

双光束干涉仪中椭圆拟合估算的参数精度研究

王 丹 廖延彪 张 敏

清华大学电子工程系光纤传感实验室, 北京 100084

摘要 双光束干涉仪的相位调制解调通常会用到椭圆拟合的方法来计算相应的解调参数,提出了一种用于评价这类参数的计算精度的方法。根据自适应的蒙特卡罗法,计算不同噪声水平下椭圆拟合估算的参数的最大偏差;根据实验测得的干涉信号噪声本底的大小,判断拟合的参数的精度。以基于3×3耦合器的光纤水听器的两路输出方案为例,该方案为提高水听器的解调性能,需研究参数的数值随器件性能的变化规律,因此首先要判定实验中通过椭圆拟合所求得的参数的准确性。将该精度评定方法运用在水听器测量实验中,测量的干涉信号在20 Hz~4 kHz处的噪声本底接近-70 dB·V²/Hz,根据自适应的蒙特卡罗法,得到参数的偏差不超过0.06%和0.08°。

关键词 测量; 双光束干涉仪; 精度; 蒙特卡罗法; 椭圆拟合; 耦合器

中图分类号 TN253 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201636.0312002

Analysis of Precisions of Parameters Calculated by Ellipse Fitting in Double Beam Interferometer

Wang Dan Liao Yanbiao Zhang Min

Optical Fiber Sensor Laboratory, Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing, 100084, China

Abstract The phase modulation and demodulation of double beam interferometer often use ellipse fitting to calculate relevant parameters, and a method is developed to assess calculation precisions of these parameters. The maximum deviations of parameters calculated by ellipse fitting should be computed in different levels of noise according to adaptive Monte Carlo method; then the precisions of fitted parameters can be estimated according to the noise floor of interference signal which is measured in experiments. The algorithm of fiber-optic hydrophone based on 3×3 coupler using two interference signals is analyzed as an example, and the relationship between the parameter value and device properties needs to be studied in order to improve the demodulation effect of hydrophone. As a result, the precisions of parameters calculated by ellipse fitting in experiments should be assessed firstly. The assessment method of precisions is applied to hydrophone experiments, and the noise floor of measured interference signal is close to -70 dB·V²/Hz from 20 Hz to 4 kHz. The deviations of parameters are less than 0.06% and 0.08° according to adaptive Monte Carlo method.

Key words measurement; double beam interferometer; precision; Monte Carlo; ellipse fitting; coupler

OCIS codes 120.5050; 120.3180; 000.4430; 080.1753; 080.2720; 060.1810

1 引 言

在双光束干涉仪中,通常需要用参数估计方法来获取干涉仪的调制解调参数。针对海洋探测的某些特殊需求,研究人员开展了基于3×3耦合器的光纤水听器的调制解调方法的研究。这种基于3×3耦合器的光纤水听器具有典型的双光束干涉仪结构,在其解调算法中,需要计算与干涉信号有关的参数^[1]。椭圆拟合法可以很方便地求取与算法有关的参数,这种方法在求取参数的过程中被经常使用^[2-5]。在基于3×3耦合器

收稿日期: 2015-09-21; 收到修改稿日期: 2015-10-22

基金项目: 国家自然科学基金(61327812)、清华大学校内自主课题(2012THZ07123)

作者简介: 王 丹(1991—),女,硕士研究生,主要从事光纤传感方面的研究。E-mail: wangdan_dena1991@163.com

导师简介: 张 敏(1971—),男,博士,副教授,主要从事光纤传感等方面的研究。

E-mail: minzhang@mail.tsinghua.edu.cn (通信联系人)

的水听器系统中,这些参数的值可以反映出系统器件性能的一致性和稳定性,但是因为干涉信号噪声的存在,参数的拟合结果和实际相比会有一些偏差。因此通过椭圆拟合求得参数的准确性成为了研究器件性能和提升水听器解调性能的关键问题。

一般情况下,在评定测量结果的精度时,可采用国际化标准测量不确定度评定导则(GUM)以提供准确可靠的评估结果。首先需要确定输入量的不确定度,再根据数学模型,计算输出量的合成不标准度。如数学模型为线性,易根据输出量和输入量之间的函数关系式,求解出合成不标准度表达式中的偏导数。由于椭圆拟合的非线性,计算偏导数等系数时很复杂,采用传统的GUM法计算合成不确定度有困难,目前尚未见可靠有效的GUM方法以判断此拟合的精确度。利用蒙特卡罗法计算不确定度时,将输入量设定为数目巨大的随机数,根据数学模型直接计算出待测量,不需要计算复杂的一阶或高阶偏导系数,避免了非线性问题中计算不确定度的复杂性。实际运用过程中,巨大数量的随机实验通过Matlab等计算机工具实现,并通过判断结果是否达到统计意义上的稳定来确定实验的数据量,即采用自适应的方式^[6-7]。

