

离散傅里叶方法分析环缝透镜产生无衍射光束

孙 川 陈培宗 吴逢铁

华侨大学信息科学与工程学院福建省光传输与变换重点实验室, 福建 厦门 361021

摘要 使用离散傅里叶方法分析环缝透镜系统产生无衍射(贝塞尔)光束。将基尔霍夫衍射积分公式与非涅耳衍射积分公式转换成傅里叶变换的形式,在环缝透镜系统中用傅里叶方法描述观察面的光强分布,对衍射面进行数据抽样,导出观察面光强分布的离散化傅里叶公式;通过设置相关参数并使用MATLAB软件进行数值模拟,得到不同位置下的贝塞尔光强分布。设计环缝透镜系统进行实验验证,数值模拟和实验结果匹配度较高,表明离散傅里叶方法应用于环缝透镜系统是可行的。

关键词 傅里叶光学;无衍射光束;离散傅里叶变换;环缝透镜系统

中图分类号 O438

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201636.0407001

Discrete Fourier Method Analyses Bessel Beam Generated by Lens-Annular Slit

Sun Chuan Chen Peizong Wu Fengtie

Fujian Key Laboratory of Optical Beam Transmission and Transformation, College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen, Fujian 361021, China

Abstract Bessel beam generated by lens-annular slit system is analyzed in discrete Fourier transform method. In the theoretical part, Kirchhoff diffraction integral formula and Fresnel diffraction integral formula are expressed in the form of Fourier transform, the complex amplitude distribution of each surface is described in Fourier method. After collating and sampling, a discrete Fourier formula is derived to describe the intensity distribution of observation surface which has function relation with diffraction surface. After setting related parameters and simulating with MATLAB, the results show the intensity distribution of Bessel beam in different propagation distances. At last, an experimental system is designed to verify the theoretical analysis and numerical simulation. Simulation results and pictures from experiment show a higher match degree, which proves that this discrete Fourier transform method is feasible in lens-annular slit system.

Key words Fourier optics; Bessel beam; discrete Fourier transform; lens-annular slit system

OCIS codes 070.2025; 070.2580; 070.7345; 200.2610

1 引 言

贝塞尔光束^[1]被提出后,因其在传输领域中表现出的独特性质,如中心光斑极小、光强极大、在一定范围内不发散、遇到障碍物会自重建^[2-3]等,使得贝塞尔光束一直受到广大学术界的极大关注,并在众多领域内得到应用,如光学成像^[4]、光学拉力^[5]、光学扳手^[6]、粒子囚禁^[7]、生物细胞成像^[8]等,是光学领域研究的热点。

国内外学者对贝塞尔光束的研究主要基于基尔霍夫公式、菲涅耳公式、柯林斯公式等标量衍射理论公式^[9-10],这些公式在标量近似的情况下可以较好地描述衍射现象,但在复杂系统下相应的衍射公式会因为过

收稿日期: 2015-11-25; 收到修改稿日期: 2015-12-17

基金项目: 国家自然科学基金(61178015)、福建省科技创新平台计划项目(2012H2002)、泉州市科技重点项目(2014Z127)

作者简介: 孙 川(1989—),男,硕士研究生,主要从事光束传输与变换方面的研究。E-mail: sch_789@163.com

导师简介: 吴逢铁(1958—),男,博士,教授,主要从事光束传输与变换、短脉冲技术及非线性光学等方面的研究。

E-mail: fengtie@hqu.edu.cn(通信联系人)

多的积分变得庞大而繁复,模拟与计算显得非常困难。此时傅里叶分析方法便体现出了优势,将空间衍射视为频谱通过线性不变系统,只需要进行相应的傅里叶变换就能得到光强分布,在满足抽样定理^[11]的条件下,傅里叶方法可以对衍射问题进行快速求解。经典的菲涅耳衍射系统已经有相关人员进行研究并在现代光学计算中获得了应用^[12]。而在特殊光束领域(如无衍射贝塞尔光的分析),使用傅里叶方法描述尚无报道。本文以环缝透镜系统为例,使用傅里叶方法分析平行光入射环缝透镜系统后的振幅分布公式,对衍射面进行数据抽样并使用MATLAB软件进行数值模拟,得到了不同位置下的贝塞尔光强分布。同时设计实验对数值模拟进行验证,结果相互吻合。

