

量子比特间相互作用对同量子谐振腔强耦合的量子比特纠缠性质的影响

董 锐

北京邮电大学理学院, 北京 100876

摘要 在拉比模型中加入了量子比特之间的相互作用,并用绝热近似的方法求解拉比模型,同时探讨相互作用项对于量子比特纠缠的影响。一个显著的结果是通过选择合适的相互作用参数,可以延长量子比特之间纠缠的时间或提高纠缠度。产生和保持纠缠是量子信息处理的核心。

关键词 量子光学; 拉比模型; 过耦合; 绝热近似

中图分类号 O431.2 文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201636.0227003

Effect of Interaction between Two Qubits on Qubits Entanglement Properties of Ultra-strongly Coupling Quantum Oscillator

Dong Kun

School of Sciences, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China

Abstract The interaction of the qubits is added in Rabi model and the adiabatic approximation method is used to solve this model. The effect of the entanglement on the interaction parameter is also investigated. A notable result indicates that it can prolong the entanglement time or improve the entanglement degree by using an appropriate interaction parameter. As the generation and preservation of entanglement plays an important role in quantum information processing.

Key words quantum optics; Rabi model; ultra-strong coupling; adiabatic approximation

OCIS codes 270.6620; 020.5580; 270.1670

1 引 言

自1935年Schrödinger等^[1-2]明确提出量子纠缠的概念以来,这个概念一直是一个研究热点。相互纠缠的系统动力学行为,已经广泛应用到不同领域中,其中量子信息处理(QIP)是纠缠应用最广的一个领域^[3-5]。实现量子信息处理主要有两种方法,即二维物理系统和连续变量物理系统。其中连续变量物理系统的可控性好,可通过外界对系统的调控来保持纠缠,因而更受到大家的关注。在连续变量物理系统中,Jaynes-Cummings(JC)模型^[6]有着较为广泛的应用。对JC模型在量子信息处理的应用已经在理论和实验上进行了广泛而深入的研究^[7-14]。尽管JC模型在理论和实验上取得了很大的成功,但它只是Rabi(拉比)模型^[15-16]的一种近似形式,即旋转波近似(RWA),它的成立依赖于光场的频率和原子的频率要比较接近,以及原子与光场的耦合强度比较弱。随着腔量子电动力学和电路量子电动力学的发展,人们已经可以在工程上实现原子与光场的强耦合以及光场和原子之间频率的大失谐。RWA已经无法精确地描述好系统的动力学行为^[17-19]。RWA失效时对应的耦合强度被称为强耦合界限^[20-26]。在一些实验中已经实现了强耦合,并表明在强耦合的条件下JC模型已经彻底的失效^[17-18]。

收稿日期: 2015-05-15; 收到修改稿日期: 2015-08-27

基金项目: 国家自然科学基金(10875018)

作者简介: 董 锐(1988—),男,博士研究生,主要从事量子光学方面的研究。E-mail: dklovely@163.com

导师简介: 田贵花(1967—),女,博士,教授,主要从事广义相对论和量子光学方面的研究。E-mail: tgh-2000@263.net

因此最近几年,研究者们都集中在强耦合条件下对拉比模型的求解以及在 QIP 中的应用,并得到了一些更新更广泛的结果^[19-31]。其中一种被称为绝热近似的方法^[20,32,33],当原子的频率远远小于光场频率时,在强耦合条件下可以很好地描述好系统的动力学行为。尽管绝热近似依赖于原子的频率远远小于光场频率的条件,但是只要原子的频率远远小于光场频率,对于任意的耦合强度绝热近似都有着很好的表现^[33]。当光场的频率和原子的频率比较接近时,绝热近似会出现一些偏差,但一些相关的研究证明这些偏差很小^[25,28,34]。当光场的频率远远大于原子的频率时,情况变得相对复杂。一些基于绝热近似的改良方法,可以提升基态本征值和本征向量的精度,但是对于激发态并没有很好的表现^[35]。当光场的频率远远大于原子的频率且耦合强度较小时,激发态会出现所谓的共振现象,这是绝热近似表现不好的根本原因^[36-38]。但当耦合强度很大时,共振现象带来的影响将变得很小,绝热近似又有了很好的表现^[33,39]。综上所述,在耦合强度很强时,绝热近似还是可以很好地描述系统的动力学行为。

本文将利用绝热近似求解拉比模型并讨论纠缠保持的问题。将拓展 Agarwal 等^[40]的工作,考虑原子之间相互作用对纠缠保持的影响。当原子与光场耦合时,原子之间也可以相互耦合,可以用自旋耦合的模型来描述^[41-44],因此在拉比模型中加入了相互作用项。内容分为两部分,第一部分将求解拉比模型的本征值谱;第二部分将研究系统的纠缠动力学问题。

2 系统的本征值谱

拉比模型的哈密顿量为^[15,16]

$$H_{\text{Rabi}} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^*\hat{a} + \hbar\omega\frac{\beta}{2}(\hat{a}^* + \hat{a})(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-), \quad (1)$$

式中 $\hat{\sigma}_z$ 和 $\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_x$ 是量子比特在希尔伯特空间中广义的泡利算符; \hat{a}^* 和 \hat{a} 分别代表量子谐振腔的产生算符和湮灭算符; ω_0 和 ω 表示量子比特和量子谐振腔的频率; β 反映量子比特和量子谐振腔之间的耦合强度。

Agarwal 等^[40]通过将算符泡利 $\hat{\sigma}$ 用双原子泡利算符来替代,将拉比模型拓展到双原子的情形,对应的哈密顿量如(2)式所示。

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{S}_z + \hbar\omega\hat{a}^*\hat{a} + \hbar\omega\beta(\hat{a} + \hat{a}^*)\hat{S}_x, \quad (2)$$

式中

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z^1 + \hat{\sigma}_z^2), \hat{S}_x = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x^1 + \hat{\sigma}_x^2). \quad (3)$$

在此基础上,考虑到两个原子之间存在相互作用,在哈密顿量中加入对应的相互作用项。常见的相互作用项有如(4)式和(5)式的两种^[45-51]:

$$\hat{H}_{I,1} = \hbar\omega_0\gamma_1(\hat{\sigma}_x^1\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^1\hat{\sigma}_y^2), \quad (4)$$

$$\hat{H}_{I,2} = \hbar\omega_0\gamma_2\hat{\sigma}_z^1\hat{\sigma}_z^2, \quad (5)$$

式中 γ_i 为原子之间耦合的强度。现在系统的哈密顿量变为

$$\hat{H}_i = \hat{H}_{I,i} + \hat{H}. \quad (6)$$

首先,第一个任务是建立一组新的基矢——位移谐振子基矢。这可以通过绝热近似在 $\omega_0 \ll \omega$ 的极限情形下得到这组基矢。很多作者已经对如何利用绝热近似得到位移谐振子基矢这个问题进行了相关推导^[20,32,33]。当 $\omega_0 = 0$ 时,系统的哈密顿量变为