Prasad等^[8-9]采用椭圆拟合的残差和线性回归系数来判断拟合精度。而在实际应用中,经常需要判断拟合得到的参数的精度,其中判断参数的最大偏差尤为重要。利用自适应的蒙特卡罗法,计算不同噪声强度下椭圆拟合求得的参数的最大偏差,并根据实验测量的干涉信号的噪声本底判断拟合精度。研究过程如下:1)以基于3×3耦合器的光纤水听器为例建立数学模型;2)根据蒙特卡罗法计算不同噪声水平下的拟合结果偏差;3)在实验中根据干涉信号的噪声水平,判断拟合结果的精度。该方法可用于双光束干涉仪的其他椭圆拟合求参数的过程,例如水听器的相位生成载波法(PGC)中求取调制参数的过程^[10]。

2 数学模型

基于3×3耦合器的光纤水听器的两路输出方案系统图如图1所示。光源发出的激光经3×3耦合器分光,进入等臂长的迈克耳孙干涉仪中。在声音信号的作用下,缠绕在弹性筒上的传感臂的长度会发生相应的变化。

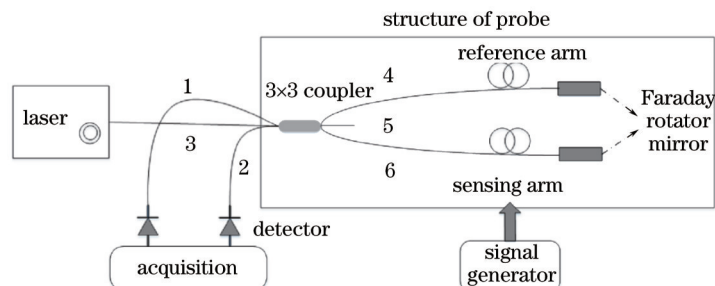


图1 基于3×3耦合器的光纤水听器系统原理图

Fig.1 Schematic drawing of fiber-optic hydrophone using 3×3 coupler

耦合器的1和2端口输出的干涉信号与相位的余弦呈线性关系,由于3×3耦合器的固有性质,两路相位有接近120°的差值,干涉仪输出的两路信号 V_1 、 V_2 可表示为^[11]

$$\begin{cases} V_1 = D_1 + A_1 \cos \varphi(t) \\ V_2 = D_2 + A_2 \cos[\varphi(t) + \Delta\varphi] \end{cases}, \quad (1)$$

式中 $\Delta\varphi$ 即3×3耦合器的输出端两路之间的附加相位差, D_1 、 D_2 和 A_1 、 A_2 分别是两路的直流和交流系数。若信号 $\varphi(t)$ 的幅度超过 π rad,则两路干涉信号构成的李萨如图形是一个椭圆,可表示为

$$aV_1^2 + bV_1V_2 + cV_2^2 + dV_1 + eV_2 + g = 0, \quad (2)$$

式中 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 g 为待定系数。(2)式要成为椭圆,需要添加约束条件 $b^2 - 4ac = -1$,求参数 $\alpha = (a, b, c, d, e, g)^T$ 的问题可以根据最小二乘法归结为^[10]

$$\begin{cases} \min \|\mathbf{V}\alpha\|_2^2, \\ \alpha^T \mathbf{H}\alpha = 1 \end{cases}, \quad (3)$$

令 $X = V_1, Y = V_2$,得到

$$V = \begin{bmatrix} X_1^2 & X_1 Y_1 & Y_1^2 & X_1 & Y_1 \\ X_2^2 & X_2 Y_2 & Y_2^2 & X_2 & Y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_N^2 & X_N Y_N & Y_N^2 & X_N & Y_N \end{bmatrix}_{N \times 6}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

上述方程组(3)式存在约束条件,为转化为无约束条件的最优化问题,可得到

$$\begin{cases} 2V^T V \alpha - 2\lambda H \alpha = 0 \\ \alpha^T H \alpha = 1 \end{cases}, \quad (4)$$