2 理论分析

环缝透镜系统的光路如图1所示,假设衍射元件的振幅透射率为 $t_1(x_0, y_0)$, 平行光经过衍射面的复振幅 $U_1(x_0, y_0) = t_1(x_0, y_0)$, 由基尔霍夫衍射公式的角谱理论^[13-14]可知,在与衍射元件距离为 d 的透镜入射面上,光束的复振幅 $U_2(x_1, y_1)$ 在频域内表示为:

$$A_2(u, v) = A_1(u, v) \cdot H(u, v) = T_1(u, v) \cdot \exp\left[i \cdot k \cdot d \cdot \sqrt{1 - (\lambda \cdot u)^2 - (\lambda \cdot v)^2}\right], \quad (1)$$

其中, $A_1(u, v)$ 、 $A_2(u, v)$ 分别是复振幅 $U_1(x_0, y_0)$ 、 $U_2(x_1, y_1)$ 的角谱, $T_1(u, v)$ 为 $t_1(x_0, y_0)$ 的傅里叶变换, i 为虚数, λ 为波长, k 为波矢, $H(u, v)$ 是系统传递函数,用 $\text{FT}()$ 表示傅里叶变换, $\text{IFT}()$ 表示逆傅里叶变换,则透镜入射面上的复振幅分布为:

$$U_2(x_1, y_1) = \text{IFT}[A_2(u, v)] = \text{IFT}\left\{\text{FT}[t_1(x_0, y_0)] \cdot \exp\left[i \cdot k \cdot d \cdot \sqrt{1 - (\lambda \cdot u)^2 - (\lambda \cdot v)^2}\right]\right\}, \quad (2)$$

透镜的振幅透射率为 $t_2(x_1, y_1) = \exp\left[-\frac{i \cdot k}{2 \cdot f} \cdot (x_1^2 + y_1^2)\right]$, f 为透镜焦距,那么其出射面振幅 $U_3(x_1, y_1) = U_2(x_1, y_1) \cdot t_2(x_1, y_1)$, 由菲涅耳衍射公式的角谱理论知,从透镜出射的光束在传播距离为 z 的观察面上的复振幅分布为:

$$U_4(x, y) = \frac{1}{i \cdot \lambda \cdot z} \cdot \exp\left[i \cdot k \cdot \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2 \cdot z}\right)\right] \cdot \text{FT}\left[U_3(x_1, y_1) \cdot \exp\left(i \cdot k \cdot \frac{x_1^2 + y_1^2}{2 \cdot z}\right)\right]_{\substack{u = \frac{x}{\lambda \cdot z} \\ v = \frac{y}{\lambda \cdot z}}}, \quad (3)$$

代入光强分布公式 $I(x, y) = |U(x, y)|^2$, 经过整理,得到观察面上的光强分布:

$$I_4(x, y) = |U_4(x, y)|^2 = \frac{1}{(i \cdot \lambda \cdot z)^2} \cdot \left| \text{FT}\left\{\text{IFT}\left\{\text{FT}[t_1(x_0, y_0)] \cdot \exp\left[i \cdot k \cdot d \cdot \sqrt{1 - (\lambda \cdot u)^2 - (\lambda \cdot v)^2}\right]\right\} \cdot \exp\left[i \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot z} - \frac{1}{2 \cdot f}\right) \cdot (x_1^2 + y_1^2)\right]\right\}_{\substack{u = \frac{x}{\lambda \cdot z} \\ v = \frac{y}{\lambda \cdot z}}}\right|^2. \quad (4)$$

