

# 两比特纯态纠缠的直接测量

翟晨慧 储文静 章礼华 杨 名

安徽大学物理与材料科学学院, 安徽 合肥 230601

**摘要** 研究了如何在不需要量子态重构的前提下直接测量一个两比特任意纯态的纠缠 concurrence。设计了一个 concurrence 的直接测量量子线路,即通过对待测纠缠粒子对的两个全同拷贝实施  $\sigma_z$  操作、单比特 R 旋转操作以及奇偶宇称校验检测,使得 concurrence 被编码在最后获得某些状态的概率中,从而实现对 concurrence 的直接测量。在给出 concurrence 直接测量的量子线路的基础上,基于光学系统设计了一个直接测量光子偏振纠缠 concurrence 的物理方案,实现两比特耦合的奇偶宇称校验检测操作只出现一次,大大降低了方案的复杂度。另外,该方案可实现远程纠缠态的纠缠直接测量。

**关键词** 量子光学; 纠缠纯态; 奇偶宇称校验检测

中图分类号 O431.2 文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201636.0327002

## Direct Measurement of Concurrence for Two-Qubit Pure States

Zhai Chenhui Chu Wenjing Zhang Lihua Yang Ming

School of Physics and Materials Science, Anhui University, Hefei, Anhui 230601, China

**Abstract** How to directly measure the concurrence of two-qubit pure states without quantum state tomography is studied. A quantum circuit is designed which can encode the concurrence of a general two-qubit pure state into the probability of obtaining some specific states at the detection stage. Here, two copies of the initial state are needed in each measurement round and several operations, such as  $\sigma_z$  operation, simple qubit rotation R and parity-check measurement (PCM), are carried out on them. An optical implementation scheme for the direct measurement of the concurrence for polarization entangled pure state is proposed. Only one PCM for coupling two qubits is needed, which greatly reduces the complexity of the scheme. In addition, this scheme can directly measure the concurrence of remote entanglement.

**Key words** quantum optics; entangled pure states; parity-check measurement

**OCIS codes** 270.5585; 270.5565; 270.5570

## 1 引言

量子纠缠态在量子通信和量子计算中起着十分重要的作用<sup>[1]</sup>,纠缠光束的产生方法已经相对成熟<sup>[2-4]</sup>。通常为了实现量子通信,量子通道必须是最大纠缠态或已知纠缠度的部分纠缠态<sup>[5-6]</sup>,所以如何量化一个给定纠缠态的纠缠大小对于量子通信来说十分重要。目前人们已经提出了多种纠缠度量方式<sup>[7]</sup>,虽然其中的多体系统纠缠度量方式还没有被普遍认可,但其中的两体纠缠度量理论已经非常成熟。对于两体系统而言,形成纠缠度(EOF)是目前普遍采用的纠缠度量方法<sup>[8]</sup>。人们利用 EOF 对噪声给纠缠体系带来的影响进行了深入研究,给出了噪声系统的纠缠动力学行为<sup>[9-11]</sup>。

虽然两比特纠缠有了上述的纠缠度量方式,但是如果需要获悉一个未知的两比特量子态的纠缠仅有纠缠度量方式还是不够的,必须还要通过对量子系统进行测量获知量子系统状态的具体形式,即量子态层析

收稿日期: 2015-08-24; 收到修改稿日期: 2015-09-24

基金项目: 国家自然科学基金(11274010)、教育部高等学校博士学科点专项科研基金(20113401110002)

作者简介: 翟晨慧(1992—),女,硕士研究生,主要从事量子光学方面的研究。E-mail: 1648765049@qq.com

导师简介: 杨 名(1979—),男,博士,教授,主要从事量子光学和信息方面的研究。

E-mail: mingyang@ahu.edu.cn(通信联系人)

