

# 波前曲率传感自适应光学两种闭环控制方法的对比

陈 波<sup>1</sup> 杨 靖<sup>2</sup> 李新阳<sup>3</sup> 李小阳<sup>1</sup> 杨 旭<sup>1</sup>

<sup>1</sup>华北理工大学电气工程学院, 河北 唐山 063009

<sup>2</sup>华北理工大学图书馆, 河北 唐山 063009

<sup>3</sup>中国科学院光电技术研究所自适应光学实验室, 四川 成都 610209

**摘要** 针对波前曲率传感自适应光学,对比分析了直接拟合法和拉普拉斯算子本征模式法两种闭环控制方法。简要分析了两种方法的基本原理,并建立了36单元曲率型自适应光学仿真模型,进行了大气湍流波前畸变闭环校正数值仿真。结果表明,与直接拟合法相比,存在最佳模式数量使得拉普拉斯算子本征模式法具有更高的稳定性和精度;尤其是当波前畸变较大时,直接拟合法的稳定性和校正精度明显变差。

**关键词** 自适应光学;曲率传感;波前控制;拉普拉斯算子本征模式

中图分类号 TP273.2

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201636.0301003

## Comparison of Two Close-Loop Control Methods in Adaptive Optics with Wavefront Curvature Sensing

Chen Bo<sup>1</sup> Yang Jing<sup>2</sup> Li Xinyang<sup>3</sup> Li Xiaoyang<sup>1</sup> Yang Xu<sup>1</sup>

<sup>1</sup>College of Electrical Engineering, North China University of Science and Technology, Tangshan, Hebei 063009, China

<sup>2</sup>Library, North China University of Science and Technology, Tangshan, Hebei 063009, China

<sup>3</sup>Laboratory on Adaptive Optics, Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China

**Abstract** For adaptive optics with curvature sensor, two close-loop wavefront control techniques those based on direct fitting method and Laplacian eigenfunctions method are comparative analyzed. The basic principles of two methods are analyzed, and then a numerical simulation model of 36-element curvature adaptive optics is setup and simulations of atmospheric turbulence wavefront aberration correction are carried out. The results show that, comparing with the direct fitting method, the stability and correction accuracy of Laplacian eigenfunctions method are obvious better when the proper modes are chosen, and the stability and accuracy of the direct fitting method are significantly worse when the phase distortion is larger.

**Key words** adaptive optics; curvature sensing; wavefront control; Laplacian eigenfunctions

**OCIS codes** 010.1080; 010.1285; 010.7350

## 1 引 言

波前曲率传感自适应光学系统能够有效校正波前畸变,在天文成像中得到成功应用和持续关注<sup>[1-4]</sup>。这类自适应光学系统通常采用双压电片式等曲率型变形镜作为波前校正器。闭环校正时,曲率传感器利用微透镜阵列对光强信号进行分区探测,并计算出对应区域上的波前平均曲率,接着采用类似于直接斜率法的控制方式去驱动相应的电极<sup>[5]</sup>。这种控制方法成功实现了多通道的解耦控制,但是要求曲率传感器中的微透镜分布与校正器电极空间分布一致并对准,增加了系统成本和校准难度。

针对这一问题,2011年国内研究人员提出一种无需分区探测的整体式实时波前控制技术<sup>[5]</sup>,即利用曲率

收稿日期: 2015-09-05; 收到修改稿日期: 2015-09-28

基金项目: 河北省自然科学基金(F2013209149)、河北省高等学校科学技术研究基金(QN2014042)

作者简介: 陈 波(1984—),男,博士,讲师,主要从事自适应光学控制技术、光学主动成像方面的研究。

E-mail: chenbo182001@163.com

型变形镜影响函数的曲率信号去拟合畸变波前的整体曲率信号(下文简称直接拟合法),并进行了数值仿真,取得了与传统分区波前控制基本相当的校正效果。

本文结合近年来提出的基于拉普拉斯算子本征模式的波前复原方法<sup>[6]</sup>,提出另一种无需分区探测的波前控制技术(下文简称拉普拉斯算子本征模式法)。由于拉普拉斯算子本征模式的正交特性,因此这种方法有望取得更高的校正精度。为此,本文重点对比了直接拟合法和本征模式法的稳定性和校正精度。

