

# Zernike 多项式对空间高频相位拟合的改进方法

陈丽霞 胡小川 韩开 张彬

四川大学电子信息学院, 四川 成都 610064

**摘要** 以随机相位屏构造光束波前畸变模型,运用不同阶数的Zernike多项式对其进行拟合。通过对比分析原始波前及拟合波前的功率谱密度,明确了波面拟合过程中Zernike多项式对波前中高频成分拟合存在的不足,进而提出了基于Zernike多项式的分块拟合方式加以改进。研究结果表明:在常规的拟合方式下,随着拟合阶数的增加,能准确反映的波前相位空间频率逐渐向高频范围扩展,但其扩展幅度并不大;此外,即使采用较高的拟合阶数,Zernike多项式也难以准确反映波前空间频率中的高频成分;而采用分块拟合方式后,Zernike多项式的拟合效果明显提升,并能有效反映畸变波前空间频率中的高频成分;在提高波面拟合精度上,增加分块数的效果明显优于增加Zernike多项式拟合阶数;对于分块拟合方式,当分块数一定时,增大子区域拟合所使用的Zernike阶数的拟合效果明显优于增大整体拟合所使用的Zernike阶数。

**关键词** 激光光学; Zernike多项式; 波面拟合; 空间频率

中图分类号 O439

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201636.0314001

## Improvement Method for Fitting High-Frequency Phase by Zernike Polynomials

Chen Lixia Hu Xiaochuan Han Kai Zhang Bin

*College of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China*

**Abstract** A model for wave-front distortions is built up based on the random phase screen, and the wave-front is fitted by Zernike polynomials with different orders. By comparing and analyzing the power spectrum density (PSD) of the original wave-front and the fitted one, the corresponding relationship between the used orders of Zernike polynomials and the spatial frequency of the wave-front is obtained. Consequently, the insufficiency of the conventional method for fitting high frequency phase by Zernike polynomials is revealed, and the local fitting method based on Zernike polynomials is further proposed. In this improvement method, the residual wave-front in the conventional fitting way is decomposed into many subdomains fitted by Zernike polynomials individually. The results indicate that, in the conventional fitting way, the range of spatial frequency of the wave-front that can be accurately described by Zernike polynomials increases gradually with the fitting order of Zernike polynomials, but the increment is modest; even fitted by Zernike polynomials with much higher order, it's difficult to describe the high frequency components of the wave-front accurately. However, the spatial frequency of wave-front accurately described by Zernike polynomials obviously increases by using the local fitting way. In order to increase the fitting accuracy, increasing the number of subdomains is more superior than increasing the number of the used orders of Zernike polynomials. For the number of subdomains in the local fitting way is fixed, increasing the used orders of Zernike polynomials in subdomains makes more precise fit than increasing the number of overall fitted orders.

**Key words** laser optics; Zernike polynomials; wave-front fitting; spatial frequency

**OCIS codes** 140.3460; 350.5030; 230.4040

收稿日期: 2015-07-29; 收到修改稿日期: 2015-10-12

基金项目: 中国科学院自适应光学重点实验室基金(LAOF201303)、四川省教育厅创新团队计划(13TD0048)

作者简介: 陈丽霞(1991—),女,硕士研究生,主要从事变形镜热效应、光束传输与控制等方面的研究。

E-mail: 1292593102@qq.com

导师简介: 张彬(1969—),女,博士,教授,主要从事高功率激光技术、光束传输变换和控制、非线性光学等方面的研究。

E-mail: zhangbinff@sohu.com(通信联系人)

## 1 引 言

Zernike多项式因其具有在单位圆上加权正交、系数相互独立,且易与Seidel像差建立联系<sup>[1-2]</sup>等特点,常被用作基底函数系进行光束波面拟合。例如,激光束在大气中传输时,由于受到湍流和热晕等因素的影响会产生波前相位畸变,一般采用正交的Zernike多项式来表示<sup>[3-5]</sup>;另外,在高功率激光系统中,由于受腔镜失调与面形误差以及激光窗口热透镜效应等因素的影响,会导致激光器输出光束的波前发生相位畸变,也常用Zernike多项式来描述畸变波前<sup>[6-8]</sup>。通常情况下,畸变波前中既有空间低频畸变也有空间高频畸变,因此,有必要对波面拟合中Zernike多项式阶数与波前相位空间频率的对应关系进行研究,进而可为波面拟合中Zernike的使用提供有用参考。