技术<sup>[12-14]</sup>。然而,量子态层析技术要求,必须对未知量子态的多个拷贝进行多个测量基的测量,从测量结果中重构出未知量子态。在量子态被重构后,才可以采用上述的纠缠度量方式计算出该量子态的纠缠大小。这无疑给未知量子态的纠缠度量带来了很高的复杂度。为了减小这种复杂度,人们提出了纠缠度的直接测量方案,即不需要重构未知量子态,而是通过精心设计使得可以从测量结果中直接读出量子态的纠缠度<sup>[15-17]</sup>。2006年,秩为2的两光子纯态纠缠的直接测量已经得到实验的验证<sup>[18]</sup>。2007年,Romero等<sup>[19]</sup>提出了能够直接探测两原子纯态纠缠的物理方案。复杂的控制非门是这两个方案的核心操作,这就大大提高了方案的复杂度。为了避免复杂的控制非门,本课题组基于信号光子与探测相干光的非线性相互作用,设计了一个能够直接测量秩为4的一般两光子纯态纠缠的物理方案<sup>[20]</sup>。上述光子纠缠态的直接测量方案都是破坏性的,即测量后光子都被吸收了。因此,基于上述光学非线性相互作用,本课题组又提出了一个既能直接测量两光子态的纠缠又不吸收光子的物理方案<sup>[21]</sup>。

虽然文献<sup>[20]</sup>中的物理方案避免了复杂的控制非门操作,但是该方案三次用到基于非线性 Kerr介质的两光子态奇偶宇称校验检测(PCM),这说明该方案的复杂度还是比较高。由于在纠缠直接测量中,耦合操作不可避免,如何尽可能减少这种耦合操作就直接决定了方案的最终复杂度。本文设计一个秩为4的一般两光子纯态纠缠的直接测量物理方案,在该方案中,两光子态奇偶宇称校验检测次数将被减小到最小值1,这无疑将大大简化纠缠直接测量方案的复杂度。虽然该方案不能像文献<sup>[21]</sup>中的方案那样不吸收光子,但对光子的全部探测和吸收为代价来换取方案的极大简化也是值得的。该方案主要涉及到的操作有泡利算符 $\sigma_x$ 、单比特R旋转操作以及奇偶宇称校验检测。与已有的直接测量纠缠的方法相比,该方案的优点在于操作简单,易于实现。另外,该方法还可以应用于远程纠缠态的纠缠直接测量上,在量子通信领域具有十分重要的意义。

## 2 两比特纯态纠缠的直接测量量子线路

目前,EOF是最常采用的一种两体纠缠度量方式。任意两比特态 $\rho$ 的EOF可被定义成 concurrence( $C$ )的准确函数。而这一参量 $C$ 可定义为 $C(\rho) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}$ ,其中的 $\lambda_i(i=1, 2, 3, 4)$ 是矩阵 $\rho\tilde{\rho}$ 按降序排列的本征值。 $\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y$ ,  $\sigma_y$ 是泡利算符, $\rho^*$ 是 $\rho$ 的复共轭。两比特纯态 $|\varphi\rangle = c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle$ 的 concurrence可简化为

$$C(|\varphi\rangle) = |\langle \varphi | \sigma_y \otimes \sigma_y | \varphi^* \rangle| = 2|c_0c_3 - c_1c_2|, \quad (1)$$

式中的系数满足归一化条件 $|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$ ,其形成纠缠度 EOF则表示为

$$E(|\varphi\rangle) = -\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} \log_2 \frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2} \log_2 \frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2}. \quad (2)$$

任意两比特纯态的 concurrence的直接测量方案示意图如图1所示。这里需要同时对两对全同粒子1,2和3,4实施操作和测量。设每个两粒子的纯态都可表示为 $|\phi\rangle = c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle$ ,式中的叠加系数满足归一化条件 $|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$ ,该四粒子状态为 $|\Phi\rangle_{1234} = |\phi\rangle_{12} \otimes |\phi\rangle_{34}$ 。让粒子1,2,3,4通过如图1所示的量子线路。首先粒子1,2没有经过任何操作装置,而粒子3,4均经过泡利算符 $\sigma_x$ 操作, $\sigma_x = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ 。此时两对粒子的状态变成

$$|\phi\rangle_{12} = c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle, \quad (3)$$

$$|\tilde{\phi}\rangle_{34} = (\sigma_x \otimes \sigma_x)|\phi\rangle_{34} = c_0|00\rangle - c_1|01\rangle - c_2|10\rangle + c_3|11\rangle. \quad (4)$$

由(3)式和(4)式可得此时四个粒子的状态:

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle_{1234} = & |\phi\rangle_{12} \otimes |\tilde{\phi}\rangle_{34} = c_0^2|0000\rangle - c_0c_1|0001\rangle - c_0c_2|0010\rangle + \\ & c_0c_3|0011\rangle + c_1c_0|0100\rangle - c_1^2|0101\rangle - c_1c_2|0110\rangle + c_1c_3|0111\rangle + \\ & c_2c_0|1000\rangle - c_2c_1|1001\rangle - c_2^2|1010\rangle + c_2c_3|1011\rangle + c_3c_0|1100\rangle - \\ & c_3c_1|1101\rangle - c_3c_2|1110\rangle + c_3^2|1111\rangle \end{aligned} \quad (5)$$

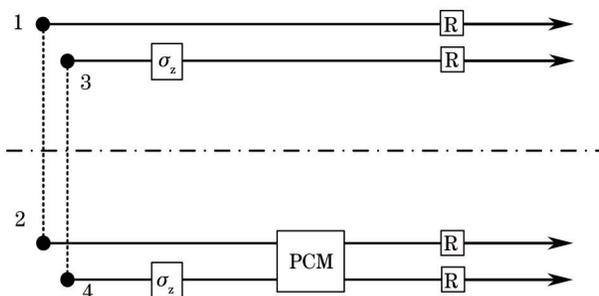


图 1 实现两比特纯态 concurrence 直接测量的量子线路

Fig.1 Quantum circuit for direct measurement of concurrence for two-qubit pure states

此时对 1, 3 粒子不做任何操作, 而让 2, 4 粒子通过奇偶宇称校验检测。略去 2, 4 粒子的偶宇称态, 保留其奇宇称态, 则四个粒子的状态从(5)式变为

$$|\Phi\rangle_{1234} = -c_0c_1|0001\rangle + c_0c_3|0011\rangle + c_1c_0|0100\rangle - c_1c_2|0110\rangle - c_2c_1|1001\rangle + c_2c_3|1011\rangle + c_3c_0|1100\rangle - c_3c_2|1110\rangle \quad (6)$$

最后, 四个粒子均通过单比特 R 旋转操作, 即将  $|0\rangle \rightarrow (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ ;  $|1\rangle \rightarrow (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ 。此时四个粒子的状态演化为:

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle_{1234} = & \frac{1}{2}(c_0c_3 - c_1c_2)|0000\rangle + \frac{1}{2}(c_0c_1 - c_2c_3)|0001\rangle + \\ & \frac{1}{2}(c_0c_3 + c_1c_2 + c_0c_1 + c_2c_3)|0011\rangle + \frac{1}{2}(c_2c_3 - c_0c_1)|0100\rangle - \\ & \frac{1}{2}(c_0c_3 - c_1c_2)|0101\rangle - \frac{1}{2}(c_0c_3 + c_1c_2 + c_0c_1 + c_2c_3)|0110\rangle + \\ & \frac{1}{2}(c_0c_1 + c_2c_3 - c_0c_3 - c_1c_2)|1001\rangle - \frac{1}{2}(c_0c_3 - c_1c_2)|1010\rangle + \\ & \frac{1}{2}(c_0c_1 - c_2c_3)|1011\rangle + \frac{1}{2}(c_0c_3 + c_1c_2 - c_0c_1 - c_2c_3)|1100\rangle + \\ & \frac{1}{2}(c_2c_3 - c_0c_1)|1110\rangle + \frac{1}{2}(c_0c_3 - c_1c_2)|1111\rangle \end{aligned} \quad (7)$$