## 2 两种闭环控制方法

根据波前曲率传感器的基本原理,前后离焦面上归一化的光强差和波前曲率以及波前沿光瞳边界法向微分之间的关系是 Neumann 边界条件下的泊松方程:<sup>[7]</sup>

$$\frac{I_2(-\mathbf{r}) - I_1(\mathbf{r})}{I_2(-\mathbf{r}) + I_1(\mathbf{r})} = S(\mathbf{r}) = C \left[ \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) - \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_c \right], \quad (1)$$

式中  $I_1(\mathbf{r})$  和  $I_2(\mathbf{r})$  为离焦面上的光强信号,  $S(\mathbf{r})$  为光强之差的归一化信号,  $\mathbf{r}$  表示入射光瞳区域上的矢变量,  $C$  为与传感器参数有关的常数,  $\nabla^2$  为拉普拉斯算子,  $\varphi(\mathbf{r})$  表示光瞳面上的入射光相位,  $\mathbf{n}$  为光瞳边缘处的法向斜率单位矢量,  $\boldsymbol{\sigma}_c$  为光瞳区域的边界。

### 2.1 直接拟合法

文献[5]中提出的直接拟合法可看作是直接曲率法,只是没有利用子孔径分割探测。假设  $N$  单元波前校正器的第  $i$  个电极的影响函数为  $F_i(\mathbf{r})$ , 令  $\varphi(\mathbf{r}) = F_i(\mathbf{r})$  代入(1)式即可得到对应的曲率信号  $S_i(\mathbf{r})$ 。当待校畸变波前的曲率信号为  $S(\mathbf{r})$  时,利用  $S_i(\mathbf{r})$  去拟合  $S(\mathbf{r})$  使得  $\int \left[ S(\mathbf{r}) - \sum_{i=1}^N \delta v_i S_i(\mathbf{r}) \right]^2 d\mathbf{r}$  达到最小,即可求得对应的残余控制信号  $\delta v_i$ 。这一过程可用矩阵形式表示为

$$\delta \mathbf{v} = (\mathbf{S}'_N \mathbf{S}_N)^{-1} \mathbf{S}'_N \mathbf{S}, \quad (2)$$

式中  $\mathbf{S}$  为代表  $S(\mathbf{r})$  的列向量,  $\mathbf{S}_N$  为代表由  $S_i(\mathbf{r})$  构成的矩阵,可采用文献[8]中的测量方法得到,  $\mathbf{S}'_N$  为  $\mathbf{S}_N$  的转置矩阵,  $\delta \mathbf{v}$  为拟合得到的最小二乘解。

### 2.2 拉普拉斯算子本征模式法

$$\begin{cases} \nabla^2 W(\mathbf{r}) = -\gamma^2 W(\mathbf{r}) \\ \partial W(\mathbf{r}) / \partial \mathbf{n} = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

Neumann 边界条件下,满足(3)式<sup>[9]</sup>的函数  $W(\mathbf{r})$  记作拉普拉斯算子本征函数,对应的本征值为  $-\gamma^2$ 。由本征函数构成的函数组  $W_1(\mathbf{r}), W_2(\mathbf{r}), \dots, W_k(\mathbf{r}), \dots$  是一组正交完备基,因此任意波前残差  $\varphi(\mathbf{r})$  可以描述为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k W_k(\mathbf{r}), \quad (4)$$

式中  $\alpha_k$  表示  $\varphi(\mathbf{r})$  中模式  $W_k(\mathbf{r})$  的大小。

将(4)式和(3)式代入(1)式,忽略其中的常数  $C$ ,可得

$$S(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} [-\alpha_k \gamma_k^2 W_k(\mathbf{r})], \quad (5)$$