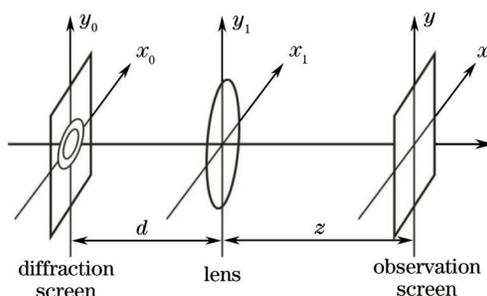


图1 环缝透镜系统光路图

Fig.1 Optical path of lens-annular slit lens system

使用计算机进行光强分布的数值模拟必须对(4)式进行离散化^[15-16],为此首先进行变量代换,由(4)式可知 x 、 y 与 u 、 v 的关系为:

$$\begin{cases} x = u \cdot \lambda \cdot z \\ y = v \cdot \lambda \cdot z \end{cases} \quad (5)$$

对衍射元件进行抽样,假设衍射屏在 x, y 方向的抽样数据为 $M \times N$, 抽样间隔分别为 $\Delta x, \Delta y$, 由抽样定理知, 在频域 u, v 方向上的抽样间隔 $\Delta u, \Delta v$ 具有关系:

$$\begin{cases} \Delta x \cdot \Delta u = \frac{1}{M} \\ \Delta y \cdot \Delta v = \frac{1}{N} \end{cases} \quad (6)$$

将(5)式、(6)式代入(4)式, 经过变量代换与整理得到观察面光强分布的离散化公式:

$$I(mf, nf) = \frac{1}{(i \cdot \lambda \cdot z)^2} \cdot \left\{ \text{DFT} \left\{ \text{IDFT} \left\{ \text{DFT} [t_1(m, n)] \cdot \exp \left[i \cdot k \cdot d \cdot \sqrt{1 - \left(\lambda \cdot mf \cdot \frac{1}{M \cdot \Delta x} \right)^2 - \left(\lambda \cdot nf \cdot \frac{1}{N \cdot \Delta y} \right)^2} \right] \right\} \right\} \right\}^2 \cdot \left\{ \exp \left\{ i \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot z} - \frac{1}{2 \cdot f} \right) \cdot \left[\left(\lambda \cdot z \cdot mf \cdot \frac{1}{M \cdot \Delta x} \right)^2 + \left(\lambda \cdot z \cdot nf \cdot \frac{1}{N \cdot \Delta y} \right)^2 \right] \right\} \right\}^2 \quad (7)$$

式中, m 为 $0, 1, 2, 3, \dots, M-1$; n 为 $0, 1, 2, 3, \dots, N-1$; $\text{DFT}()$ 表示离散傅里叶变换, $\text{IDFT}()$ 表示离散逆傅里叶变换。

3 数值模拟

为了完成计算机对环缝透镜系统出射光束强度分布的数值模拟, 需要对衍射面进行抽样, 由 Whittaker-Shannon 抽样^[11]定理知, 沿 x 方向抽样间隔 Δx 需满足: $\Delta x \leq \frac{1}{2B_x}$, $2B_x$ 为带限函数在频率平面上不为 0 区域的大小, 当 Δx 满足以上条件时, 函数可以得到完美的恢复。假设对简单周期性函数的一个周期内进行最少次数的抽样, 抽样间隔为 Δx_1 , 则其频域内频谱的重复周期为 $\frac{1}{\Delta x_1}$, 即此函数在频域内的分布范围为 $\frac{1}{\Delta x_1}$, 因此, 函数在最少抽样量时的抽样间隔越小, 频域内频谱分布范围越大。