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^*\hat{a} + \hbar\omega\beta(\hat{a} + \hat{a}^*)\hat{S}_x, \quad (7)$$

\hat{H}_0 满足的本征方程为

$$\hat{H}_0[\hat{a}^*\hat{a} + \beta(\hat{a} + \hat{a}^*)\hat{S}_x]\Phi = E\Phi, \quad (8)$$

本征向量 $|\Phi\rangle$ 可以写成如(9)式的直积形式

$$|\Phi\rangle = |j, m\rangle|\phi_m\rangle, \quad (9)$$

式中 $|j, m\rangle$ 是算符 \hat{S}_x 的本征向量, $|\phi_m\rangle$ 是剩余部分的本征向量。

利用算符 $\hat{\sigma}_x$ 的本征向量 ($\hat{\sigma}_x|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$), 可以将 $|j, m\rangle$ 表示成

$$\begin{pmatrix} |1,1\rangle \\ |1,0\rangle \\ |0,0\rangle \\ |1,-1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |+,+\rangle \\ |+,-\rangle \\ |-,+\rangle \\ |-, -\rangle \end{pmatrix}, \quad (10)$$

将 $|j,m\rangle$ 代入(8)式得到

$$\hbar\omega[\hat{a}^+\hat{a} + m\beta(\hat{a}^+ + \hat{a})]|\phi_m\rangle = E|\phi_m\rangle, \quad (11)$$

令 $\beta_m = m\beta$, 对(11)式两边同时加上 β_m^2 , 并进行移项合并化简得到

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a}(\hat{a}^+ + \beta_m)(\hat{a} + \beta_m) = (E/\hbar\omega + \beta_m^2)|\phi_m\rangle = N|\phi_m\rangle, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

利用位移算符 $\hat{D}(\beta_m) = \exp[\beta_m(\hat{a}^+ - \hat{a})]$ (β_m 为实数)的性质

$$\begin{cases} \hat{D}^+(\beta_m)\hat{a}^+\hat{D}(\beta_m) = \hat{a}^+ + \beta_m \\ \hat{D}^+(\beta_m)\hat{a}\hat{D}(\beta_m) = \hat{a} + \beta_m \end{cases}, \quad (13)$$

将(13)式代入(12)式并在两边同乘算符 $\hat{D}(\beta_m)$

$$\hat{a}^+\hat{a}[\hat{D}(\beta_m)|\phi_m\rangle] = N[\hat{D}(\beta_m)|\phi_m\rangle], \quad (14)$$

通过对比粒子数算符 $\hat{a}^+\hat{a}$ 的本征方程, 可以看出态 $\hat{D}(\beta_m)|\phi_m\rangle$ 是粒子数算符 $\hat{a}^+\hat{a}$ 的本征态, 因此 $\hat{D}(\beta_m)|\phi_m\rangle = |N\rangle$, 即

$$|\phi_m\rangle = \hat{D}(-\beta_m)|N\rangle \equiv |N_m\rangle, \quad (15)$$

这里的 $|N_m\rangle$ 是所谓的位移福克态。

现在已经得到了 H_0 的本征向量

$$|\Phi\rangle \rightarrow |\Phi_{j,m,N}\rangle = |j,m\rangle|N_m\rangle, \quad (16)$$

其对应的本征值为

$$E_{N,m} = \hbar\omega(N - \beta_m^2). \quad (17)$$

利用位移谐振子基矢 $|j,m\rangle|N_m\rangle$ 去展开考虑原子之间相互作用的拉比模型的哈密顿量。首先可以看到

$$\begin{cases} \hat{S}(z)|0,0\rangle = 0 \\ \hat{S}(x)|0,0\rangle = 0, \\ \hat{H}_{l,i}|0,0\rangle = 0 \end{cases} \quad (18)$$

可以很容易得到 $|0,0\rangle|N_0\rangle$ 便是系统的哈密顿量 \hat{H}_i 其中的一个本征向量, 其对应本征值为 $E_{N,0} = \hbar\omega N$ 。下面就不必用基矢 $|0,0\rangle|N_0\rangle$ 去展开系统的哈密顿量 \hat{H}_i 。用其余的基矢 $|1,m\rangle|N_m\rangle$ 去展开系统的哈密顿量 \hat{H}_i 会得到矩阵

$$\hat{H}_i = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} \hat{H}_0 & \hat{H}_{0,1} & \dots & \dots & \hat{H}_{0,N+1} \\ \hat{H}_{0,1} & \hat{H}_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \hat{H}_N & \hat{H}_{N,N+1} \\ \hat{H}_{0,N+1} & \dots & \dots & \hat{H}_{N,N+1} & \hat{H}_{N+1} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

式中既包括对于 N 为同一值的展开项 \hat{H}_N , 也包括 N 为不同值的展开项 $\hat{H}_{m,m'}$, 这使得系统的哈密顿量 \hat{H} 的矩阵展开形式变得很复杂, 很难得到解析解。这里 N 代表由 $|1,m\rangle|N_m\rangle$ 组成的第 N 个流形。展开项 \hat{H}_N 代表同一流形之间内部的跃迁, 展开项 $\hat{H}_{m,m'}$ 代表不同流形之间的跃迁。 $\hat{H}_{m,m'}$ 的具体形式为

$$\omega_0 \langle 1,m | \hat{S}_z + \hat{H}_{l,i} | 1,m' \rangle \langle N_m | N_{m'} \rangle, \quad (20)$$

当 $\omega_0 \ll \omega$ 时, $\hat{H}_{m,m'}$ 的值远远小于不同流形之间的能级之差, 即

$$\omega_0 \langle 1, m | \hat{S}_z + \hat{H}_{l,i} | 1, m' \rangle \langle N_m | N_{m'} \rangle \ll \omega(N - N'), \quad (21)$$

因此可以忽略展开项 $\hat{H}_{m,m'}$, 只保留表征同一流形之间相互跃迁的展开项 \hat{H}_N , 即所谓的绝热近似^[20,32,33]。

可以将用位移谐振子基矢展开的哈密顿量, 简化成分块对角化矩阵。利用(22)式可很容易得到一些关系:

$$\begin{cases} \langle 1, 1 | \hat{S}_z | 1, 1 \rangle = \langle 1, 0 | \hat{S}_z | 1, 0 \rangle = \langle 1, -1 | \hat{S}_z | 1, -1 \rangle = 0 \\ \langle 1, 0 | \hat{S}_z | 1, 1 \rangle = \langle 1, 0 | \hat{S}_z | 1, -1 \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \langle 1, 0 | \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_y^2 | 1, 1 \rangle = \langle 1, 0 | \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_y^2 | 1, -1 \rangle = \langle 1, 0 | \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_y^2 | 1, 0 \rangle = 0 \\ \langle 1, -1 | \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_y^2 | 1, 1 \rangle = -\frac{1}{2} \\ \langle 1, 0 | \hat{\sigma}_z^1 \hat{\sigma}_z^2 | 1, 1 \rangle = \langle 1, 0 | \hat{\sigma}_z^1 \hat{\sigma}_z^2 | 1, -1 \rangle = 0 \\ \langle 1, 0 | \hat{\sigma}_z^1 \hat{\sigma}_z^2 | 1, 0 \rangle = 1 \\ \langle 1, -1 | \hat{\sigma}_z^1 \hat{\sigma}_z^2 | 1, 1 \rangle = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (22)$$