本文运用不同阶数的Zernike多项式对随机波前进行拟合,通过比较分析原始波前及拟合波前功率谱密度(PSD)的分布特点,确定Zernike多项式拟合阶数与波前空间频率的对应关系,进而明确了常规拟合方式中,Zernike多项式对波前中高频成分拟合的不足。在此基础上,提出了基于Zernike多项式的分块拟合方式,从而有效拟合原始波前的中高频成分。

## 2 畸变波前模型

激光束的波前畸变可采用随机相位屏来描述,其表达式为<sup>[9]</sup>

$$\varphi_0(x_0, y_0) = \varphi_{0l}(x_0, y_0) + \varphi_{0h}(x_0, y_0), \quad (1)$$

式中 $\varphi_{0l}(x_0, y_0)$ 为低频相位畸变, $\varphi_{0h}(x_0, y_0)$ 为高频相位畸变,分别可表示为

$$\varphi_{0l}(x_0, y_0) = A \cdot \text{Random}(-1, 1) \otimes \exp\left\{-\left[\left(\frac{x_0}{g_x}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{g_y}\right)^2\right]\right\}, \quad (2)$$

$$\varphi_{0h}(x_0, y_0) = \sigma \cdot \text{Random}(-1, 1), \quad (3)$$

式中 $A$ 为低频相位幅度系数, $\text{Random}(-1, 1)$ 表示从 $-1$ 到 $1$ 的均匀分布的二维随机数, $\otimes$ 表示卷积, $g_x$ 和 $g_y$ 分别为 $x$ 方向和 $y$ 方向相位起伏参数, $\sigma$ 为随机相位扰动的幅度。

根据(1)~(3)式,选用不同的参数可以构建具有不同特征的波前相位畸变。图1给出了一个典型的随机波前,其中 $\lambda$ 为波长。计算所用参数:低频相位幅度系数 $A=0.3$ ,低频相位扰动参数 $g_x=g_y=20$  mm,高频相位扰动幅度 $\sigma=0.2$ 。

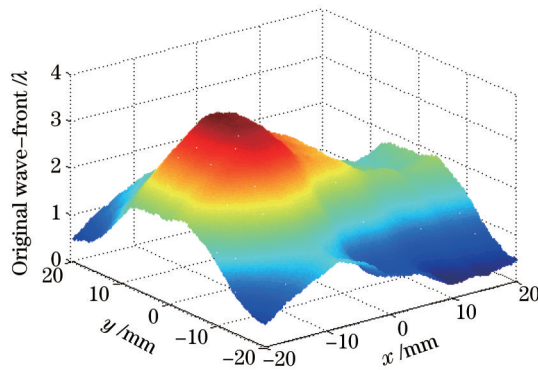


图1 原始波前分布

Fig.1 Distribution of original wave-front

## 3 拟合阶数与空间频率的关系

### 3.1 Zernike 多项式波面拟合

在直角坐标系下,相位 $\varphi(x, y)$ 可由 $k$ 项Zernike多项式表示为<sup>[10]</sup>

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k Z_k(x, y) = a_1 Z_1(x, y) + a_2 Z_2(x, y) + \cdots + a_k Z_k(x, y), \quad (4)$$

式中 $a_k$ 为第 $k$ 项Zernike多项式的系数, $Z_k$ 为第 $k$ 项Zernike多项式,其在极坐标系下的表达式为<sup>[11]</sup>

$$Z_k = \begin{cases} \sqrt{2} R_n^m(r) \cos(m\theta), & m \neq 0, \quad \text{even term} \\ \sqrt{2} R_n^m(r) \sin(m\theta), & m \neq 0, \quad \text{odd term} \\ R_n^0(r), & m = 0 \end{cases}, \quad (5)$$