式中 λ 为拉格朗日因子。解方程 $V^T V \alpha = \lambda H \alpha$ 可通过求广义特征向量的方法,最终解出椭圆参数向量 α ,即椭圆的6个系数 a, b, c, d, e, g ,再根据一定的数学关系,表示出干涉仪的两路干涉信号 V_1, V_2 中的参数 $D_1, D_2, A_1, A_2, \Delta\varphi$ ^[11]。

因为两路信号存在噪声,通过椭圆拟合求得的参数 $D_1, D_2, A_1, A_2, \Delta\varphi$ 和真实值有偏差,确定其精度有着重要实用价值。

3 蒙特卡罗法计算精度

蒙特卡罗法的基本思想是通过实验的方法,得出某个事件发生的概率或者是某随机变量的平均值,利用 Matlab 重复大量的实验,使实验结果无限逼近理论上的真实值。为了通过蒙特卡罗法获得可靠的结果,基本的参数是实验次数 M ,也就是执行模型的计算次数。理论上 M 越大,实验结果越靠近理论值,但在实际测量中,测量过程的随机性以及数学模型都会对需要进行的测量次数 M 产生影响。因此,最终选择自适应的方法来进行实验,即选定实验次数 M ,然后不断重复 h 遍这 M 次实验,直到结果达到统计意义上的稳定^[6-7]。

因为干涉信号中存在光源强度噪声和由光电转换电路板、采集卡以及环境因素引起的噪声,则干涉信号经过光电转换后的电压信号可以表示为^[10,12]

$$V_i = D_i + A_i \cos[\varphi(t) + n_p(t) + \Delta\varphi_i] + n(t), \quad (5)$$

式中 $\Delta\varphi_i$ 表示 3×3 耦合器两路之间的附加相位差; $n(t)$ 表示各种噪声的混合结果; $n_p(t)$ 是由于环境噪声作用在干涉仪两臂上而导致在相位上引入的噪声,因为该噪声项直接作用在干涉信号的相位项上,在椭圆拟合的过程中并不会影响椭圆的形状,所以不会影响各部分参数的拟合结果,在仿真过程中可以忽略。在 Matlab 仿真中通过高斯分布的随机数来模拟噪声 $n(t)$,高斯随机数的平均值为 0,给出不同的标准差 σ ,则对应信号的噪声的功率谱密度(即噪声本底)不同,噪声本底(N_F)为

$$N_F(f) = 10 \lg |A_{\text{noise}}(f)|^2, \quad (6)$$

式中 $|A_{\text{noise}}(f)|$ 指不同频率 f 下的噪声幅度,是将噪声信号经过傅里叶变换后得到的不同频段的幅度值,在整个频段上是平坦的。将噪声 $n(t)$ 作为输入量,通过第 2 节的数学模型,最终求得输出量参数 $D_1, D_2, A_1, A_2, \Delta\varphi$ 的概率分布。

在仿真过程中,取 D_1, D_2, A_1, A_2 的真实值为固定值 1, $\Delta\varphi$ 为 120° ,给出原始信号频率为 241 Hz,幅度为 π rad,采样率为每秒 40000 个采样点,即 40 kS/s,每次椭圆拟合的点数为 40000 个。对已知的两路干涉信号加等标准差的高斯随机噪声,再将含有噪声的两路信号按照上面给出的数学模型进行椭圆拟合,求得新的参数 $D'_1, D'_2, A'_1, A'_2, \Delta\varphi'$ 。利用蒙特卡罗自适应法,每次实验次数 M 设为 10^4 次,进行 h 次实验,直到参数达到统计意义上的稳定,再用 $h \times M$ 作为实验次数,计算 $h \times M$ 次实验参数的均值和 95% 置信区间的最值,最后比较它们和真实值的差别^[6-7]。

表 1 是在不同噪声本底下,各个参数的拟合结果以及和真实值之间的偏差。给出了不同标准差的高斯随机噪声情况下的椭圆拟合结果的比较,其中最大偏差是拟合后的测量值的最值和原始设定值 1 和 120° 的最大偏差,用 Maxdev 表示。

图 2 表示拟合出的参数 D'_1, D'_2, A'_1, A'_2 的值和真实值 1 之间的偏差最大值与噪声本底的对应关系。如表 1 和图 2 所示,干涉信号的噪声本底将对拟合结果的准确性产生直接影响。若要拟合结果 D'_1, D'_2, A'_1, A'_2 和真实值之间的偏差小于 0.1%, $\Delta\varphi'$ 的偏差小于 0.2° ,那么干涉信号的噪声本底不能超过 $-65 \text{ dB} \cdot \text{V}^2/\text{Hz}$ 。图 3 是在