可以得到各个分块矩阵的形式:

$$\hat{H}_{1,N} = \hbar\omega \begin{pmatrix} N - \beta^2 & \Omega_N & \Omega'_{1,N} \\ \Omega_N & N & \Omega_N \\ \Omega'_{1,N} & \Omega_N & N - \beta^2 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\hat{H}_{2,N} = \hbar\omega \begin{pmatrix} N - \beta^2 & \Omega_N & \Omega'_{2,N} \\ \Omega_N & N + \gamma_2 \frac{\omega_0}{\omega} & \Omega_N \\ \Omega'_{2,N} & \Omega_N & N - \beta^2 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

这里行和列的排列顺序为 $|1, 1\rangle |N_1\rangle$, $|1, 0\rangle |N_0\rangle$, $|1, -1\rangle |N_{-1}\rangle$, 非对角元素 Ω_N 和 $\Omega'_{i,N}$ 的表达式为

$$\Omega_N = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\omega_0}{\omega} \langle N_1 | N_0 \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\omega_0}{\omega} \exp(-\beta^2/2) L_N(\beta^2), \quad (25)$$

$$\Omega'_{1,N} = -\frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \langle N_1 | N_{-1} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \gamma_1 \exp(-2\beta^2) L_N(2\beta^2), \quad (26)$$

$$\Omega'_{2,N} = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \langle N_1 | N_{-1} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \gamma_2 \exp(-2\beta^2) L_N(2\beta^2), \quad (27)$$

这里的 $L_N(x)$ 是 N 阶拉盖尔多项式。这与不考虑原子间相互作用的结果有着明显的不同, 在文献[40]中只有一个非对角元素。(23)式和(24)式的 3×3 矩阵的本征值和本征向量分别为

$$|E_{i,N}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$|E_{i,N}^\pm\rangle = \frac{1}{l_{i,N,\pm}} \begin{pmatrix} 1 \\ y_{i,N,\pm} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$y_{1,N,\pm} = \frac{\beta^2 - \Omega'_{1,N} \pm \sqrt{(\beta^2 - \Omega'_{1,N})^2 + 8\Omega_N^2}}{2\Omega_N}, \quad (30)$$

$$y_{2,N,\pm} = \frac{\beta^2 + \gamma_2 \frac{\omega_0}{\omega} - \Omega'_{2,N} \pm \sqrt{\left(\beta^2 + \gamma_2 \frac{\omega_0}{\omega} - \Omega'_{2,N}\right)^2 + 8\Omega_N^2}}{2\Omega_N}, \quad (31)$$

$$l_{i,N,\pm}^2 = 2 + y_{i,N,\pm}^2, \quad (32)$$

$$E_{i,N}^0 = \hbar\omega[N - \beta^2 - \Omega'_{i,N}], \quad (33)$$

$$E_{1,N}^\pm = \frac{\hbar\omega}{2} \left[2N - \beta^2 + \Omega'_{1,N} \pm \sqrt{(\beta^2 - \Omega'_{1,N})^2 + 8\Omega_N^2} \right], \quad (34)$$

$$E_{2,N}^{\pm} = \frac{\hbar\omega}{2} \left[2N - \beta^2 + \Omega_{2,N}' + \gamma_2 \frac{\omega_0}{\omega} \pm \sqrt{\left(\beta^2 + \gamma_2 \frac{\omega_0}{\omega} - \Omega_{2,N}' \right)^2 + 8\Omega_N'^2} \right]. \quad (35)$$

可以看到非对角元素 $\Omega_{i,N}'$ 影响了 $|E_{i,N}^{\pm}\rangle$ 、 $E_{i,N}^0$ 和 $E_{i,N}^{\pm}$ 。

3 系统纠缠动力学问题

为了拉比模型能够应用到实际的 QIP 系统中,对它的系统纠缠随时间演化的动力学行为的研究显得尤为重要。Agarwal 等^[40]应用绝热近似来研究了双原子情形下系统的纠缠动力学问题。这个小节利用加入相互作用项来计算同样的问题,并与 Agarwal 等^[40]的结果相比,说明相互作用参数对系统纠缠性质的影响。

让原子处于关于算符 $\hat{\sigma}_x$ ($\hat{\sigma}_x|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$) 的一种最大的纠缠态 Bell 态,量子谐振腔处于相干态 $|\alpha\rangle$,则系统的初始状态为

$$|\xi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,+\rangle + |-, -\rangle)|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle + |1,-1\rangle)|\alpha\rangle, \quad (36)$$

当 $N \gg \beta$ 时,可以得到如(37)式的近似

$$|N\rangle \gg \hat{D}(\pm\beta)|N\rangle = |N_{\pm 1}\rangle, \quad (37)$$

把(37)式带入(36)式可以得到

$$\begin{aligned} |\xi(0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle + |1,-1\rangle) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} \exp(-|\alpha|^2/2) |N\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|1,1\rangle \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} \exp(-|\alpha|^2/2) |N_1\rangle + |1,-1\rangle \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} \exp(-|\alpha|^2/2) |N_{-1}\rangle \right] =, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle|\alpha_1\rangle + |1,-1\rangle|\alpha_{-1}\rangle) \end{aligned} \quad (38)$$

然后利用(28~35)式展开(38)式可以得到

$$|\xi(0)\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{2}\sqrt{N!}} \exp(-|\alpha|^2/2) \left(\frac{2}{L_{i,N,+}} |E_{i,N}^+\rangle + \frac{2}{L_{i,N,-}} |E_{i,N}^-\rangle \right), \quad (39)$$

再利用(39)式可以得到

$$\begin{aligned} |\xi(t)\rangle &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{2}\sqrt{N!}} \exp(-|\alpha|^2/2) \frac{1}{y_{i,N,+} - y_{i,N,-}} \times \\ &= \left\{ \left[\frac{-L_{i,N,+} y_{i,N,-}}{2} \exp(-iE_{i,N}^+ t/\hbar) + \frac{L_{i,N,-} y_{i,N,+}}{2} \exp(-iE_{i,N}^- t/\hbar) \right] \times (|1,1\rangle|N_1\rangle + |1,-1\rangle|N_{-1}\rangle) + \right. \\ &= \left. [L_{i,N,+} \exp(-iE_{i,N}^+ t/\hbar) + L_{i,N,-} \exp(-iE_{i,N}^- t/\hbar)] |1,0\rangle|N_0\rangle \right\} \end{aligned} \quad (40)$$