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s \cdot \sqrt{n+1} \cdot (n-s)!}{s! \cdot [(n+m)/2 - s]! \cdot [(n-m)/2 - s]!} \cdot r^{(n-2s)}, \quad (6)$$

式中 $(r, \theta)$ 为圆域内的极坐标,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ ,  $n$ 为径向级次,  $m$ 为角向级次。

根据(5)~(6)式,可计算得到每一项 Zernike 多项式的具体表达形式<sup>[12-13]</sup>,各阶模式排序参见文献[14]。本文采用协方差矩阵方法<sup>[14]</sup>求解拟合系数,以图 1 所示随机波前作为原始波前,代入(5)式可得到利用不同阶数的 Zernike 多项式拟合所得波前的峰谷值(PV)、均方根(RMS)值及残差  $\Delta q$ ,如表 1 所示。

表 1 利用不同阶数的 Zernike 多项式拟合波前的 PV 值、RMS 值及残差  $\Delta q$

Table 1 Value of PV, RMS and residual error  $\Delta q$  in wave-front fitted by Zernike polynomials with different orders

	Original wave-front	Orders of Zernike polynomials				
		27	63	107	163	227
PV/ $\lambda$	3.0172	2.9262	3.0149	2.9846	2.9973	2.9714
RMS/ $\lambda$	2.7769	2.7758	2.7765	2.7767	2.7769	2.7767
RMS( $\Delta q$ )/ $\lambda$	0	0.0990	0.0733	0.0667	0.0663	0.0649

从表 1 可以看出,随着 Zernike 阶数的增加,拟合残差  $\Delta q$  越来越小,表明增加 Zernike 阶数能在一定程度上提高拟合精度。然而,进一步分析表 1 可知,拟合波前的 PV 值与 RMS 值在原始波前附近波动,表明使用该种评价方式来表征 Zernike 多项式拟合效果存在一定问题,且无法反映波前的空间频率特性。

### 3.2 拟合阶数与空间频率的关系

为了更好地表征 Zernike 多项式的拟合效果,并反映波面拟合中 Zernike 多项式与波前空间频率的对应关系,本文借助波前 PSD 来进行定量分析。离散计算时,PSD 的表达式为<sup>[15]</sup>

$$D_{ps}(m, n) = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{MN} \left| \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(m, n) \exp \left[ -i2\pi \left( \frac{mm_v}{M} + \frac{nn_v}{N} \right) \right] \right|^2, \quad (7)$$

式中  $\Delta x, \Delta y$  分别为  $x, y$  方向上两采样点之间的距离,  $M, N$  分别为  $x, y$  方向上的采样点数,  $\varphi(m, n)$  为采样点的相位分布,  $-M/2 \leq m_v \leq M/2, -N/2 \leq n_v \leq N/2$ 。

将图 1 所示畸变波前作为原始波前,图 2 给出了不同阶数的 Zernike 多项式拟合所得的波前 PSD 分布比较:(a)前 27 阶;(b)前 63 阶;(c)前 107 阶;(d)前 227 阶。

