]算法相位展开后存在规则的长条相位跳跃区域,而在本文算法中,该相位跳跃区域已经不存在,对于图 10(b)中左下角不均匀的相位跳跃,主要是由于工件边界在拍摄过程中的阴影所造成的,可以通过滤波对其进行去除。三维重建后的结果如图 11 所示,从图中可以看出,工件表面细小的纹理、小突起点等均被很好地重建了出来,并且表面光滑、细腻,满足测量要求。

表 3 各算法所用时间对比

Table 3 Comparison of execution time with each algorithm

Ref.[15] algorithm /ms	Proposed algorithm /ms	Decrease 1%
466.15	321.05	31.13
466.80	323.55	30.69
466.06	320.91	31.15
466.83	320	31.45
463.63	323.08	30.31
469.14	318.92	32.02
466.37	328.43	29.58

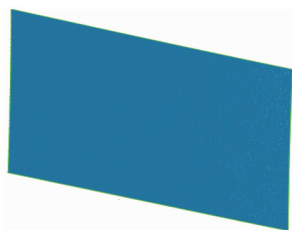


图 8 平面重建结果

Fig.8 Result of plane reconstruction

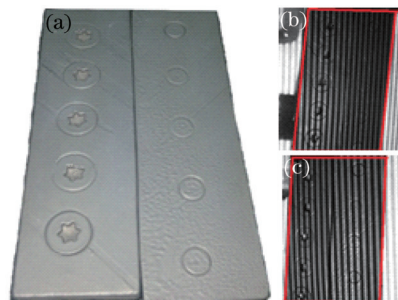


图 9 工件。(a) 待检工件; (b) 左摄像头拍摄; (c) 右摄像头拍摄

Fig.9 Workpiece. (a) Workpiece to be inspected; (b) captured by left camera; (c) captured by right camera

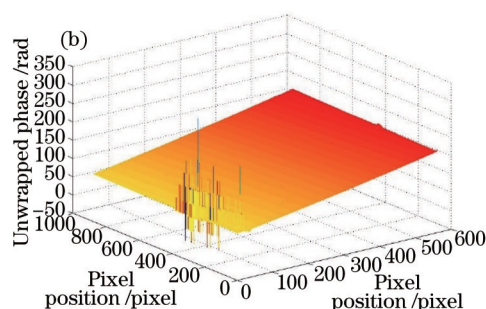
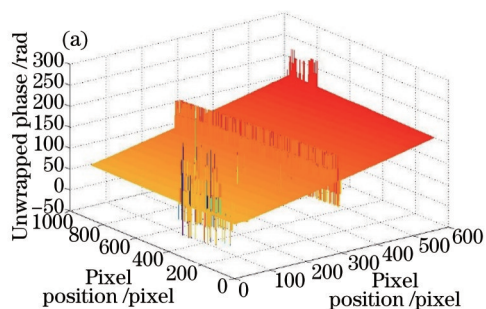


图 10 相位展开结果。(a) 由文献[15]算法展开; (b) 由本文算法展开

Fig.10 Results of phase unwrapping. (a) Unwrapped by Ref.[15] algorithm; (b) unwrapped by proposed algorithm

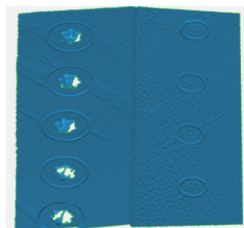


图 11 工件表面重建结果

Fig.11 Workpiece surface reconstruction result

## 5 结 论

现有的基于多频外差原理的相位解包裹方法在解包裹后,会存在相位跳跃现象,需要进行误差校正。在对相位跳跃现象产生成因进行深入分析的基础上,对现有的多频外差解相方法进行了改进,避免了相位跳跃现象的发生,并分析了该方法成功解相所需满足的约束条件,给出了在不同误差条件下,满足约束的条纹节距组合。随着包裹相位误差的减小,满足约束的条纹组合数量大幅增加,并且所允许的  $p_1$  也越来越小,这将有利于测量表面纹理精细的物体。实验和模拟分析表明,当采用满足约束条件的条纹节距时,解包裹后的相位光滑,不存在相位跳跃,无需进行误差校正,相比于传统算法,时间效率提升在 30% 以上。