噪声本底为 $-55 \text{ dB} \cdot \text{V}^2/\text{Hz}$ 时参数 D_1' 的测量值的概率密度分布图,测量值 D_1' 、 D_2' 、 A_1' 、 A_2' 、 $\Delta\varphi'$ 服从正态分布。

表 1 不同噪声本底 N_F 对应的椭圆拟合参数偏差

Table 1 Deviations of fitted parameters with different N_F

Gaussian noise with zero mean value		Fitted Value	Parameter				
σ / V	$N_F/(\text{dB} \cdot \text{V}^2/\text{Hz})$		D_1'	D_2'	A_1'	A_2'	$\Delta\varphi' / (^\circ)$
10^{-4}	-115	Mean	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	120.0000
		Maximum	1.000002	1.000002	1.000002	1.000002	120.0002
		Minimum	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	119.9998
		Maxdev	2×10^{-6}	2×10^{-6}	2×10^{-6}	2×10^{-6}	2×10^{-4}
		Mean	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	120.0000
10^{-3}	-95	Maximum	1.000001	1.000002	1.000002	1.000002	120.0001
		Minimum	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	119.9998
		Maxdev	2×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-3}
		Mean	0.99999	1.00000	1.00001	0.99999	119.997
		Maximum	1.00001	1.00002	1.00003	1.00001	119.999
10^{-2}	-75	Minimum	0.99998	0.99999	0.99999	0.99997	119.996
		Maxdev	2×10^{-4}	2×10^{-4}	3×10^{-4}	3×10^{-4}	0.04
		Mean	0.99996	1.00002	1.00005	0.99994	119.984
		Maximum	0.99999	1.00006	1.00009	0.99999	119.989
		Minimum	0.99992	0.99998	1.00001	0.99990	119.980
2.5×10^{-2}	-65	Maxdev	8×10^{-4}	6×10^{-4}	9×10^{-4}	1×10^{-3}	0.2
		Mean	0.9993	1.0003	1.0009	0.9995	117.9
		Maximum	0.9995	1.0005	1.0011	0.9997	118.0
		Minimum	0.9992	1.0001	1.0007	0.9993	117.7
		Maxdev	8×10^{-3}	5×10^{-3}	1×10^{-2}	7×10^{-3}	2.3

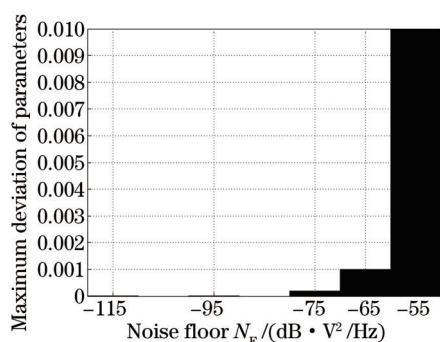


图 2 不同噪声本底 N_F 下对应的参数最大偏差图
Fig.2 Maximum deviation in different N_F

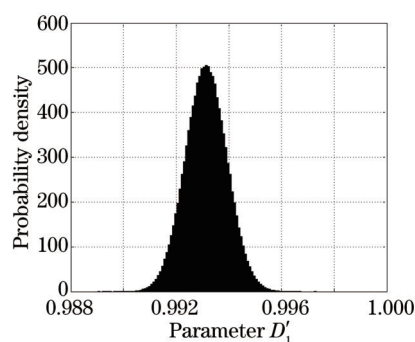


图 3 噪声本底 N_F 为 $-55 \text{ dB} \cdot \text{V}^2/\text{Hz}$ 时参数 D_1' 的分布
Fig.3 Probability of D_1' when noise floor N_F is $-55 \text{ dB} \cdot \text{V}^2/\text{Hz}$

4 实 验

实验用基于 3×3 耦合器的光纤水听器对单频的正弦声音信号进行了测量,整个系统主要由三部分构成: 10 mW 的连续光源、由 3×3 耦合器和迈克耳孙干涉仪组成的探头(具体结构如图 1)以及光电转换板和采集卡(型号 NI4462)构成的采集部分。实验过程中,将制作好的光纤水听器探头放入振动台(型号 Labworks ET-139)中的水桶中,测量水声信号。实验系统如图 4 所示。