式中  $-\gamma_k^2$  为本征函数  $W_k(\mathbf{r})$  对应的本征值。

在实际中,考虑到传感器的空间分辨率和变形镜的校正能力,假设选择前  $M$  个本征模式进行波前复原,那么(5)式可表示为

$$\mathbf{S} = \mathbf{W}_M \mathbf{a}, \quad (6)$$

式中矩阵  $\mathbf{W}_M$  由  $-\gamma_k^2 W_k(\mathbf{r})$  构成,列向量  $\mathbf{a}$  为波前畸变对应的本征模式系数。求解(6)式得到  $\mathbf{a}$  的最小二乘解为

$$\mathbf{a} = (\mathbf{W}'_M \mathbf{W}_M)^{-1} \mathbf{W}'_M \mathbf{S}, \quad (7)$$

式中  $(\cdot)'$  表示矩阵转置运算,  $(\cdot)^{-1}$  表示矩阵求逆运算。将  $\mathbf{a}$  代入(4)式即可复原出波前畸变  $\varphi(\mathbf{r})$ , 即

$$\varphi = \bar{\mathbf{W}}_M \mathbf{a}, \quad (8)$$

式中  $\varphi$  为  $\varphi(\mathbf{r})$  的矩阵形式,矩阵  $\bar{\mathbf{W}}_M$  由  $M$  个  $W_k(\mathbf{r})$  构成。

复原出波前畸变  $\varphi$  后,利用波前校正器的影响函数对其拟合就能够得到相应的控制信号  $\delta \mathbf{v}$ , 即

$$\varphi = \bar{W}_M a = F \delta v, \quad (9)$$

式中  $F$  为校正器影响函数的矩阵形式。

由与(4)式类似,波前校正器的影响函数  $F$  可以用拉普拉斯算子本征模式  $\bar{W}_M$  表示为

$$F = \bar{W}_M c, \quad (10)$$

式中  $c$  为系数矩阵。将(10)式代入(1)式可得

$$S_N = W_M c, \quad (11)$$

式中  $S_N$  的列向量是由校正器各个影响函数引起的波前曲率。求解(11)式可得最小二乘解:

$$c = (W_M' W_M)^{-1} W_M' S_N, \quad (12)$$

将(12)式代入(10)式即可得到波前校正器的影响函数  $F$  :

$$F = \bar{W}_M [(W_M' W_M)^{-1} W_M' S_N]. \quad (13)$$

将(13)式代入(9)式可得

$$a = [(W_M' W_M)^{-1} W_M' S_N] \delta v, \quad (14)$$

因此,求解(14)式可得  $\delta v$  的最小二乘解:

$$\delta v = (A'A)^{-1} A'a \quad \text{or} \quad \delta v = A'(AA')^{-1} a, \quad A = [(W_M' W_M)^{-1} W_M' S_N]. \quad (15)$$

综合以上分析,波前校正时首先利用(7)式计算出  $a$ , 然后利用(15)式即可计算出  $\delta v$ 。

### 3 数值仿真

论文采用了仿真的研究手段对上述两种方法的闭环结果进行了对比。在建立仿真模型过程中充分考虑到了实际器件参数,如曲率传感器模型中的离轴波带片的像素数、通光孔径、空间分辨率参数采用美国BNS公司的液晶空间光调制器的参数,透镜焦距采用常用的0.1 m,光电探测器的像素大小为6.35  $\mu\text{m}$  等,从而保证了仿真模型与实际系统的一致性。

#### 3.1 自适应光学仿真模型

仿真模型如图1所示,主要由波前校正器、波前曲率传感器、波前控制器组成。波前传感器测量光强,波前控制器计算控制信号,并输出给波前校正器,完成闭环校正。

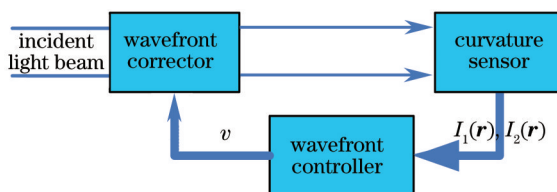


图1 波前曲率传感自适应光学示意图

Fig.1 Diagram of adaptive optics based on wavefront curvature sensor

##### 1) 波前校正器

采用文献[10]中建立的36单元Bimorph变形镜作为曲率型波前校正器,包括1个独立的离焦电极和35个分立电极,仿真中采用镜面中心直径为24 mm的圆域,如图2(a)虚线所示。图2(b)和(c)分别为第2和20个电极的影响函数。