再利用(37)式的假设可得

$$\begin{aligned} |\xi(t)\rangle &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{2}\sqrt{N!}} \exp(-|\alpha|^2/2) \frac{1}{y_{i,N,+} - y_{i,N,-}} \times \\ &= \left\{ \left[\frac{-L_{i,N,+} y_{i,N,-}}{2} \exp(-iE_{i,N}^+ t/\hbar) + \frac{L_{i,N,-} y_{i,N,+}}{2} \exp(-iE_{i,N}^- t/\hbar) \right] (|1,1\rangle + |1,-1\rangle) + \right. \\ &= \left. [L_{i,N,+} \exp(-iE_{i,N}^+ t/\hbar) + L_{i,N,-} \exp(-iE_{i,N}^- t/\hbar)] |1,0\rangle|N_0\rangle \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

再利用算符 $\hat{\sigma}_z$ ($\hat{\sigma}_z|e\rangle = |e\rangle, \hat{\sigma}_z|g\rangle = -|g\rangle$) 的本征态来展开(41)式:

$$\begin{aligned} |\xi(t)\rangle &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{2}\sqrt{N!}} \exp(-|\alpha|^2/2) \frac{1}{y_{i,N,+} - y_{i,N,-}} \times \\ &= \left\{ \left[(\sqrt{2} - y_{i,N,-}) \exp(-iE_{i,N}^+ t/\hbar) + (y_{i,N,+} - \sqrt{2}) \exp(-iE_{i,N}^- t/\hbar) \right] |e,e\rangle + \right. \\ &= \left. [-(\sqrt{2} + y_{i,N,-}) \exp(-iE_{i,N}^+ t/\hbar) + (y_{i,N,+} + \sqrt{2}) \exp(-iE_{i,N}^- t/\hbar)] |g,g\rangle \right\} |N_0\rangle \end{aligned} \quad (42)$$

继续沿用文献[40]中的假设 $\omega_0 \leq 0.25\omega$ 、 $\beta \in (0, 0.25)$ 和 $\Omega_N \gg \beta^2$ ，在此限制的基础上，加上(43)式的合理假设：

$$\gamma_i \in (-1, 1), \Omega'_{i,N} \gg \beta^2, \quad (43)$$

这样可以得到 $y_{i,N,\pm} = \sqrt{2}$ 。因此，(42)式可简化为

$$|\xi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} \left[\exp(-iE_N^- t/\hbar) |e, e\rangle + \exp(-iE_N^- t/\hbar) |g, g\rangle \right] |N_0\rangle, \quad (44)$$

为了研究两个原子之间纠缠的动力学问题，需要先将(44)式对量子谐振腔求迹，以得到关于两个原子的约化密度矩阵

$$\rho_i^{12}(t) = \sum_N \langle N_0 | \xi(t) \rangle \langle \xi(t) | N_0 \rangle = \frac{1}{2} (|ee\rangle \langle ee| + |gg\rangle \langle gg|) + \frac{1}{2} \left[\sum_{N=0}^{\infty} S(t, \omega_0, \gamma_i) |gg\rangle \langle ee| + \text{H.c.} \right], \quad (45)$$

式中

$$\begin{cases} S(t, \omega_0, \gamma_i) = \sum_N P(N) \cos \omega \sqrt{\Omega'_{i,N}{}^2 + 8\Omega_N^2} t \\ P(N) = \frac{|\alpha|^{2N}}{N!} \exp(-|\alpha|^2) \end{cases}, \quad (46)$$

当 $t=0$ 时，两个原子还处于纯态，随着时间的演化；当 $t>0$ 后，两个原子变为混合态。需要利用共生纠缠度来描述混合态的纠缠特性随着时间的演化问题^[52-56]。 $\rho_i^{12}(t)$ 的共生纠缠度为

$$C(t, \gamma_i) = \left| \sum_{N=0}^{\infty} S(t, \omega_0, \gamma_i) \right|. \quad (47)$$

计算 $S(t, \omega_0, \gamma_i)$ 并讨论相互作用项 $\hat{H}_{i,1} = \hbar\omega_0\gamma_i(\hat{\sigma}_x^1\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^1\hat{\sigma}_y^2)$ 对系统纠缠的影响。需要计算的公式为

$$S(t, \omega_0, \gamma_i) = \sum_N P(N) \cos \omega \sqrt{\Omega'_{i,N}{}^2 + 8\Omega_N^2} t, \quad (48)$$

式中泊松分布 $P(N)$ 的均值和方差为 α ，当 α 足够大时，可以用均值和方差也为 α 的高斯分布来代替泊松分布，则有

$$P(N) = \frac{|\alpha|^{2N}}{N!} \exp(-|\alpha|^2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|^2}} \exp\left[-\frac{(N-|\alpha|^2)^2}{2|\alpha|^2}\right], \quad (49)$$

由于拉盖尔多项式出现在 $\Omega'_{i,N}, \Omega_N$ 中，因此直接得到(47)式的解析形式非常困难。当 $|\alpha\beta| \ll 1$ 时，可以只保留拉盖尔多项式的前三项，可得

$$\begin{cases} \Omega_N \approx \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \exp(-x/2) \left[1 - Nx + \frac{N(N-1)}{4} x^2 \right]} \\ \Omega'_{i,N} \approx \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \gamma_i \omega_0 \exp(-2x) [1 - 2Nx + N(N-1)x^2] \end{cases}, \quad (50)$$

这里的 $x = \beta^2$ 。同时由于 $\Omega_N \gg \Omega'_{i,N}$ ，对(48)式进行一阶的泰勒展开，并将(49)式和(50)式代入(48)式可以得到

$$S(t, \omega_0, \gamma_i) = \text{Re} \sum_N P(N) \exp\left\{ i\tau \left[1 - Nx + \frac{N(N-1)}{4} x^2 \right] + i\tau'_1 [2 + N(N-1)x^2] \right\}, \quad (51)$$

式中 $\tau = 2\omega_0 t \exp(-x/2)$ ， $\tau'_1 = \frac{1}{8} \gamma_i^2 \omega_0 t \exp(-3.5x)$ 。利用泊松求和公式可得

$$S(t, \omega_0, \gamma_i) = \text{Re} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{S}_k(t, \omega_0, \gamma_i) + \frac{1}{2} P(0) \exp(\tau + \tau'_1) \right], \quad (52)$$

这里

$$\bar{S}_k(t, \omega_0, \gamma_i) = \int_0^{\infty} P(n) \exp(2i\pi kn) \exp\left\{ i\tau \left[1 - nx + \frac{n(n-1)}{4} x^2 \right] + i\tau'_1 [2 + n(n-1)x^2] \right\} dn, \quad (53)$$