一个复杂的抽样面, 可视为许多简单周期性函数的线性叠加, 其频谱分布可视为相应函数频谱的叠加, 那么频域内的频谱分布范围由抽样面简单函数的最小周期决定, 即频谱分布范围由抽样面上最小尺寸决定。对于正弦函数, 在保证完美复原的前提下进行抽样, 最少要抽样 2 次, 假设抽样面内最小尺寸为 x_{\min} , 则有 $2B_x = \frac{2}{x_{\min}}$, 代入 $\Delta x \leq \frac{1}{2B_x}$, 得 $\Delta x \leq \frac{x_{\min}}{2}$, 又知 $\Delta x = \frac{X}{M}$, X 为抽样面 x 方向取值范围, M 为 x 方向取样次数, 经过整理, 得到抽样面 x 方向的最低取样次数为:

$$M \geq \frac{2 \cdot X}{x_{\min}} \quad (8)$$

y 方向的取样条件与(8)式形式相同, 抽样面使用直径为 4.0 mm, 缝宽 0.1 mm 的环缝, 衍射面范围 $20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ (如图 2 所示), 依据判定条件(8)式, 抽样次数要满足 $M \geq 400, N \geq 400$; 取 $M = N = 1024$, 则沿 x, y 方向的抽样间隔均为 0.0195 mm, 令波长 $\lambda = 6.328 \times 10^{-4} \text{ mm}$, 焦距 $f = 190 \text{ mm}$, $d = 50 \text{ mm}$, 根据离散化公式(7)式所示, 用 MATLAB 软件对不同轴向距离 z 的光强分布进行模拟, 结果如图 3 所示。