实验中采样率设置为 40 kS/s , 单次采集点数为 40000, 图 5 是实际探测到的干涉信号的其中一路的功率谱密度图,其中干涉信号的功率谱密度 $P_{\text{sd}}(f)$ 可以表示为

$$P_{\text{sd}}(f) = 10 \lg |A_{\text{signal}}(f)|^2, \quad (7)$$

式中 $|A_{\text{signal}}(f)|$ 是干涉信号经过傅里叶变换后不同频率处的幅度,通过图 5 可观察到系统的噪声本底。

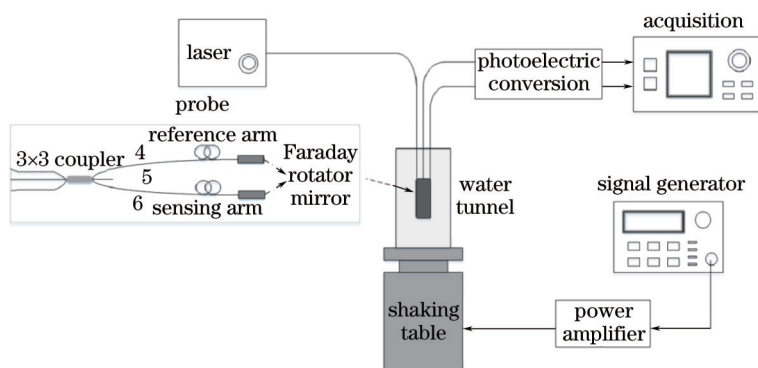


图 4 实验装置图

Fig.4 Schematic drawing of experiment

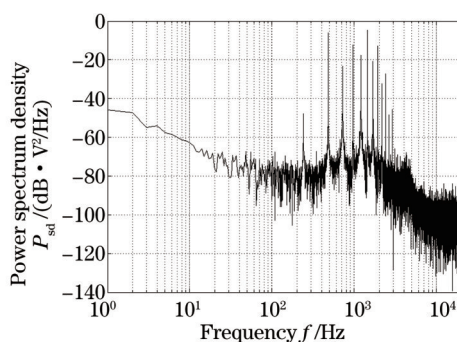


图 5 实验中测得的干涉信号功率谱密度图

Fig.5 Power spectrum density of interference signal measured by experiment

如图 5 所示,低频处噪声大,高频处噪声小,图中的峰值为信号及其谐波的功率谱密度。在 1 Hz~4 kHz 的频率段,噪声本底从 $-45 \text{ dB} \cdot \text{V}^2/\text{Hz}$ 降至约 $-70 \text{ dB} \cdot \text{V}^2/\text{Hz}$ 。当频率高于 4 kHz 后,噪声本底进一步降低至 $-90 \text{ dB} \cdot \text{V}^2/\text{Hz}$ 。其中,频率小于 20 Hz 的噪声主要源于环境噪声,这部分噪声主要作用在水听器干涉信号的相位项上,并不影响椭圆拟合参数的准确性。影响椭圆拟合的准确性的噪声主要源于幅度较大的、频率在 20 Hz~4 kHz 处的噪声本底,此部分噪声本底接近 $-70 \text{ dB} \cdot \text{V}^2/\text{Hz}$ 。同时,经椭圆拟合后,实验系统中的参数 D_1' 和 A_1' 约等于 0.87, D_2' 和 A_2' 约等于 0.98, $\Delta\varphi'$ 接近 119.5° 。按上述蒙特卡罗算法,当噪声本底接近 $-70 \text{ dB} \cdot \text{V}^2/\text{Hz}$ 时,高斯随机噪声的标准差接近 0.013,采用椭圆拟合法求得的参数 D_1' 、 D_2' 、 A_1' 、 A_2' 拟合结果的偏差不超过 0.06%,参数 $\Delta\varphi'$ 的拟合结果偏差不超过 0.08° ,所以椭圆拟合的结果在一定精度范围内是可靠的。