对(53)式使用高斯积分公式可得

$$\bar{S}_k(t, \omega_0, \gamma_1) = \frac{\exp(\Phi_{\text{Re}1} + i\Phi_{\text{Im}1})}{\left[1 + (yf/2 + 2y_1'f)^2\right]^{1/4}}, \quad (54)$$

式中

$$\begin{cases} \Phi_{\text{Re}1} = \frac{|\alpha|^2}{2\left[1 + (yf/2 + 2y_1'f)^2\right]} \left[1 - g_1^2 + (yf + 4y_1'f)g_1\right] - \frac{|\alpha|^2}{2} \\ \Phi_{\text{Im}1} = \frac{|\alpha|^2}{2\left[1 + (yf/2 + 2y_1'f)^2\right]} \left[(1 - g_1^2)\left(\frac{yf}{2} + 2y_1'f\right) - 2g_1\right] - \frac{\theta}{2} + \tau + 2\tau_1' \end{cases}, \quad (55)$$

在这里定义

$$\begin{cases} y = \tau x \\ y_1' = \tau_1' x \\ f = |\alpha|^2 x \\ g_1 = y + yx/4 + y_1'x - 2\pi k \\ \theta = \tan^{-1}(yf/2 + 2y_1'f)^2 \end{cases}, \quad (56)$$

由于 $x \ll 1$, 所以 $\tau_1' = \gamma_1^2 \tau / 16, y_1' = \frac{\gamma_1^2}{16} y$ 。因此当 $y = \frac{2k\pi}{1 - f\gamma_1^2/8}$ 时, $\bar{S}_k(t, \omega_0, \gamma_1)$ 将取得最大值, 与之对应的 $S(t, \omega_0, \gamma_1)$ 也会取得最大值。因此, 可以忽略 $\Phi_{\text{Re}1}$ 中的 $yx, (y - 2\pi k)f^2, f^3, (y - 2\pi k)^2 f$ 以及它们的更高次项, 从而得 $\Phi_{\text{Re}1}$ 化简后的形式

$$\Phi_{\text{Re}1} = -\frac{|\alpha|^2}{2\left[1 + \left(\frac{4 + \gamma_1^2}{8 - f\gamma_1^2} 2\pi kf\right)^2\right]} \left[y - 2\pi k \left(1 + \frac{4 + \gamma_1^2}{8 - f\gamma_1^2}\right)\right]^2. \quad (57)$$

利用相同的方法可以得到

$$\Phi_{\text{Im}1} = -\frac{\tan^{-1}\left(\frac{4 + \gamma_1^2}{8 - f\gamma_1^2} 2\pi kf\right)^2}{2} + \frac{1}{x} \left\{ \frac{4 + \gamma_1^2}{8 - f\gamma_1^2} 2\pi kf - y[1 + f(1 + \gamma_1)] \right\}, \quad (58)$$

由此可得

$$\bar{S}_k(t, \omega_0, \gamma_1) = \exp \left\{ \frac{-(\tau - \tau_{1,k})^2 |\alpha|^2 x^2}{2\left[1 + \left(\frac{4 + \gamma_1^2}{8 - f\gamma_1^2} 2\pi kf\right)^2\right]} + i\Phi_{\text{Im}1} \right\} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{4 + \gamma_1^2}{8 - f\gamma_1^2} 2\pi kf\right)^2\right]^{1/4}}, \quad (59)$$

式中

$$\tau_{1,k} = 2\pi k \left(1 + \frac{4 + \gamma_1^2}{8 - f\gamma_1^2}\right) / x, \quad (60)$$

显而易见, $\bar{S}(t, \omega_0, \gamma_1)$ 的振幅远大于 $P(0)$, 所以在(52)式中可以忽略 $\frac{1}{2} p(0) \exp(\tau + \tau_1)$ 项。因为研究的时间是正值, 所以(52)式中的 $k \geq 0$ 。最终得到了化简后的形式

$$S_1(t, \omega_0, \gamma_1) = \text{Re} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \bar{S}_k(t, \omega_0, \gamma_1) \right], \quad (61)$$

将(61)式代入(47)式可以得到

$$C(t, \gamma_1) = \left| \sum_{N=0}^{\infty} \bar{S}_k(t, \omega_0, \gamma_1) \right| \approx \sum_{k=0}^{\infty} |\bar{S}_k(t, \omega_0, \gamma_1)| \approx \exp \left\{ \frac{-(\tau - \tau_{1,k})^2 |\alpha|^2 x^2}{2 \left[1 + \left(\frac{4 + \gamma_1^2}{8 - f\gamma_1^2} 2\pi k f \right)^2 \right]} \right\} \times \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{4 + \gamma_1^2}{8 - f\gamma_1^2} 2\pi k f \right)^2 \right]^{1/4}}, \quad (62)$$

从(62)式可以看出,由于指数部分的存在,共生纠缠度会出现所谓的死亡复生现象。第 k 次复生的时间和最大值是

$$t_{1,k}^{\text{rev}} = \frac{\pi k}{\omega_0 \beta^2} \left(1 + \frac{4 + \gamma_1^2}{8 - f\gamma_1^2} |\alpha \beta|^2 \right), \quad (63)$$

$$h_{1,k} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{4 + \gamma_1^2}{8 - f\gamma_1^2} \right)^2 4k^2 \pi^2 |\alpha \beta|^4 \right]^{1/4}}, \quad (64)$$

$k=0$ 时,复生的持续时间为

$$\delta\tau_0 = \frac{1}{|\alpha| \beta^2}, \quad (65)$$

当 k 不为零时,复生的持续时间为

$$\delta\tau_{1,k} = \delta\tau_0 \sqrt{1 + \left(\frac{4 + \gamma_1^2}{8 - f\gamma_1^2} \right)^2 4k^2 \pi^2 |\alpha \beta|^4}. \quad (66)$$

下面讨论相互作用项参数 γ_1 对死亡复生现象的影响。通过(63)式、(64)式和(66)式可以看到,当相互作用项参数 $\gamma_1 \in \left(0, \frac{2\sqrt{2}}{\alpha\beta} \right)$ 以及 $\gamma_1 < -\frac{2\sqrt{2}}{\alpha\beta}$ 时,第 k 次复生的时间 $t_{1,k}^{\text{rev}}$ 和当 k 不为零时,复生的持续的时间 $\delta\tau_{1,k}$ 是关于相互作用项参数 γ_1 的增函数,第 k 次复生的最大值 $h_{1,k}$ 是关于相互作用项参数 γ_1 的减函数;当相互作用项参数 $\gamma_1 \in \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\alpha\beta}, 0 \right)$ 以及 $\gamma_1 > \frac{2\sqrt{2}}{\alpha\beta}$ 时,第 k 次复生的时间 $t_{1,k}^{\text{rev}}$ 和当 k 不为零时,复生的持续的时间 $\delta\tau_{1,k}$ 是关于相互作用项参数 γ_1 的减函数,第 k 次复生的最大值 $h_{1,k}$ 是关于相互作用项参数 γ_1 的增函数。可以从图1中看到上述的讨论。