由(7)式可见两比特纯态  $|\phi\rangle_{12}$  或  $|\phi\rangle_{34}$  的 concurrence 出现在  $|0000\rangle$ 、 $|1010\rangle$ 、 $|0101\rangle$ 、 $|1111\rangle$  前的系数中, 则测得最终  $|0000\rangle$ 、 $|1010\rangle$ 、 $|0101\rangle$ 、 $|1111\rangle$  的概率为

$$P = |c_0c_3 - c_1c_2|^2 \quad (8)$$

由(1)式和(8)式可获得两比特纯态的 concurrence:

$$C(|\phi\rangle) = 2|c_0c_3 - c_1c_2| = 2\sqrt{P} \quad (9)$$

显然, 由于每个粒子对中的粒子的对称性, 在将 1, 2 和 3, 4 对调后依然可以获得以上结果。在实际操作中, 需要重复上述方案多次以实现 concurrence 的直接测量。这里的奇偶宇称校验检测的结果可能是奇宇称也可能是偶宇称, 但这里只选择奇宇称态。如果检测结果是偶宇称态, 说明该直接测量过程失败, 必须重新开始此方案, 直到检测到所需要的结果。从(8)式可以看出, concurrence 就被编码在最后获得特定状态的概率中, 即可以通过测量(9)式中的 P 来直接获得两比特纯态  $|\phi\rangle_{12}$  或  $|\phi\rangle_{34}$  的 concurrence。

从该纠缠直接测量方案的实现过程来看, 其不仅适用于局域纠缠(四个粒子都在一处), 也适用于远程纠缠(纠缠粒子分布在空间分离的用户手中)。图 1 中的点划线表示纠缠粒子对 1, 2(或 3, 4)中的两个粒子可以是类空分离的。只要保证粒子 1, 3 在一个用户手中, 粒子 2, 4 在另一个用户手中即可。这样只要允许两个用户之间有经典通信, 则上述方案就可以实现远程纠缠的直接测量。两个用户可以通过经典通信协调相应的操作和测量, 并比较二者的结果, 以得到某个四粒子状态的计数率, 这样就可以通过(9)式得到相应的远程纠缠态的纠缠。

### 3 光子偏振纠缠的直接测量方案

上述量子线路是针对一般两比特体系的纠缠纯态而设计的,可适用于任何两态系统的纯态纠缠的直接测量。以光子为例设计一个偏振光子纠缠的直接测量方案。

要实现对偏振光子纠缠的直接测量,只需要实现上节中的泡利算符  $\sigma_z$ 、单比特 R 旋转操作以及奇偶宇称校验检测。而这些操作可用波片、分束器等线性光学器件以及非线性相互作用来实现。

#### 3.1 $\sigma_z$ 的光学实现

对于光子而言,泡利算符  $\sigma_z$  操作可表示为  $\sigma_z = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|$ 。泡利算符  $\sigma_z$  操作可使光子态  $|\psi\rangle = a|H\rangle + b|V\rangle$  变为  $|\psi\rangle = a|H\rangle - b|V\rangle$ ,式中叠加系数满足归一化条件  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ 。也就是说,泡利算符  $\sigma_z$  操作的作用是相位门操作,即  $|H\rangle \rightarrow |H\rangle, |V\rangle \rightarrow -|V\rangle$ 。可以用 HWP<sup>22.5</sup>, HWP<sup>45</sup>, HWP<sup>22.5</sup> 的半波片组合来实现  $\sigma_z$  操作,如图 2 所示。HWP<sup>22.5</sup> 是一个斜置 22.5° 的半波片,其作用是  $|H\rangle \rightarrow (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}, |V\rangle \rightarrow (|H\rangle - |V\rangle)/\sqrt{2}$ ; HWP<sup>45</sup> 是一个斜置 45° 的半波片,其作用是  $|H\rangle \rightarrow |V\rangle, |V\rangle \rightarrow |H\rangle$ 。而 HWP<sup>22.5</sup>, HWP<sup>45</sup>, HWP<sup>22.5</sup> 三个半波片组合的作用正是  $|H\rangle \rightarrow |H\rangle, |V\rangle \rightarrow -|V\rangle$ 。所以,偏振光子依次通过 HWP<sup>22.5</sup>, HWP<sup>45</sup>, HWP<sup>22.5</sup>, 就等效于对该光子进行  $\sigma_z$  操作。其演化过程为

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= a|H\rangle + b|V\rangle \\
 &\xrightarrow{\text{HWP}^{22.5}} a(|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2} + b(|H\rangle - |V\rangle)/\sqrt{2} \\
 &\xrightarrow{\text{HWP}^{45}} a(|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2} + b(|V\rangle - |H\rangle)/\sqrt{2} \\
 &\xrightarrow{\text{HWP}^{22.5}} a|H\rangle - b|V\rangle
 \end{aligned} \tag{10}$$