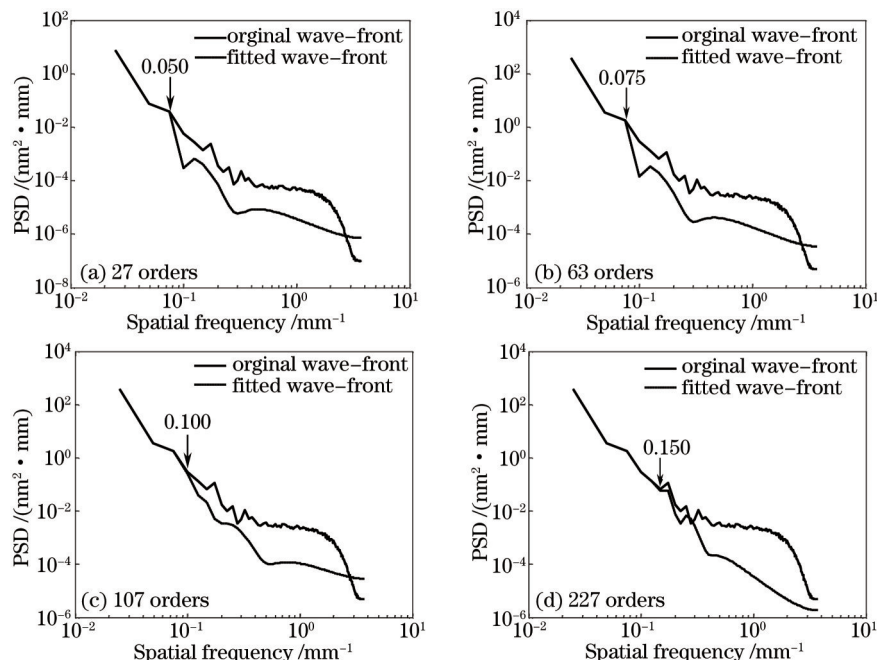


图 2 拟合波前与原始波前 PSD 分布的比较。(a) 前 27 阶;(b) 前 63 阶;(c) 前 107 阶;(d) 前 227 阶

Fig.2 Comparison between the PSD of the original wave-front and fitted wave-front. (a) 27 orders;

(b) 63 orders; (c) 107 orders; (d) 227 orders

根据国际上对于惯性约束核聚变(ICF)系统划分高中低频的标准<sup>[6]</sup>,中低频分界点为 $0.12\text{ mm}^{-1}$ 、中高频分界点为 $0.33\text{ mm}^{-1}$ 。分析图2可知,Zernike多项式能基本拟合出波前的低频成分,但对高频成分的拟合效果较差;随着拟合阶数的增加,Zernike多项式所能准确反映的波前空间频率逐渐向中高频范围扩展。然而,即使在拟合阶数明显增加的情况下,其拟合的空间频率扩展范围仍不是很大,且对波前中高频成分拟合不足的现象依然明显。例如,对于图1所示的波前分布,前27阶Zernike多项式所能准确拟合的空间频率为 $0.050\text{ mm}^{-1}$ [如图2(a)所示],当拟合阶数增加至227阶时,Zernike多项式所能准确拟合的空间频率也仅为 $0.150\text{ mm}^{-1}$ [如图2(d)所示],而原始波前中空间频率高于 $0.150\text{ mm}^{-1}$ 的部分仍不能被准确拟合。

当Zernike拟合阶数一定时,其能准确拟合的空间频率与波前的口径大小是相关的。表2给出了当Zernike拟合阶数为63阶时,不同波前尺寸下Zernike多项式所能准确拟合的空间频率。由表2可以看出,波前的口径越大,Zernike所能准确表达的空间频率越低,且二者呈近似的线性关系。本文在计算中,以波前口径为40 mm的情况为例进行分析。

表2 不同波前尺寸下Zernike多项式所能准确拟合的空间频率

Table 2 Accurate fitted spatial frequency by Zernike polynomials with different sizes of wave-front

Side length of the wave-front/mm	20	30	40	50	60
Spatial frequency/ $\text{mm}^{-1}$	0.175	0.126	0.075	0.060	0.051

## 4 分块拟合方式

为了进一步提高Zernike多项式的拟合空间频率,本文基于自适应光学中变形镜面形拟合<sup>[17]</sup>的思路,提出了采用Zernike多项式分块拟合再拼接的方法,该方法与文献<sup>[18-19]</sup>所述的自由曲面重构有相似之处。

### 4.1 拟合思路

通常情况下,使用常规的Zernike拟合方法对波前进行拟合时,拟合所得残余波前主要是高频信息,使用单一的Zernike多项式无法对其进行准确描述。为此,本文提出“1+N”的分块拟合方式来进行波前拟合,这样既能通过整体拟合原始波前使其与像差建立联系,又能通过对子区域的拟合有效表征原始波前的局部特征,如图3所示。