##### 2) 波前曲率传感器

光栅型波前曲率传感技术是近年来提出的一种新型测量方法<sup>[11]</sup>,能够用一个面阵型探测器同步测得焦前后光强,其中的光栅是一个离轴菲涅耳波带片,在实际中可专门加工或用液晶空间光调制器实现<sup>[12-13]</sup>。为了提高光能利用率,根据二元光学的衍射效率计算方法,本文采用了相位型波带片。当光波长为635 nm、通光直径为0.01 m、一级焦距为3 m、主光轴距离光瞳中心为0.008 m时,利用文献[13]中的设计公式得到的相位型波带片如图3(a)所示。在波带片后0.1 m处放置一个焦距为0.1 m的会聚透镜,当入射光束为振幅均匀为1的理想平

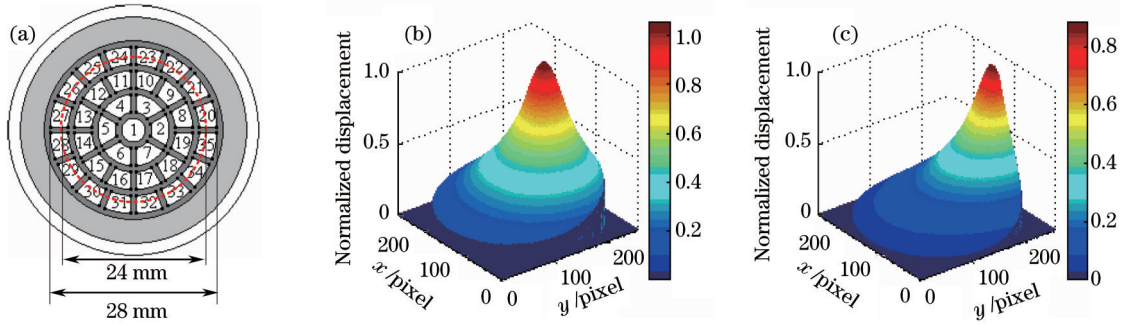


图2 (a) 36单元Bimorph变形镜的35个分立电极的排布; (b) 2号电极的影响函数; (c) 20号电极的影响函数

Fig.2 (a) 35 electrodes distribution of 36-element Bimorph deformable mirror; (b) response function of electrode NO.2; (c) response function of electrode NO.20

面波时,利用菲涅耳衍射模拟得到透镜后焦面上的光强分布(256 pixel×256 pixel)如图3(b)所示,其中  $I_1$ 、 $I_2$  约为 63 pixel×63 pixel。仿真过程中,为了减少运算量,通过合并相邻9个像素将  $I_1$ 、 $I_2$  合并为 21×21的矩阵。