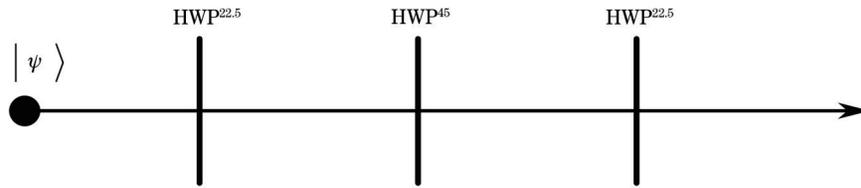


图 2  $\sigma_z$  的光学实现示意图

Fig.2 Schematic diagram of the  $\sigma_z$  operation

#### 3.2 R 操作的光学实现

单比特 R 旋转操作的作用是  $|0\rangle \rightarrow (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}; |1\rangle \rightarrow (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ 。对于光子的偏振态来说,则是  $|H\rangle \rightarrow (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}; |V\rangle \rightarrow (|H\rangle - |V\rangle)/\sqrt{2}$ 。可以用 HWP<sup>22.5</sup> 来实现单光子的 R 旋转操作。HWP<sup>22.5</sup> 是一个斜置 22.5° 的半波片,其作用就是  $|H\rangle \rightarrow (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}, |V\rangle \rightarrow (|H\rangle - |V\rangle)/\sqrt{2}$ 。

#### 3.3 PCM 的实现

下面给出两光子偏振态的奇偶宇称校验检测<sup>[20]</sup>的实现过程(对光子而言  $|0\rangle \rightarrow |H\rangle, |1\rangle \rightarrow |V\rangle$ )。该校验门在量子通信中十分常见,可以通过两个交叉克尔非线性相互作用,一个正则坐标零差测量 X,两个偏振分束器和两个半波片来实现,如图 3 所示。

两个信号光子在通过波片和偏振分束器后与一束探测相干光同时通过非线性介质,并与之发生非线性相互作用。该相互作用会使探测模式中的相干态发生一个与信号光子个数成正比的相移<sup>[20]</sup>。之后,两个信号光子会再次通过波片和偏振分束器,同时,探测模式中的相干光束会经受正则坐标零差探测。从零差探测的结果就可以读取信号光子态的奇偶宇称信息。设光子的输入状态为  $|\psi\rangle_{sa} = a_0|H\rangle_a + a_1|V\rangle_a$ ,  $|\psi\rangle_{sb} = b_0|H\rangle_b + b_1|V\rangle_b$ ,式中  $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1, |b_0|^2 + |b_1|^2 = 1, |\alpha\rangle_p$  是探测模式中的相干态。具体的演化过程为

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_{sa} \otimes |\psi\rangle_{sb} \otimes |\alpha\rangle_p &= (a_0|H\rangle_a + a_1|V\rangle_a) \otimes (b_0|H\rangle_b + b_1|V\rangle_b) |\alpha\rangle_p \\
 &\xrightarrow{HWP_1^{45}} (a_0 b_0 |HV\rangle_{ab} + a_0 b_1 |HH\rangle_{ab} + a_1 b_0 |VV\rangle_{ab} + a_1 b_1 |VH\rangle_{ab}) |\alpha\rangle_p \\
 &\xrightarrow{PBS_1, H_{\pm\theta}} (a_0 b_1 |HH\rangle_{a,b_c} + a_1 b_0 |VV\rangle_{a,b_c}) |\alpha\rangle_p + \left[ a_0 b_0 |HV\rangle_{b_c} |\alpha \exp(-2i\theta)\rangle_p + a_1 b_1 |VH\rangle_{a_c} |\alpha \exp(2i\theta)\rangle_p \right] \\
 &\xrightarrow{PBS_2, HWP_2^{45}} (a_0 b_1 |HV\rangle_{a'b'} + a_1 b_0 |VH\rangle_{a'b'}) |\alpha\rangle_p + \left[ a_0 b_0 |HH\rangle_{a'b'} |\alpha \exp(-2i\theta)\rangle_p + a_1 b_1 |VV\rangle_{a'b'} |\alpha \exp(2i\theta)\rangle_p \right].
 \end{aligned} \tag{11}$$