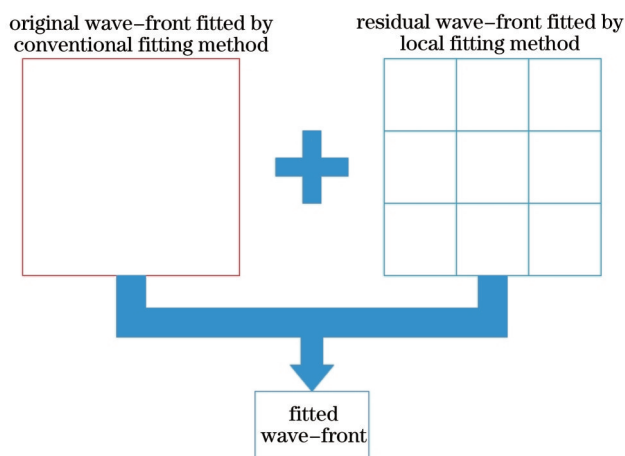


图3 分块拟合方式示意图

Fig.3 Diagram of the local fitting method

图3所示方法是先使用Zernike多项式对原始波前进行整体拟合,得到整体拟合波前;然后,将整体拟合后的残余波前分为多个子区域,使用Zernike多项式对其分别单独拟合,再整体拼接得到残余波前;进一步将整体拟合波前和子区域拟合波前组合得到最终拟合波前。

以 $\delta$ 表示对整个波前的拟合函数, $I_i$ 表示单个子区域的拟合函数,则最终拟合波前可表示为

$$\theta = \sigma + \sum_{i=1}^N A_i \cdot I_i(x, y), \quad (8)$$

式中 $A_i$ 表示各子区域拟合函数的系数。运用最小二乘法,可以计算 $A_i$ 的最优解,进而得到最佳拟合波前。

### 4.2 Zernike 阶数对拟合效果的影响

将图 1 所示畸变波前作为原始波前,并先用 Zernike 多项式进行整体拟合,再将拟合残差进行分块拟合,一维方向上的分段数为 8。图 4 给出了不同 Zernike 阶数与空间频率的对应关系。图中,“27+N”表示整体拟合所使用的 Zernike 阶数为前 27 阶,其横坐标为子区域拟合所使用的 Zernike 阶数;“N+27”表示子区域拟合所使用的 Zernike 阶数为前 27 阶,其横坐标为整体拟合所使用的 Zernike 阶数。

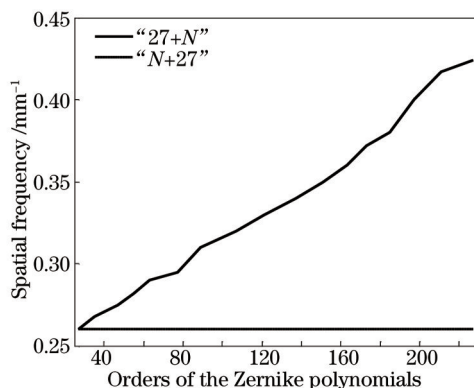


图 4 Zernike 阶数与空间频率的对应关系

Fig.4 Correspondence between the orders of the Zernike polynomials and the spatial frequency

从图 4 可以看出,采用分块拟合方式后,Zernike 多项式准确拟合的空间频率明显高于常规拟合方式。在子区域数一定时,增大整体拟合所使用的 Zernike 阶数并不能有效提高准确拟合的空间频率,而增大子区域拟合所使用的 Zernike 阶数能明显提高准确拟合的空间频率。这是因为在分块后,子区域的空间尺度小于原始波前,因而在使用相同 Zernike 阶数对其进行拟合时所能准确表达的空间频率会升高,从而各子区域拼接所得拟合波前的拟合精度也会随之提高。