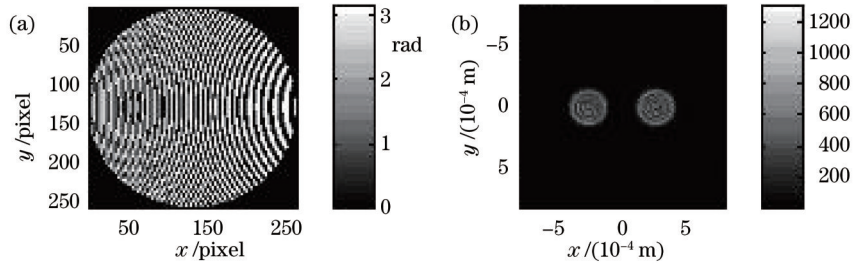


图3 (a) 相位型离轴菲涅耳波带片; (b) 光电探测器上的信号

Fig.3 (a) Off-axis Fresnel zone plate; (b) light intensity on photo detector

需要说明的是,这种光栅型传感器避免了采用微透镜阵列进行分区探测,但是需要图像像素的对准。与哈特曼波前传感器需要标定质心位置类似,波前曲率传感器在测量前也可通过标定找出图像的位置。在实际应用中,波前整体倾斜会导致图像的整体移动,但是自适应光学系统通常有专门的倾斜校正回路,因此在标定好的区域内,图像的变化主要是由其他高阶像差引起,而这正是曲率传感器需要探测的信号。

### 3) 波前控制器

如图1所示,波前控制器按照闭环方式驱动波前校正器,即

$$v(n+1) = v(n) - \delta v, \tag{16}$$

式中  $v(n)$  和  $v(n+1)$  表示第  $n$  次和第  $n+1$  次的闭环驱动信号。针对每帧相位畸变,在每次闭环迭代时,传感器探测光强信号,计算出残余信号  $\delta v$ ,接着计算出校正器驱动信号  $v(n)$ ,最后利用校正器的影响函数(256×256 采样点数)转化为补偿相位,整个过程直至归一化相对误差收敛为止。

文献[6,13-14]的拉普拉斯本征函数:

$$W_n^m(r, \theta) = \begin{cases} \sqrt{2} J_u(\gamma_{um} r) \cos(u\theta), & m > 0 \\ J_0(\gamma_{0m} r), & m = 0, \\ \sqrt{2} J_u(\gamma_{um} r) \sin(u\theta), & m < 0 \end{cases} \tag{17}$$

在波前控制器中,采用(17)式构建本征模式矩阵  $\bar{W}_M$  和  $W_M$ ,其中  $|r| \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, n = 1, 2, 3, \dots, m$  为整数,  $u = |m|$ ,  $J_u(\gamma_{um} r)$  为第1类  $u$  阶贝塞尔函数,  $\gamma_{um}$  为  $dJ_u(r)/dr = 0$  的第  $n$  个正根。考虑到变形镜的校正能力,仿真中采用了26阶本征模式,模式阶数  $k$  和(17)式中  $m, n$  的对应关系如表1所示。

表1 前26阶本征模式的阶数  $k$  与  $m, n$  的对应关系

Table 1 Relationship between the order number  $k$  and  $m, n$  of the first 26 order eigenfunctions

$k$	1	2~15	16	17~26
$n$	1	1	2	2
$m$	0	$\pm(1\sim7)$	0	$\pm(1\sim5)$

### 3.2 仿真结果与讨论

利用Harding等<sup>[15]</sup>的方法产生大气湍流波前畸变  $\varphi(r)$ , 采样点数为  $256 \times 256$ , 湍流外尺度为  $100\text{ m}$ , 内尺度为  $0.01\text{ m}$ 。当  $D/r_0$  分别等于  $8, 12, 16, 20$  时, 各随机生成  $50$  帧相位屏, 去除其中的波前整体倾斜, 然后进行闭环校正。利用归一化相对误差

$$E = \text{rms}[e(r)] / \text{rms}[\varphi(r)], \quad (18)$$

评价闭环校正效果, 式中  $\text{rms}[e(r)]$  和  $\text{rms}[\varphi(r)]$  分别表示校正后残余波前和入射光波前畸变的均方根值。当  $E < 1$  时, 说明闭环校正是有意义的, 且  $E$  越小表示校正精度越高。

分别利用直接拟合法(记作 method1)和拉普拉斯算子本征模式法(记作 method2)对  $D/r_0 = 8, 12, 16, 20$  时生成的大气湍流相位屏进行闭环校正, 相对误差均值  $\langle E \rangle$  的迭代过程如图 4 所示。