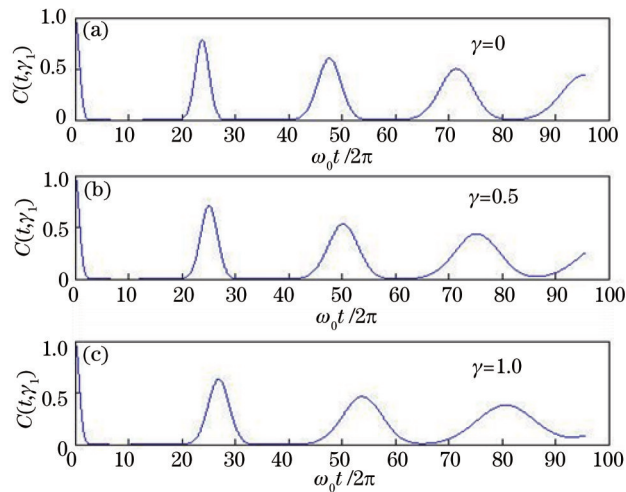


图1 两个量子比特间的纠缠随时间演化的示意图。系统的参数为 $\omega_0 = 0.15\omega, \beta = 0.16, \alpha = 3$, (a) $\gamma_1 = 0$, (b) $\gamma_1 = 0.5$, (c) $\gamma_1 = 1$ 。

两个量子比特间的纠缠出现死亡复生的现象,并且相互作用参数影响复生的持续时间以及复生的纠缠度

Fig.1 Entanglement dynamics between the two qubits for $\omega_0 = 0.15\omega, \beta = 0.16, \alpha = 3$, (a) $\gamma_1 = 0$, (b) $\gamma_1 = 0.5$, (c) $\gamma_1 = 1$. Collapse and revival of the entanglement in two qubits. The interaction parameters affect the duration time of revival and the entanglement degree

与上面类似的计算可以讨论当相互作用项为 $\hat{H}_{1,2} = \hbar\omega_0 \gamma_2 \hat{\sigma}_z^1 \hat{\sigma}_z^2$ 时对系统纠缠的影响

$$C(t, \gamma_2) = \left| \sum_{k=0}^{\infty} S(t, \omega_0, \gamma_2) \right| \approx \exp \left\{ \frac{-(\tau - \tau_{2,k})^2 |\alpha|^2 x^2}{2 \left[1 + \left(\frac{1 + \gamma_2^2}{2 - f\gamma_2^2} 2\pi k f \right)^2 \right]} \right\} \times \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{4 + \gamma_2^2}{8 - f\gamma_2^2} 2\pi k f \right)^2 \right]^{1/4}}, \quad (67)$$

$$t_{2,k}^{\text{rev}} = \frac{\pi k}{\omega_0 \beta^2} \left(1 + \frac{1 + \gamma_2^2}{2 - f\gamma_2^2} |\alpha \beta|^2 \right), \quad (68)$$

$$h_{2,k} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1 + \gamma_2^2}{2 - f\gamma_2^2} \right)^2 4k^2 \pi^2 |\alpha \beta|^4 \right]^{1/4}}, \quad (69)$$

$$\delta\tau_{2,k} = \delta\tau_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1 + \gamma_2^2}{2 - f\gamma_2^2} \right)^2 4k^2 \pi^2 |\alpha \beta|^4}, \quad (70)$$

当相互作用项参数 $\gamma_2 \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{\alpha\beta} \right)$ 以及 $\gamma_1 < -\frac{\sqrt{2}}{\alpha\beta}$ 时, 第 k 次复生的时间 $t_{2,k}^{\text{rev}}$ 和当 k 不为零时, 复生的持续的时间 $\delta\tau_{2,k}$ 是关于相互作用项参数 γ_2 的增函数, 第 k 次复生的最大值 $h_{2,k}$ 是关于相互作用项参数 γ_2 的减函数; 当相互作用项参数 $\gamma_2 \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{\alpha\beta}, 0 \right)$ 以及 $\gamma_2 > \frac{\sqrt{2}}{\alpha\beta}$ 时, 第 k 次复生的时间 $t_{2,k}^{\text{rev}}$ 和当 k 不为零时, 复生的持续的时间 $\delta\tau_{2,k}$ 是关于相互作用项参数 γ_2 的减函数, 第 k 次复生的最大值 $h_{2,k}$ 是关于相互作用项参数 γ_2 的增函数。可以从图 2 中看到上述的讨论。

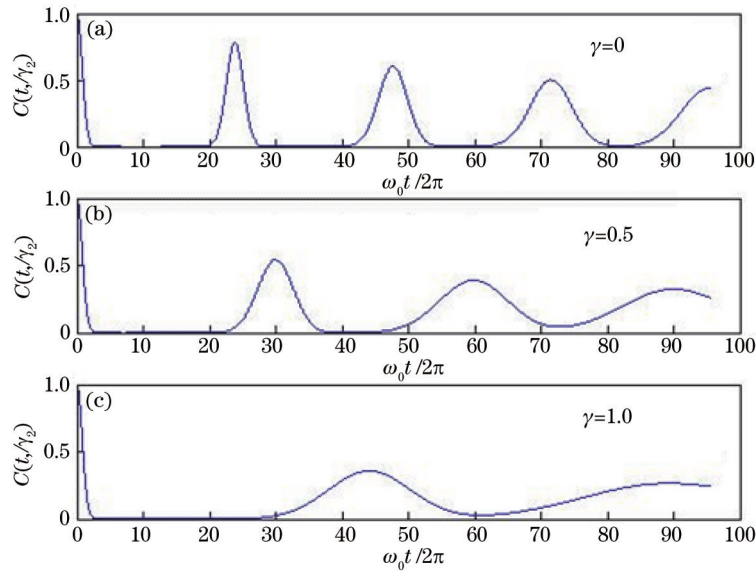


图 2 两个量子比特间的纠缠随时间演化的示意图。系统的参数为 $\omega_0 = 0.15\omega, \beta = 0.16, \alpha = 3$, (a) $\gamma_1 = 0$, (b) $\gamma_1 = 0.5$, (c) $\gamma_1 = 1$ 。

两个量子比特间的纠缠出现死亡复生的现象, 并且相互作用参数影响复生的持续时间以及复生的纠缠度

Fig.2 Entanglement dynamics between the two qubits for $\omega_0 = 0.15\omega, \beta = 0.16, \alpha = 3$, (a) $\gamma_1 = 0$, (b) $\gamma_1 = 0.5$, (c) $\gamma_1 = 1$. Collapse and revival of the entanglement in two qubits. The interaction parameters affect the duration time of revival and the entanglement degree