### 4.3 子区域数对拟合效果的影响

为了明确分块数与拟合精度的对应关系,分别计算了分块数从 2×2 递增至 16×16 时,分块拟合方式下拟合残差的 RMS 值,计算结果如图 5 所示。为了更加直观且便于比较,对图 5 中拟合残差的 RMS 值取对数。图例为分块拟合所使用的 Zernike 多项式阶数,横坐标为一维方向上的分段数。由图 5 可知,从整体来看,随着分段数的增加,拟合残差的 RMS 值逐渐减小,表明分块拟合是提高拟合精度的有效手段。并且,分块拟合使用的 Zernike 阶数越高,拟合效果越好,这与图 4 所示结果相符。表 3 给出了使用不同阶数的 Zernike 多项式对分块数为 4×4 的子区域进行拟合时,所得拟合残差的 RMS 值及对应的运算时间,表 4 给出了使用前 27 阶 Zernike 多项式进行分块拟合时,不同分块数所对应的拟合残差的 RMS 值及相应的运算时间。为便于比较,令分块数为 4×4,使用前 27 阶 Zernike 多项式进行分块拟合时所用运算时间为  $t$ 。从表 3 可以看出,当分块数一定时,增大拟合所用的 Zernike 阶数对波前拟合效果的提升并不明显。分析表 4 可知,当拟合所用的 Zernike 阶数一定时,增大分块数能显著提高波前拟合效果。计算中,当分块数增加到 12×12 时,拟合残差的 RMS 值已经趋于稳定,且增加分块数比增加子区域 Zernike 多项式阶数,对提高波前拟合精度更为有效。

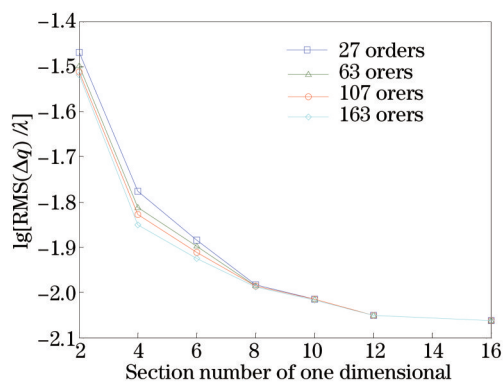


图 5 分块数与拟合残差值 RMS 值的对应关系

Fig 5 Correspondence between the number of sections and the RMS of residual error

表3 分块数为4×4时,不同拟合所用Zernike多项式阶数对应的拟合残差及运算时间

Table 3 Value of residual RMS and calculation time for wave-front fitted by different orders of Zernike polynomials when the section number is 4×4

	Original wave-front	Orders of Zernike polynomials				
		27	63	107	163	227
RMS( $\Delta q$ ) / $\lambda$	0	0.0167	0.0153	0.0149	0.0146	0.0142
Time / s		t	3.6t	10.36t	27.8t	66.4t

表4 分块数不同时,前27阶Zernike多项式对应的拟合残差及运算时间

Table 4 Value of residual RMS and calculation time for wave-front fitted by 27 orders Zernike polynomials with different section numbers

	Original wave-front	Section numbers of one dimensional				
		4	8	10	12	20
RMS( $\Delta q$ ) / $\lambda$	0	0.0167	0.0104	0.0096	0.0089	0.0086
Time / s		t	1.7t	3.2t	16.8t	42.6t

为了进一步明确分块数与准确拟合空间频率的对应关系,分别计算了分块数从2×2递增至16×16时,分块拟合方式所能准确拟合的空间频率,计算结果如图6所示。

从图6可以看出,使用分块拟合方式后,增加分块数或拟合阶数均可提高Zernike多项式对波前中高频成分的拟合能力。针对图1所示的原始波前,其空间频率高于0.4 mm<sup>-1</sup>的部分所占比例较小,表现为其波前PSD分布曲线在空间频率超过0.4 mm<sup>-1</sup>后变得平滑(如图7所示)。因此,针对该原始波前,当准确拟合的空间频率达到0.4 mm<sup>-1</sup>后,可认为该原始波前已经得到很好的拟合。通过对比分析可以发现,当分块数为10×10时,前27阶Zernike多项式所能准确拟合的空间频率与分块数为4×4时前163阶Zernike多项式所能准确拟合的空间频率基本相同。然而,进一步分析表3和表4可知,此时,后者的运算时间约为前者的8.7倍。由此可见,适当增加分块数、减少拟合所用的Zernike多项式阶数,能在保证拟合精度的情况下有效缩短计算时间。