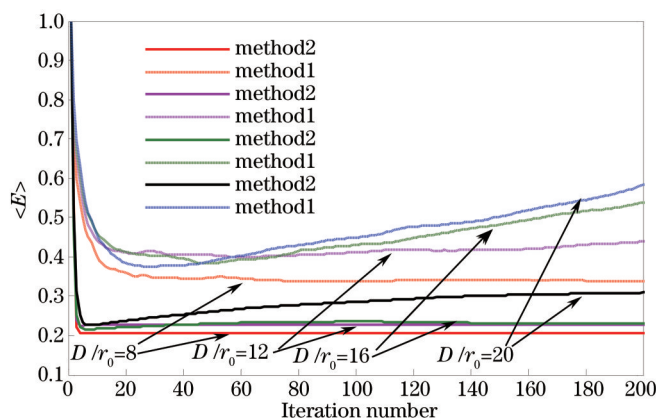


图 4  $\langle E \rangle$  的迭代过程

Fig.4 Evaluation process of  $\langle E \rangle$

从图 4 可以看出: 1) 不论入射波前畸变的大小, 拉普拉斯算子本征模式法的校正速度和精度均明显优于直接拟合法; 2) 对于直接拟合法, 随着  $D/r_0$  的增大, 即入射波前畸变的增大, 在迭代后期相对误差均值  $\langle E \rangle$  有明显的增大和发散趋势; 3) 对于拉普拉斯算子本征模式法, 当  $D/r_0 = 20$  时, 在迭代后期相对误差均值  $\langle E \rangle$  有一定的增大, 但是能够稳定收敛。仿真结果说明, 拉普拉斯算子本征模式法在闭环稳定性和精度方面明显优于直接拟合法。

从空间域的角度而言, 自适应光学波前校正的误差  $e(r)$  主要包括两部分: 波前复原误差(传感器输出信号到波前相位)  $e_1(r)$  和波前校正器拟合误差  $e_2(r)$ 。

采用拉普拉斯算子本征模式进行波前复原时, 其误差来源与文献[16]中哈特曼波前传感器的误差相似。不考虑探测噪声, 波前复原误差  $e_1(r)$  包括模式截断误差  $e_c(r)$  和模式混淆误差  $e_s(r)$ 。从理论上来看, 模式数量越多波前复原精度也就越高。但在实际中, 由于波前传感器的空间分辨率有限, 当选取的模式过多时, 就会产生模式混淆。因此, 本征模式法复原存在一个最优的模式数量。对于波前校正器拟合误差  $e_2(r)$ , 由于变形镜的拟合能力一定, 当复原出的相位中包含的模式数越多时, 拟合误差  $e_2(r)$  越大。综合以上分析, 存在一个最优模式数量可使  $e(r)$  最小。

对于拉普拉斯算子本征模式波前校正方法, 根据其原理, 当选择全部模式时, 就退化为本文中提及的直接拟合法。因此, 根据上述本征模式波前校正误差分析, 当系统的参数固定后, 并不是用全部模式进行波前校正时误差最小。换言之, 采用合理的模式进行校正可以获得比直接拟合法更好的校正效果, 这与图 4 的结果一致。

从运算量上来看, 两种方法其实质均为建立  $S$  与  $\delta v$  之间的矩阵运算, 由于复原矩阵可以事先计算出, 因此闭环时的运算量是相同的。

## 4 结 论

分析了基于拉普拉斯算子本征模式的闭环控制方法, 数值仿真结果初步表明, 与直接拟合法相比, 该方

法具有更高的精度和稳定性。值得注意的是,在基于拉普拉斯算子本征模式的闭环控制中,需要选择模式数量  $M$ ,而且可以确定模式选择对算法有较大的影响。因此接下来将通过建立本征模式表征大气湍流的理论模型、本征法的波前校正误差模型,定量分析模式数量对波前校正的影响,并进行相应的实验验证。