## 参 考 文 献

- 1 Reich C, Ritter R, Thesing J. 3-D shape measurement of complex objects by combining photogrammetry and fringe projection[J]. *Optical Engineering*, 2000, 39(1): 224-231.
- 2 Cui Yanjun, Zhang Wenfeng, Li Jianxin, *et al.*. A method of Gamma correction in fringe projection measurement[J]. *Acta Optica Sinica*, 2015, 35(1): 0112002.  
崔艳军, 张文峰, 李建欣, 等. 条纹投影三维测量的 Gamma 畸变校正方法[J]. *光学学报*, 2015, 35(1): 0112002.
- 3 Qian Xiaofan, Zhang Yongan, Li Xinyu, *et al.*. Phase unwrapping algorithm based on mask and least-squares iteration[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, 30(2): 440-444.  
钱晓凡, 张永安, 李新宇, 等. 基于掩膜和最小二乘迭代的相位解包裹方法[J]. *光学学报*, 2010, 30(2): 440-444.
- 4 Reich C, Ritter R, Thesing J. White light heterodyne principle for 3D-measurement[C]. *SPIE*, 1997, 3100: 236-244.
- 5 Li Zhongwei. Research on structured light 3D measuring technology and system based on digital fringe projection[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2009: 11-17.  
李中伟. 基于数字光栅投影的结构光三维测量技术与系统研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2009: 11-17.
- 6 Dai Meiling, Yang Fujun, Geng Min, *et al.*. Single color fringe projection for measuring three-dimensional shapes with discontinuities [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(4): 0412005.  
戴美玲, 杨福俊, 耿敏, 等. 单幅彩色条纹投影的不连续物体表面三维形貌测量[J]. *光学学报*, 2012, 32(4): 0412005.
- 7 Qian Xiaofan, Rao Fan, Li Xinghua, *et al.*. Accurate least squares phase unwrapping algorithm[J]. *Chinese J Lasers*, 2012, 39(2): 0209001.  
钱晓凡, 饶帆, 李兴华, 等. 精确最小二乘相位解包裹算法[J]. *中国激光*, 2012, 39(2): 0209001.
- 8 Wang Huaying, Liu Zuoqiang, Liao Wei, *et al.*. Comparison of four phases unwrapping algorithm based on method of minimum norm[J]. *Chinese J Lasers*, 2014, 41(2): 0209016.  
王华英, 刘佐强, 廖薇, 等. 基于最小范数的四种相位解包裹算法比较[J]. *中国激光*, 2014, 41(2): 0209016.
- 9 Pan B, Kema Q, Huang L, *et al.*. Phase error analysis and compensation for nonsinusoidal waveforms in phase-shifting digital fringe projection profilometry[J]. *Optics Letters*, 2009, 34(4): 416-418.
- 10 Zhang S, Huang P S. Phase error compensation for a 3D shape measurement system based on the phase-shifting method[C]. *SPIE*, 2005, 6000: 6000E.
- 11 Zhang S, Yau S T. Generic nonsinusoidal phase error correction for three-dimensional shape measurement using a digital video projector [J]. *Applied Optics*, 2007, 46(1): 36-43.
- 12 Chen Ling, Deng Wenyi, Lou Xiaoping. Phase unwrapping method base on multi-frequency interferometry[J]. *Optical Technique*, 2012, 38(1): 73-78.  
陈玲, 邓文怡, 娄小平. 基于多频外差原理的相位解包裹方法[J]. *光学技术*, 2012, 38(1): 73-78.

- 13 Huang Yanan, Lou Xiaoping. Phase correction and matching based on multi-frequency heterodyne method[J]. Journal of Applied Optics, 2014, 35(2): 237-241.  
黄亚楠, 娄小平. 基于多频外差原理的相位校正及匹配方法研究[J]. 应用光学, 2014, 35(2): 237-241.
- 14 Lei Zhihui, Li Jianbing. Full automatic phase unwrapping method based on projected double spatial frequency fringes[J]. Acta Optica Sinica, 2006, 26(1): 39-42.  
雷志辉, 李健兵. 基于双频投影条纹的全自动相位解包裹方法[J]. 光学学报, 2006, 26(1): 39-42.
- 15 Zhang Hanqing. The research based on projected various fringes for curved-surface measurement[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2006: 14-20.  
章寒清. 基于多频投影条纹的物体曲面测量方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2006: 14-20.
- 16 Zhang Xu, Zhu Limin. Phase error model from Gamma distortion and Gamma calibration[J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(4): 0412006.  
张 旭, 朱利民. Gamma畸变的相位误差模型与Gamma标定技术[J]. 光学学报, 2012, 32(4): 0412006.
- 17 Zheng Dongliang, Da Feipeng. Double-step phase-shifting algorithm for fringe-projection measurement[J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(5): 0512004.  
郑东亮, 达飞鹏. 双步相移光栅投影测量轮廓术[J]. 光学学报, 2012, 32(5): 0512004.

栏目编辑: 张 雁