从(11)式可以看出,可以根据相干态中不同的相位变化将奇宇称态与偶宇称态区分开,且信号光子不被直接吸收,从而在光学上实现了奇偶宇称校验检测。

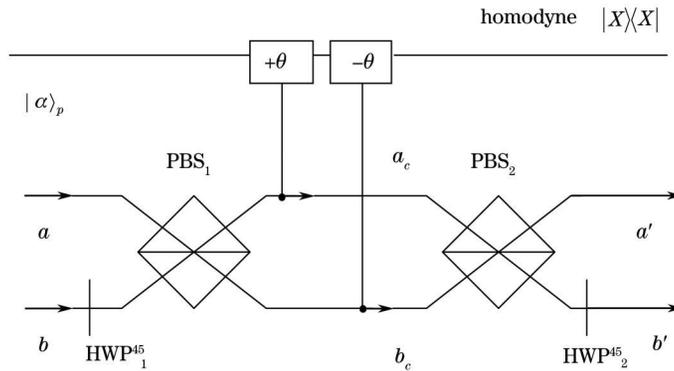


图3 奇偶校验测量门

Fig.3 Schematic diagram of the parity-check measurement

PCM 主要用于区分态  $|HV\rangle, |VH\rangle$  和  $|HH\rangle, |VV\rangle$ 。PBS1 和 PBS2 是两个偏振分束器,用于透射水平偏振成份和反射垂直偏振成份。HWP<sup>45</sup> 是一个斜置 45 度的半波片,它的作用是  $|H\rangle \rightarrow |V\rangle, |V\rangle \rightarrow |H\rangle$ 。±θ 代表两个交叉克尔非线性相互作用分别给探测相干态  $|\alpha\rangle_p$  带来的相位变化。 $|X\rangle\langle X|$  指对探测模式中相干态的正则坐标零差测量 X。

按照图 1 中的方式组合上述光学操作即可实现两光子偏振纯态纠缠的直接测量。

## 4 讨 论

该纠缠直接测量方案中的泡利算符  $\sigma_z$ 、单比特 R 旋转操作以及奇偶宇称校验检测操作都是在光学系统中的常见操作。同时,实现两比特耦合的奇偶宇称校验检测操作在本方案中只出现一次,这将大大降低方案的复杂度,并提高其可行性。此外,该方案还可应用到包括原子体系在内的其他任意两态系统的纯态纠缠的直接测量。

另外,远程纠缠态在量子通信中发挥着重要作用,因此有必要考虑状态的两个分享用户分布在两个相距遥远的地方时的纠缠直接测量问题,即远程纠缠直接测量。分析表明,上述纠缠直接测量方案也适用于远程纠缠。这里光子 1, 3 和 2, 4 分别在两个遥远的用户 Alice 和 Bob 的手中。1, 2 或 3, 4 间的远程纠缠可以用类似于本地纠缠直接测量的方法来进行直接测量,关键在于两个用户必须通过经典通信协调相应的操作和测量。如 Alice 和 Bob 可通过经典通信选取两个纠缠对,并同时实施如图 1 所示的方案。二者的测量结果也是通过经典通信进行比较,以得到某个四光子状态的计数率。这样就可以通过(9)式得到相应的远程纠缠态的纠缠。故该方案也可以用于对远程纠缠态的直接测量。

## 5 结 论

设计了一个无需量子态重构的任意两比特纯态纠缠的直接测量量子线路。该方案中,只需要对待测态的两个拷贝实施泡利算符  $\sigma_z$  操作和 R 旋转操作这两类单比特操作,以及实现两比特耦合的奇偶宇称校验检

测操作,且该耦合操作在方案中只出现一次。通过上述操作可以将两比特纯态的 concurrence 编码在最后获得某些特定状态的概率中,从而可以直接通过测得这些状态的概率来实现对 concurrence 的测量,而无需借助于复杂的量子态重构过程。实现两比特耦合的奇偶宇称校验检测操作在该方案中只出现一次,大大降低了方案的复杂度,并提高了其可行性。同时,在光学系统中设计了该量子线路的物理实现方案,通过对该实现过程的分析表明,该方案简单易行,且可用于远程纠缠的直接测量,对量子通信具有十分重要的意义。