## 参 考 文 献

- 1 Roddier F, Northcott M, Graves J E. A simple low-order adaptive optics system for near-infrared applications[J]. *Pub Astr Soc Pac*, 1991, 103(659): 131-149.
- 2 Graves J E, Roddier F J, Northcott M J, *et al.*. Adaptive optics at the university of Hawaii IV: A photon-counting curvature wavefront sensor[C]. *SPIE*, 1994, 2201: 502-507.
- 3 S Obereti, H Bonnet, E Fedrigo, *et al.*. Calibration of a curvature sensor / bimorph mirror AO system: Interaction matrix measurement on MACAO systems[C]. *SPIE*, 2004, 5490: 139-150.
- 4 Qiang Yang, Christ Ftacclas, Mark Chun. Wavefront correction with high-order curvature adaptive optics systems[J]. *J Opt Soc Am A*, 2006, 23(6): 1375-1381.
- 5 Huang Shengyang, Xi Fengjie, Ning Yu, *et al.*. Reconstruction algorithm for wavefront curvature sensor with phase grating[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2011, 23(10): 2573-2577.  
黄盛扬, 习锋杰, 宁 禹, 等. 相位光栅型曲率传感器的波前校正算法[J]. *强激光与粒子束*, 2011, 23(10): 2573-2577.
- 6 Huang Shengyang, Xi Fengjie, Liu Changhai, *et al.*. Phase retrieval using eigenfunctions to solve transport-of-intensity equation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, 31(10): 1001002.  
黄盛扬, 习锋杰, 刘长海, 等. 本征函数法求解光强传输方程的相位反演方法[J]. *光学学报*, 2011, 31(10): 1001002.
- 7 Roddier F. Wavefront sensing and the irradiance transport equation[J]. *Appl Opt*, 1990, 29(10): 1402-1403.
- 8 Chen Bo, Li Min, Li Xinyang, *et al.*. Close-loop experiment of adaptive optics system based on linear phase retrieval technique[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, 28(9): 1633-1637.  
陈 波, 李 敏, 李新阳, 等. 基于线性相位反演技术的自适应光学闭环实验研究[J]. *光学学报*, 2008, 28(9): 1633-1637.
- 9 Morse P M, Feshbach H. *Methods of the Oretical Physics*[M]. New York: McGraw-Hill, 1953.
- 10 Ning Yu. Performance Test and Application Study of a Bimorph Deformable Mirror[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2008: 110-111.  
宁 禹. 双压电片变形反射镜的性能分析与应用研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2008: 110-111.
- 11 Blanchard P M, Fisher D J, Woods S C, *et al.*. Phase-diversity wave-front sensing with a distorted diffraction grating[J]. *Appl Opt*, 2000, 39(35): 6649-6655.
- 12 Jiang Zongfu, Xi Fengjie, Xu Xiaojun, *et al.*. Theory and applications of defocus grating wavefront curvature sensing[J]. *Chinese J Lasers*, 2010, 37(1): 205-210.  
姜宗福, 习锋杰, 许晓军, 等. 光栅型波前曲率传感器原理和应用[J]. *中国激光*, 2010, 37(1): 205-210.
- 13 Chen Bo, Yang Jing, Li Xinyang, *et al.*. Phase grating wavefront curvature sensor based on liquid crystal spatial light modulator[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, 52(8): 082301.  
陈 波, 杨 靖, 李新阳, 等. 基于液晶空间光调制器的光栅型波前曲率传感器[J]. *激光与光电子学进展*, 2015, 52(8): 082301.
- 14 Milton N M, Lloyd-Hart M. Disk harmonic functions for adaptive optics simulations[C]. *Adaptive Optics: Analysis and Methods*, Optical Society of America, 2005, AWA3.
- 15 Cresside M Harding, Rachel A Johnston, Richard G Lane. Fast simulation of a Kolmogorov phase screen[J]. *Appl Opt*, 1999, 38(11): 2161-2170.
- 16 Li Xinyang, Jiang Wenhan. Zernike modal wavefront reconstruction error of Hartmann sensor on measuring the atmosphere disturbed wavefront[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2002, 14(2): 243-249.  
李新阳, 姜文汉. 哈特曼传感器对湍流畸变波前的泽尼克模式复原误差[J]. *强激光与粒子束*, 2002, 14(2): 243-249.

栏目编辑: 史 敏