根据(63)式和(66)式或(69)式和(70)式关于相互作用参数 γ_i 的单调性来控制每次复生持续的时间以及每次复生的纠缠度。在量子信息处理和量子通信中, 量子纠缠的保持和提高是及其重要的, 上述的研究找到了一种通过选择相互作用参数的大小来调节两个原子之间纠缠的方法。可以根据实际需求来调节相互作用参数的大小, 以便得到更好的纠缠度或者更好的延长两个原子之间的纠缠的方法。

对于相互作用项的引入对系统产生的影响, 可以把它等同于失谐量对系统造成的影响^[58], 这里失谐量的定义是 $\delta = \omega - \omega_0$ 。在强耦合区间内, 随着失谐量的增加, 有利于保持原子之间的纠缠, 反之会抑制原子之间

的纠缠^[52]。以相互作用项为 $\hbar\omega_0\gamma_i(\hat{\sigma}_x^1\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^1\hat{\sigma}_y^2)$ 时为例,讨论上面的结果。没有相互作用项时,原子本身能级为 $1, 0, 0, -1$, 平均每次跃迁的能量差为 $\hbar\omega_0$; 加入相互作用项后原子的能级变为 $1, r_1, -r_1, -1$ 。当相互作用参数 $r_1 \in (0, 1)$ 时, 平均每次跃迁的能量差为 $\frac{2\hbar\omega_0}{3}$; 当 $r_1 \in (1, 1.5)$ 时, 平均每次跃迁的能量差为 $\frac{2r_1\hbar\omega_0}{3}$, 也就是说在 $r_1 \in (0, 1.5)$ 这个区间上, 平均每次跃迁的能量差在减小, 可以等效成原子的频率 ω_0 在减小, 从而失谐量 δ 在减小; 当 $r_1 > 1.5$ 时, 平均每次跃迁的能量差为 $\frac{2r_1\hbar\omega_0}{3}$, 也就是说在 $r_1 > 1.5$ 这个区间上, 平均每次跃迁的能量差在增加, 可以等效成原子的频率 ω_0 在增加, 从而失谐量 δ 在增加。文献[52]可以看出随着相互作用参数的增加, 系统的纠缠呈现先减小后增大的趋势, 这与本文得到的结果一致。可以推断相互作用项的引入对系统纠缠影响的一个原因是等效改变了原子的频率造成了失谐量的改变。当然为何极值点还与耦合强度 β 以及与光场的粒子数 α 有关, 还需进一步的研究。

4 总 结

在传统双比特拉比模型中加入了原子间的相互作用项, 利用绝热近似的方法求解了系统的本征值谱, 并研究了系统纠缠的动力学问题。可以通过选择相互作用参数来控制量子比特的纠缠时间和纠缠度, 上述结果可能应用到量子信息处理中。

参 考 文 献

- 1 E Schrödinger. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik[J]. *Naturwissenschaften*, 1935, 23(48): 807–812.
- 2 A Einstein, B Podolsky, N Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?[J]. *Phys Rev*, 1935, 47(10): 777–780.
- 3 S J van Enk, J I Cirac, P Zoller. Ideal quantum communication over noisy channels: a quantum optical implementation[J]. *Phys Rev Lett*, 1997, 78(22): 4293–4296.
- 4 A K Ekert. Quantum cryptography based on Bell's theorem[J]. *Phys Rev Lett*, 1991, 67(6): 661–663.
- 5 M A Nielsen, I L Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- 6 E T Jaynes, F W Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser[J]. *Proc IEEE*, 1963, 51(1): 89–109.
- 7 W Son, M S Kim, J Lee, *et al.*. Entanglement transfer from continuous variables to qubits[J]. *J Mod Opt*, 2002, 49(1): 1739–1746.
- 8 T Yu, J H Eberly. Sudden death of Entanglement[J]. *Science*, 2009, 323(5914): 598–601.
- 9 B Kraus, J I Cirac. Discrete entanglement distribution with squeezed light[J]. *Phys Rev Lett*, 2004, 92(1): 013602.
- 10 M Paternostro, W Son, M S Kim. Complete conditions for entanglement transfer[J]. *Phys Rev Lett*, 2004, 92(19): 197901.
- 11 M Paternostro, W Son, M S Kim, *et al.*. Dynamical entanglement transfer for quantum-information networks[J]. *Phys Rev A*, 2004, 70(2): 022320.
- 12 J Lee, M Paternostro, M S Kim, *et al.*. Entanglement reciprocation between qubits and continuous variables[J]. *Phys Rev Lett*, 2006, 96(8): 080501.
- 13 L Zhou, G H Yang. Entanglement reciprocation between atomic qubits and an entangled coherent state[J]. *J Phys B*, 2006, 39(24): 5143–5150.
- 14 R W Rendell, A K Rajagopal. Revivals and entanglement from initially entangled mixed states of a damped Jaynes-Cummings model [J]. *Phys Rev A*, 2003, 67(6): 062110.
- 15 I I Rabi. On the process of space quantization[J]. *Phys Rev*, 1936, 49(4): 324–328.
- 16 I I Rabi. Space quantization in a gyrating magnetic field[J]. *Phys Rev*, 1937, 51(8): 652–654.
- 17 T Niemczyk, F Deppe, H Huebl, *et al.*. Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime[J]. *Nature Physics*, 2010, 6(10): 772–776.
- 18 P Forn-Díaz, J Lisenfeld, D Marcos, *et al.*. Observation of the Bloch-Siegert shift in a qubit-oscillator system in the ultrastrong coupling regime[J]. *Phys Rev Lett*, 2010, 105(23): 237001.
- 19 A Fedorov, A K Feofanov, P Macha, *et al.*. Strong coupling of a quantum oscillator to a flux qubit at its symmetry point[J]. *Phys Rev Lett*, 2010, 105(6): 060503.