5 结 论

以对基于 3x3 耦合器的光纤水听器利用椭圆拟合求取参数的过程为例,说明了利用蒙特卡罗法评定双光束干涉仪中椭圆拟合的参数精度的方法,研究了噪声本底对于双光束干涉仪参数估算精度的影响,并得到在参数 D_1 、 D_2 、 A_1 、 A_2 和 $\Delta\varphi$ 的真实值分别为 1 和 120° 时,若要参数估算的偏差不超过 0.1% 和 0.2° ,干涉信号的噪声本底需低于 $-65 \text{ dB} \cdot \text{V}^2/\text{Hz}$ 的结论。在水听器探头测量声音信号的实验中,干涉信号在 20 Hz~4 kHz 频段的噪声本底接近 $-70 \text{ dB} \cdot \text{V}^2/\text{Hz}$,椭圆参数拟合结果的偏差不超过 0.06% 和 0.08° 。在水听器系统中,参数由系统器件决定,因此参数的变化规律反映了器件的性质。提升水听器的性能首先需要提升系统器件的性能,因此准确求取参数对研究系统器件的性质具有重要意义。研究结果为评定双光束干涉仪中椭圆拟合的参数精度提供了一种有效的判断方法,该方法可应用在其他利用椭圆拟合法的物理过程中。

参 考 文 献

1 Koo K P, Tveten A B, Dandridge A. Passive stabilization scheme for fiber interferometers using (3x3) fiber directional couplers[J]. Appl

- Phys Lett, 1982, 41(7): 616-618.
- 2 Zhang Huayong, Wang Dongning, Shi Qingping, et al.. Optical intensity compensating method for time division multiplexing of fiber-optic hydrophone using a 3×3 coupler[J]. Chinese J Lasers, 2011, 38(11): 1105006.
张华勇, 王东宁, 施清平, 等. 基于3×3耦合器的光纤水听器时分复用系统的光强补偿方法[J]. 中国激光, 2011, 38(11): 1105006.
- 3 Wang Ziqian, Fan Zhiguo, Jin Haihong, et al.. Neutral points recognition based on the atmospheric polarization pattern's global characteristics[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(7): 0701001.
王子谦, 范之国, 金海红, 等. 基于大气偏振模式全局特征的中性点识别方法[J]. 光学学报, 2014, 34(7): 0701001.
- 4 Song Guozhi, Liu Tao, Chen Yaqin, et al.. Calibration of spectroscopic ellipsometer using multiple standard samples[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(3): 0312003.
宋国志, 刘涛, 谌雅琴, 等. 利用多个标准样品校准光谱椭圆偏振仪[J]. 光学学报, 2014, 34(3): 0312003.
- 5 Xie Zexiao, Gao Xiang, Cui Jian. Extraction algorithm of circular targets used for mobile three-dimensional measurement[J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(12): 1208002.
解则晓, 高翔, 崔健. 移动式三维测量用圆形标记点提取算法[J]. 中国激光, 2013, 40(12): 1208002.
- 6 Zhou Taogeng. Monte Carlo Method for Evaluation of Measurement Uncertainty[M]. Beijing: China Quality Press, 2013: 1-27.
周桃庚. 用蒙特卡洛法评定测量不确定度[M]. 北京: 中国质检出版社, 2013: 1-27.
- 7 Liu Cuncheng, Hu Chang. Monte Carlo Method for Evaluation of Measurement Uncertainty Based on Matlab[M]. Beijing: China Quality Press, China Standards Press, 2014: 1-197.
刘存成, 胡畅. 基于Matlab用蒙特卡洛法评定测量不确定度[M]. 北京: 中国质检出版社, 中国标准出版社, 2014: 1-197.
- 8 Prasad D K. Fabrication imperfection analysis and statistics generation using precision and reliability optimization method[J]. Opt Express, 2013, 21(15): 17602-17614.
- 9 Riu J, Rius F X. Assessing the accuracy of analytical methods using linear regression with errors in both axes[J]. Anal Chem, 1996, 68(11): 1851-1857.
- 10 Wang Kai. Research on the Key Technologies of Fiber Hydrophone Demodulation System Based Towered Streamer for Oceanic Oil Gas Seismic Exploration[D]. Tianjin: Tianjin University, 2013: 93-102.
王凯. 海上油气地震勘探光纤检波器拖缆解调系统关键技术研究[D]. 天津: 天津大学, 2013: 93-102.
- 11 Zhang Huayong. Time Division Multiplexing of Fiber-Optic Hydrophone Base on Path-Matched Differential Interferometer[D]. Beijing: Tsinghua University, 2011: 65-86.
张华勇. 基于匹配干涉仪结构的光纤水听器时分复用技术[D]. 北京: 清华大学, 2011: 65-86.
- 12 Todd M D. Output-noise statistical characterization for digital-phase-demodulation systems with intensity-based input noise[J]. J Lightwave Technol, 2007, 25(3): 747-756.

栏目编辑: 王晓琰