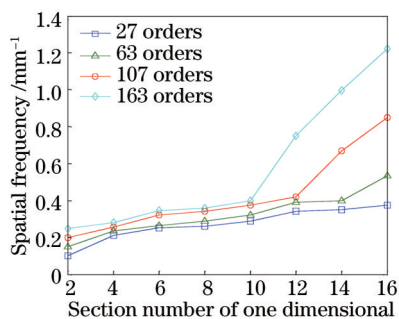


图6 分块数与空间频率的对应关系

Fig.6 Correspondence between the number of sections and the spatial frequency

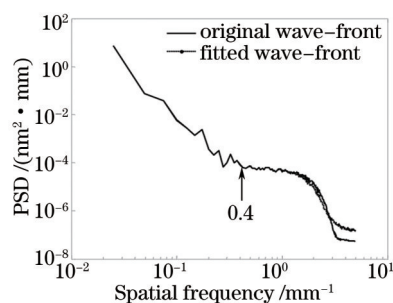


图7 分块拟合后PSD分布比较

Fig.7 Comparison of the distribution of PSD after local fitting

为了进一步说明分块拟合方式的适应性和有效性,对于任意随机产生的随机波前 $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$ ,分别比较其在常规拟合方式和分块拟合方式下的拟合残差RMS,计算结果见表5。

表5 不同PV值下两种拟合方式拟合波前的拟合残差

Table 5 Value of residual RMS in two kinds of methods fitting the different PVs of the wave-front

		Three kinds of original random wave-front		
		$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$
PV of original wave-front/ $\lambda$		2.7992	4.6846	9.8376
RMS( $\Delta q$ )/ $\lambda$	conventional fitting	0.1147	0.1217	0.1346
	local fitting	0.0091	0.0094	0.0093

从表5可以看出,对于任意初始波前,在使用分块拟合的方式下,其拟合残差的RMS值基本一致,且明显优于常规拟合方式。由此可见,本文提出的基于Zernike多项式的分块拟合方式具有良好的普适性。

## 5 结 论

运用不同阶数的 Zernike 多项式对构建的随机波前进行拟合。通过分析原始波前及拟合波前的 PSD 分布,讨论了在常规拟合方式下,Zernike 多项式的拟合阶数与其所能准确反映的波前空间频率之间的定量关系。在此基础上,使用分块拟合方式对随机波前进行拟合,重点分析了分块数及拟合阶数与所能准确反映的波前空间频率的对应关系。研究表明:在常规拟合方式下,随着拟合阶数的增加,Zernike 多项式所能准确反映的波前空间频率逐渐向高频范围扩展,但扩展幅度不大,即使对于拟合阶数较多的情况,Zernike 多项式也难以准确拟合波前空间频率中的高频成分;而采用分块拟合方式能较好地反映波前空间频率中的高频成分,此时,增加分块数以及分块拟合所使用的 Zernike 多项式阶数均能有效提高分块拟合方式所能准确反映的空间频率,但增加分块数的提高效果更加明显;且当分块数一定时,增加子区域拟合所使用的 Zernike 阶数的拟合效果明显优于增加整体拟合所使用的 Zernike 阶数;对于任意的随机波前,采用基于 Zernike 多项式的分块拟合方法都能得到最佳的拟合效果。