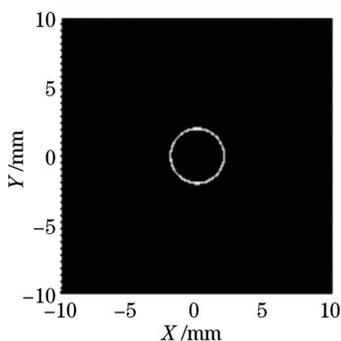


图 2 环缝透镜系统衍射屏

Fig.2 Diffraction screen of lens-annular slit system
0407001-3

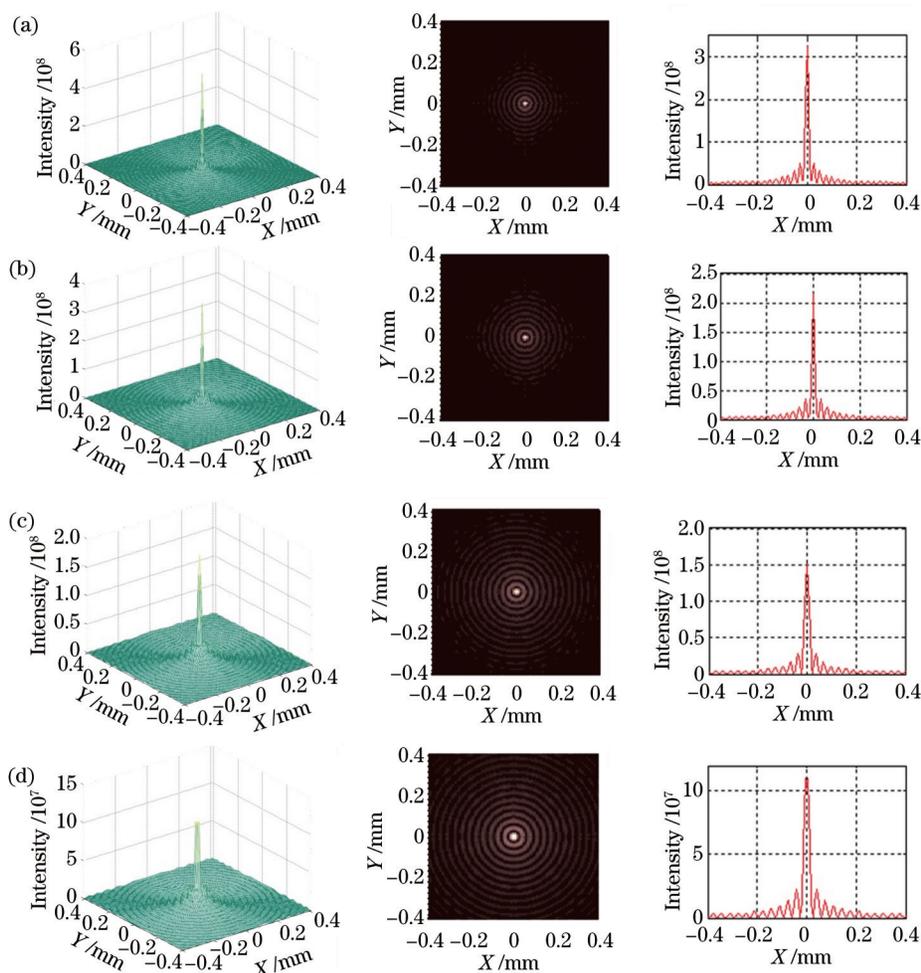


图3 不同距离下贝塞尔光束的光强分布。(a) $z=150$ mm; (b) $z=170$ mm; (c) $z=190$ mm; (d) $z=210$ mm

Fig.3 Intensity distribution of Bessel beam at different distances. (a) $z=150$ mm; (b) $z=170$ mm; (c) $z=190$ mm; (d) $z=210$ mm

图3(a)为观察屏在 $z=150$ mm处光强分布,从左到右依次为三维空间分布、光强的平面分布与截面分布。可以明显看出,在该面上中心光强值约为 3.2×10^8 ,远高于周围条纹的强度值,中心亮斑的半径小于 $30 \mu\text{m}$,表现为观察屏上亮度值极高的极小光斑,而且光束的强度值分布与贝塞尔函数的分布形式类似,是典型的近似无衍射光束。当观察距离从150 mm增大到170 mm和190 mm时,由(b)、(c)可以明显看出,光束的强度分布基本不变仅是最大光强值有所起伏,光束中心亮斑半径基本不变;当观察距离增大到210 mm时,光斑半径开始增大但仍小于0.05 mm,中心光强虽减小到 1.1×10^8 ,但远大于周围条纹的强度值,光强分布依旧符合贝塞尔函数的分布形式;在整个传播过程中,贝塞尔光束表现出了一种光强分布不随着观察距离的增大而改变的“无衍射”特性。模拟结果证明了环缝透镜系统能够产生贝塞尔光束图样,基于离散傅里叶分析方法的数值模拟能够很好地展示贝塞尔光束的“无衍射”特性,模拟结果与理论预期相符。

4 实验验证

为了验证模拟结果,设计实验光路如图4所示。实验所用参数与模拟参数一致:激光波长为 $0.6328 \mu\text{m}$,透镜焦距分别为 $f_1=15$ mm, $f_2=150$ mm, $f_3=190$ mm,环缝直径为4.0 mm,缝宽0.1 mm,环缝与 f_3 的距离为50 mm。

平行光经过环缝透镜系统后产生在一定距离内“不发散”的近似无衍射光,使用体式显微镜进行观察并用CCD进行拍摄,实验结果如图5所示。从图5可以看出,在所有距离的观察面上,实验结果与模拟结果相似,两者均呈现一个个圆环状光圈分布,中心为亮点并且每个光环的光强分布由内到外依次递减。由于实验图片进行了一定程度的放大,中心光斑比模拟结果看起来更大,但经过测量,实验结果的光斑半径小于

30 μm , 与模拟结果相近。实验中采取使用 CCD 拍摄图片的形式记录, 截面光强分布是从图片中提取出来的, 为了拍摄到周围的条纹, 光衰减得较低, 这导致中心光强极高, 远远超出图片所能记录的范围, 因此, 图 5 截面光强分布中, 中心光强虽然较高, 但远没有达到模拟结果的高度。实验结果中, 传播距离在 150、170、190 mm 处的图片比模拟结果拥有更多数量的光环, 这是因为在模拟结果中外层光环相对中心的光强值较小, 不易分辨, 而在实验中为了便于观察, 调小了光衰, 使得周围光环清晰可见。从图 5 不同距离下的实验结果中可以看出, 随着观察距离的不断增加, 光束图样分布、光强强度分布特性、中心光斑尺寸基本没有发生变化, 中心光斑始终保持着较高的强度与较小的半径, 光斑大小基本不变且图样中央一直保持着较高的亮度, 在整体上表现出了光束能量的集中与光束图样不随距离变化的“无衍射”特性。受到 CCD 观测精度与实验记录方法的限制, 实验结果与模拟结果还是存在差异, 但是除了用图片记录导致的中心光强值不准, 实验结果与模拟结果在光束图样分布、光强强度分布特征、中心光斑尺寸等方面还是表现出了较好的吻合效果。