## 参 考 文 献

- 1 Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000: 1–58.
- 2 Kwiat P G, Mattle K, Weinfurter H, *et al.*. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs[J]. Phys Rev Lett, 1995, 75(24): 4337–4341.
- 3 Luo Yu, Li Ying, Pan Qing, *et al.*. Experimental generation of entangled lights from resonating frequency doubler[J]. Acta Optica Sinica, 2006, 26(2): 305–310.  
罗 玉, 李 莹, 潘 庆, 等. 利用谐振倍频产生纠缠光束[J]. 光学学报, 2006, 26(2): 305–310.
- 4 Yan Hui, Xue Zhengyuan, Zhu Shiliang. Generation and modulation of narrow-band photon pairs in cold atomic ensembles[J]. Journal of Anhui University (Natural Science Edition), 2011, 35(2): 1–7.  
颜 辉, 薛正远, 朱诗亮. 冷原子系综中窄线宽纠缠光子对的产生和调制[J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2011, 35(2): 1–7.
- 5 Bennett C H, Wiesner S J. Communication via one-and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states[J]. Phys Rev Lett, 1992, 69(20): 2881–2884.
- 6 Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, *et al.*. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels [J]. Phys Rev Lett, 1993, 70(13): 1895–1899.
- 7 Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, *et al.*. Quantum entanglement[J]. Rev Mod Phys, 2009, 81(2): 865–942.
- 8 Wootters W K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits[J]. Phys Rev Lett, 1998, 80(10): 2245–2248.
- 9 Yu T, Eberly J H. Sudden death of entanglement[J]. Science, 2009, 323(5914): 598–601.
- 10 Sun Chao, Zhang Yingjie, Meng Xiangshui, *et al.*. A study on the pairwise concurrence entanglement in the multipartite open system[J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(12): 3604–3609.  
孙 超, 张英杰, 孟祥水, 等. 开放多体系统中共生纠缠的研究[J]. 光学学报, 2010, 30(12): 3604–3609.
- 11 Zheng Xiaolan, Zhang Bin. Quantum entanglement and correlations between two qubits induced by a heat bath[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(1): 0127002.  
郑小兰, 张 斌. 热库诱导的两比特量子纠缠与量子关联[J]. 光学学报, 2014, 34(1): 0127002.
- 12 James D F V, Kwiat P G, Munro W J, *et al.*. Measurement of qubits[J]. Phys Rev A, 2001, 64(5): 052312.
- 13 White A G, James D F V, Eberhard P H, *et al.*. Nonmaximally entangled states: production, characterization, and utilization[J]. Phys Rev Lett, 1999, 83(16): 3103–3107.
- 14 Mohammadi M, Brańczyk A M, James D F V. Fourier-transform quantum state tomography[J]. Phys Rev A, 2013, 87(1): 012117.
- 15 Horodecki P, Ekert A. Method for direct detection of quantum entanglement[J]. Phys Rev Lett, 2002, 89(12): 127902.
- 16 Horodecki P. Measuring quantum entanglement without prior state reconstruction[J]. Phys Rev Lett, 2003, 90(16): 167901.
- 17 Cai J, Song W. Novel schemes for directly measuring entanglement of general states[J]. Phys Rev Lett, 2008, 101(19): 190503.
- 18 Walborn S P, Souto Ribeiro P H, Davidovich L, *et al.*. Experimental determination of entanglement with a single measurement[J]. Nature, 2006, 440(7087): 1022–1024.
- 19 Romero G, López C E, Lastra F, *et al.*. Direct measurement of concurrence for atomic two-qubit pure states[J]. Phys Rev A, 2007, 75(3): 032303.
- 20 Zhang L H, Yang M, Cao Z L. Direct measurement of the concurrence for two-photon polarization entangled pure states by parity-check measurements[J]. Phys Lett A, 2013, 337(21–22): 1421–1424.
- 21 Zhang L H, Yang Q, Yang M, *et al.*. Direct measurement of the concurrence of two-photon polarization-entangled states[J]. Phys Rev A, 2013, 88(6): 062342.

栏目编辑: 刘丰瑞