## 参 考 文 献

- 1 Wang J Y, Silva D E. Wave-front interpretation with Zernike polynomials[J]. Appl Opt, 1980, 19(9): 1510-1518.
- 2 Mahajan V N. Zernike polynomials and aberration balancing[C]. SPIE, 2003, 5173: 1-17.
- 3 Noll R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence[J]. J Opt Soc Am, 1976, 66(3): 207-211.
- 4 Roddier N A. Atmospheric wave-front simulation using Zernike polynomial[J]. Opt Eng, 1990, 29(10): 1174-1180.
- 5 Zhai Chao, Wu Feng, Yang Qingbo, *et al.*. Simulation research of laser beam atmospheric propagation in free-space optical communication [J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(5): 0505004.  
翟超,武凤,杨清波,等.自由空间光通信中大气光束传输数值模拟研究[J].中国激光,2013,40(5): 0505004.
- 6 Zhang Zengbao, Jin Yuqi, Sang Fengting, *et al.*. Beam quality investigation on misalignment and surface-shape error of cavity mirror[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2005, 17(4): 491-494.  
张增宝,金玉奇,桑凤亭,等.腔镜失调与面型误差对光束质量影响研究[J].强激光与粒子束,2005,17(4): 491-494.
- 7 Zhou Ciming, Cheng Zuhai. Influence of thermal deformations of high power laser mirror on beam transfer characteristic[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2003, 15(10): 969-972.  
周次明,程祖海.强激光反射镜热畸变对光束传输特性的影响[J].强激光与粒子束,2003,15(10): 969-972.
- 8 Zhang Xiang, Su Likun, Cai Qing. Analysis of thermal effect and experimental test of beam wavefront aberration in all solid-state Nd: YAG Laser[J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(3): 802-807.  
张翔,苏礼坤,蔡青.全固态 Nd: YAG 激光器热效应及输出光束波前像差分析[J].光学学报,2010,30(3): 802-807.
- 9 Fu Fuxing, Zhang Bin. Analysis on effect of wave-front phase distortion correction[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2011, 23(2): 375-380.  
付福兴,张彬.畸变波前相位校正效果分析[J].强激光与粒子束,2011,23(2): 375-380.
- 10 Qi Bo, Chen Hongbin, Liu Shunfa. Regression analysis of wave-front fitting using Zernike polynomial[J]. Optics and Precision Engineering, 2007, 15(3): 396-400.  
亓波,陈洪斌,刘顺发.Zernike 多项式波面拟合的回归分析方法[J].光学精密工程,2007,15(3): 396-400.
- 11 Dai G M, Mahajan V N. Zernike annular polynomials and atmospheric turbulence [J]. J Opt Soc Am, 2007, 24(1): 139-155.
- 12 Zhang Qiang, Jiang Wenhan, Xu Bing. Reconstruction of turbulent optical wave-front realized by Zernike polynomial[J]. Opto-Electronic Engineering, 1998, 25(6): 15-19.  
张强,姜文汉,许冰.利用 Zernike 多项式对湍流波前进行波前重构[J].光电工程,1998,25(6): 15-19.
- 13 Zhang Huimin, Li Xinyang. Numerical simulation of wavefront phase screen distorted by atmospheric turbulence[J]. Opto-Electronic Engineering, 2006, 33(1): 14-19.  
张慧敏,李新阳.大气湍流畸变相位屏的数值模拟方法研究[J].光电工程,2006,33(1): 14-19.
- 14 Liu Yueai. A simple method for Zernike polynomial fitting in fringe analysis[J]. Acta Optica Sinica, 1985, 5(4): 368-373.  
刘月爱.条纹分析中一种简单的 Zernike 多项式拟合方法[J].光学学报,1985,5(4): 368-373.
- 15 Zhang Rongzhu, Cai Bangwei, Yang Chunlin, *et al.*. Numerical method of the power spectral density[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2000, 12(6): 661-664.

- 张蓉竹, 蔡邦维, 杨春林, 等. 功率谱密度的数值计算方法[J]. 强激光与粒子束, 2000, 12(6): 661-664.
- 16 Lawson J K, Wolfe C R, Manes K R, *et al.*. Specification of optical components using the power spectral density function[C]. SPIE, 1995, 2536: 38-50.
- 17 Wu Jian, Yang Huizhen, Gong Chenglong. Research of stochastic parallel gradient descent algorithm based on segmentation random disturbance amplitude[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(7): 0712001.  
吴 健, 杨慧珍, 龚成龙. 基于分段随机扰动幅值的随机并行梯度下降算法研究[J]. 中国激光, 2014, 41(7): 0712001.
- 18 Ye Jingfei, Gao Zhishan, Liu Xiaoli, *et al.*. Freeform surfaces reconstruction based on Zernike polynomials and radial basis function[J]. Acta Optica Sinica, 2014 (8): 0822003.  
叶 井 飞, 高志山, 刘晓莉, 等. 基于 Zernike 多项式和径向基函数的自由曲面重构方法[J]. 光学学报, 2014 (8): 0822003.
- 19 Wang Qingfeng, Cheng Dewen, Wang Yongtian. Description of free-form optical curved surface using two-variable orthogonal polynomials [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(9): 0922002.  
王庆丰, 程德文, 王涌天. 双变量正交多项式描述光学自由曲面[J]. 光学学报, 2012, 32(9): 0922002.

栏目编辑: 史 敏