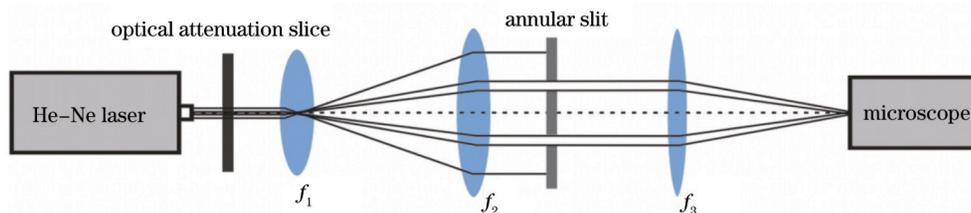


图 4 实验光路图

Fig.4 Schematic of experiment

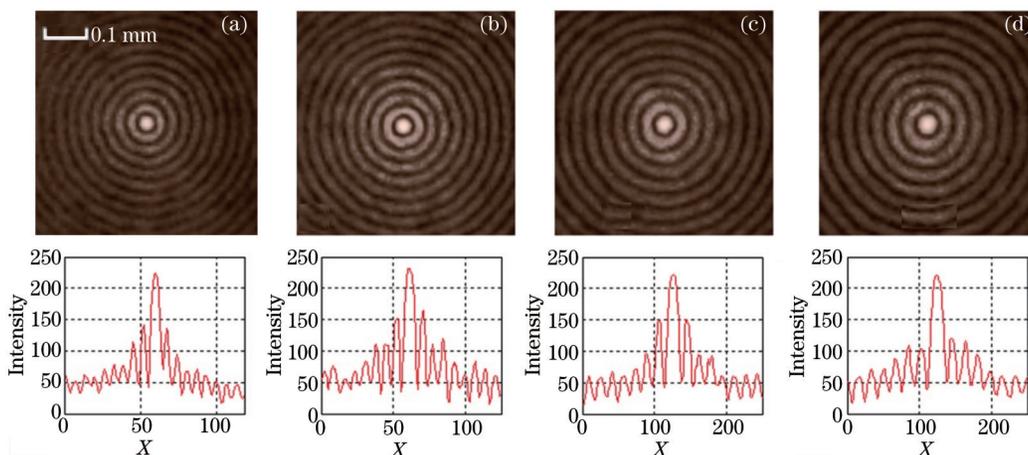


图 5 实验产生贝塞尔光束截面光强分布。(a) $z=150\text{ mm}$; (b) $z=170\text{ mm}$; (c) $z=190\text{ mm}$; (d) $z=210\text{ mm}$

Fig.5 Section intensity distribution of Bessel beam in the experiment. (a) $z=150\text{ mm}$; (b) $z=170\text{ mm}$; (c) $z=190\text{ mm}$; (d) $z=210\text{ mm}$

5 结 论

依据角谱理论使用离散傅里叶方法分析环缝透镜系统产生贝塞尔光束, 对衍射元件进行抽样并用 MATLAB 进行数值模拟, 得到了不同距离下观察面光强分布的模拟图, 设计实验进行验证, 模拟结果与实验结果相吻合。模拟结果与实验结果很好地解释了贝塞尔光束的“无衍射”特性, 证明了使用离散傅里叶方法能够很好地描述特殊光束系统, 这为特殊光束的研究增加了一种计算简便、精确、可靠的分析方法。

参 考 文 献

- 1 Lu Xuanhui, Chen Xumin, Zhang Lei, *et al.*. High-order Bessel-Gaussian beam and its propagation properties[J]. Chin Phys Lett, 2003, 20(12): 2155-2157.
- 2 Fan Dandan, Wu Fengtie, Cheng Zhiming, *et al.*. Reconstruction of incoherent source Bessel beam[J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(10): 104219.
范丹丹, 吴逢铁, 程治明, 等. 非相干光源无衍射光的自重建[J]. 物理学报, 2013, 62(10): 104219.
- 3 Zhang Qian'an, Wu Fengtie, Zheng Weitao, *et al.*. Self-reconstructing properties of high-order Bessel-Gauss beam[J]. Sci Sin Phys,

- 2011, 41(10): 1131-1137.
张前安, 吴逢铁, 郑维涛, 等. 高阶贝塞尔-高斯光束的自重建特性[J]. 中国科学, 2011, 41(10): 1131-1137.
- 4 Craig Snoeyink, Steve Wereley. Single-image far-field subdiffraction limit imaging with axicon[J]. Optics Letters, 2013, 38(5): 625-627.
- 5 Chen J, Ng J, Lin Z F, *et al.*. Optical pulling force[J]. Nature Photonics, 2011, 5(9): 531-534.
- 6 Mac Donald M P, Paterson L, Volke-Sepulveda K, *et al.*. Creation and manipulation of three-dimensional optically trapped structures [J]. Science, 2002, 296(5570): 1101-1103.
- 7 Grier D G. A revolution in optical manipulation[J]. Nature, 2003, 424(6950): 810-816.
- 8 Thomas A Planchon, Liang Gao, Daniel Milkie, *et al.*. Rapid three-dimensional isotropic imaging of living cells using Bessel beam plane illumination[J]. Nature Methods, 2011, 8(5): 417-423.
- 9 Xie Xiaoxia, Wu Fengtie, Li Dong. Effect of bifocal lens on propagation of Bessel beam[J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(18): 180201.
谢晓霞, 吴逢铁, 李冬. 双焦透镜对贝塞尔光束传输的影响[J]. 物理学报, 2014, 63(18): 180201.
- 10 Fang Xiang, Chen Jing, Wu Fengtie, *et al.*. Generation of long-distance non-diffracting beams using a concave axicon[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(5): 0508002.
方翔, 陈婧, 吴逢铁, 等. 产生长距离近似无衍射光束的凹锥透镜[J]. 光学学报, 2013, 33(5): 0508002.
- 11 Joseph W Goodman. Introduction to Fourier optics[M]. Qin Kecheng, Liu Peisen, Chen Jiabi, *et al.* Transl.. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2006: 57-61.
古德曼. 傅里叶光学导论[M]. 秦克诚, 刘培森, 陈家碧, 等译. 北京: 电子工业出版社, 2006: 57-61.
- 12 Zhang Qing, Liu Qiuwu. Computer simulation of light wave diffraction by screens of different shape[J]. Physics Experimentation, 2006, 26(10): 14-17.
张庆, 刘秋武. 计算机模拟任意形状衍射屏的衍射[J]. 物理实验, 2006, 26(10): 14-17.
- 13 Lü Naiguang. Fourier optics[M]. Beijing: China Machine Press, 2006: 80-85.
吕乃光. 傅里叶光学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006: 80-85.
- 14 Guo Chengshan, Li Chuantao, Hong Zhengping, *et al.*. Suitability of different sampling methods for digital simulations of the optical diffraction[J]. Acta Optica Sinica, 2008, 28(3): 442-446.
国承山, 李传涛, 洪正平, 等. 光衍射数值模拟中不同抽样方法的适用性分析[J]. 光学学报, 2008, 28(3): 442-446.
- 15 Schmidt J D. Numerical simulation of optical wave propagation with examples in MATLAB[M]. Washington: SPIE Press, 2010.
- 16 Yang Jing, Wu Xuecheng, Wu Yingchun, *et al.*. Study on extending the depth of field in reconstructed image for a micro digital hologram [J]. Acta Physica Sinica, 2015, 64(11): 114209.
阳静, 吴学成, 吴迎春, 等. 数字显微全息重建图像的景深扩展研究[J]. 物理学报, 2015, 64(11): 114209.

栏目编辑: 史敏