- 20 E K Irish, J Gea-Banacloche, I Martin, *et al.*. Dynamics of a two-level system strongly coupled to a high-frequency quantum oscillator [J]. *Phys Rev B*, 2005, 72(19): 195410.
- 21 E K Irish. Generalized rotating-wave approximation for arbitrarily large coupling[J]. *Phys Rev Lett*, 2007, 99(17): 173601.
- 22 M H Devoret, S Girvin, R Schoelkopf. Circuit-QED: How strong can the coupling between a Josephson junction atom and a transmission line resonator be[J]. *Ann Phys(Leipzig)*, 2007, 16(10-11): 767-779.
- 23 J Bourassa, J M Gambetta, A A Abdumalikov, *et al.*. Ultrastrong coupling regime of cavity QED with phase-biased flux qubits[J]. *Phys Rev A*, 2009, 80(3): 032109.
- 24 S Ashhab, F Nori. Qubit-oscillator systems in the ultrastrong-coupling regime and their potential for preparing nonclassical state[J]. *Phys Rev A*, 2010, 81(4): 042311.
- 25 J Hausinger, M Grifoni. Qubit-oscillator system: An analytical treatment of the ultrastrong coupling regime[J]. *Phys Rev A*, 2010, 82(6): 062320.
- 26 J Casanova, G Romero, I Lizuain, *et al.*. Deep strong coupling regime of the jaynes-cummings model[J]. *Phys Rev Lett*, 2010, 105(26): 263603.
- 27 D Braak. Integrability of the Rabi model[J]. *Phys Rev Lett*, 2011, 107(10): 100401.
- 28 T Liu, K L Wang, M Feng. The generalized analytical approximation to the solution of the single-mode spin-boson model without rotating-wave approximation[J]. *Europhys Lett*, 2009, 86(5): 054003.
- 29 T Liu, M Feng, K L Wang. Vacuum-induced Berry phase beyond the rotating-wave approximation[J]. *Phys Rev A*, 2011, 84(6): 062109.
- 30 T Liu, M Feng, W L Yang, *et al.*. Parity breaking and scaling behavior in light-matter interaction[J]. *Phys Rev A*, 2013, 88(1): 013820.
- 31 Q H Chen, C Wang, S He, *et al.*. Exact solvability of the quantum Rabi model using bogoliubov operators[J]. *Phys Rev A*, 2012, 86(2): 023822.
- 32 T Sandu. Dynamics of a quantum oscillator strongly and off-resonantly coupled with a two-level system[J]. *Phys Lett A*, 2009, 37(31): 2753-2759.
- 33 S Ashhab, F Nori. Qubit-oscillator systems in the ultrastrong-coupling regime and their potential for preparing nonclassical states[J]. *Phys Rev A*, 2010, 81(4): 042311.
- 34 J Casanova, G Romero, I Lizuain, *et al.*. Deep strong coupling regime of the jaynes-cummings model[J]. *Phys Rev Lett*, 2010, 105(26): 263603.
- 35 M J Hwang, M S Choi. Variational study of a two-level system coupled to a harmonic oscillator in an ultrastrong-coupling regime[J]. *Phys Rev A*, 2010, 82(2): 025802.
- 36 I D Feranchuk, L I Komarov, A P Ulyanenko. Two-level system in a one-mode quantum field: numerical solution on the basis of the operator method[J]. *J Phys A Math Gen*, 1996, 29(14): 4035-4047.
- 37 M Amnat-Talab, S Guerin, H R Jauslin. Quantum averaging and resonances: two-level atom in a one-mode quantized field[J]. *J Math Phys*, 2005, 46(4): 042311.
- 38 E K Irish. Generalized rotating-wave approximation for arbitrarily large coupling[J]. *Phys Rev Lett*, 2007, 99(17): 173601.
- 39 F A Wolf, F Vallone, G Romero, *et al.*. Dynamical correlation functions and the quantum Rabi model[J]. *Phys Rev A*, 2014, 87(2): 023835.
- 40 S Agarwal, S M H Rafsanjani, J H Eberly. Tavis-Cummings model beyond the rotating wave approximation: quasi-degenerate qubits[J]. *Phys Rev A*, 2012, 85(4): 043815.
- 41 Q H Chen, T Liu, Y Y Zhang, *et al.*. Quantum phase transitions in coupled two-level atoms in a single-mode cavity[J]. *Phys Rev A*, 2010, 82(5): 053841.
- 42 J M Martinis. Superconducting phase qubits[J]. *Quantum Inf Process*, 2009, 8(2-3): 81-103.
- 43 R McDermott, R W Simmonds, M Steffen, *et al.*. Simultaneous state measurement of coupled Josephson phase qubits[J]. *Science*, 2005, 307(5713): 1299-1302.
- 44 S Matsuo, S Ashhab, F Fujii, *et al.*. Generation of macroscopic entangled states in coupled superconducting phase qubits[J]. *J Phys Soc Jpn*, 2007, 76(5): 054802.
- 45 W A Al Saidi, D Stroud. Several small Josephson junctions in a resonant cavity: deviation from the Dicke model[J]. *Phys Rev B*, 2002, 65(22): 224512.
- 46 A Ballesteros, O Civitarese, F J Herranz, *et al.*. Collective and boson mapping description of a system of N Josephson junctions in a resonant cavity[J]. *Phys Rev A*, 2003, 68(21): 214519.
- 47 K Kobayashi, D Stroud. Coherence transition of small Josephson junctions coupled to a single-mode resonant cavity: connection to the

- Dicke model[J]. J Physc, 2009, 469(5-6): 216-224.
- 48 C Z Wang, C X Li, L Y Nie, *et al.*. Classical correlation and quantum discord mediated by cavity in two coupled qubits[J]. J Phys B, 2011, 44(1): 015503.
- 49 G Chen, D F Zhao, Z D Chen. Quantum phase transition for the Dicke model with the dipole - dipole interactions[J]. J Phys B, 2006, 39(14): 3315-3320.
- 50 S V Lawande, B N Jagatap, R R Puri. Laser phase and amplitude fluctuations in the fluorescent Dicke model of interacting atoms[J]. J Phys B, 1985, 18(9): 1711-1733.
- 51 J S Peng, G X Li. Introduction to Modern Quantum Optics[M]. Singapore: World Scientific, 1998.
- 52 Q H Chen, T Liu, Y Y Zhang, *et al.*. Entanglement dynamics of two independent jaynes-cummings atoms without the rotating-wave approximation[J]. Phys Rev A, 2010, 82(5): 052306.
- 53 W K Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits[J]. Phys Rev Lett, 1998, 80(10): 2245-2248.
- 54 Li Fang, Zhou Yaoyao, Meng Xiaojun. Entanglement enhancement of bipartite entangled states through coherent feedback control[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(10): 1027001.
李 芳, 周瑶瑶, 贾晓军. 相干反馈控制实现两组份纠缠态光场纠缠增强[J]. 光学学报, 2014, 34(10): 1027001.
- 55 Guo Zhanying, Zhang Xinhai, Xiao Ruihua, *et al.*. Dynamics of quantum entanglement in a two-qubit XXZ heisenberg system[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(7): 0727001.
郭战营, 张新海, 肖瑞华, 等. 两粒子 XXZ 海森堡系统中的量子纠缠动力学[J]. 光学学报, 2014, 34(7): 0727001.
- 56 Zhai Shuqin, Yang Rui. Three-color and tripartite entangled state from cascaded type I second-harmonic generations[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(4): 0427002.
翟淑琴, 杨 瑞. I类倍频级联过程中的三色三组份纠缠[J]. 光学学报, 2014, 34(4): 0427002.
- 57 C Z Wang, C X Liu, L Y Nie, *et al.*. Classical correlation and quantum discord mediated by cavity in two coupled qubits[J]. J Phys B, 2011, 44(1): 015503.
- 58 Y Q Zhang, T Liu, P Barker. Effects of dipole-dipole interaction on the transmitted spectrum of two-level atoms trapped in an optical cavity[J]. Phys Rev A, 2014, 89(4): 043838.

栏目编辑: 刘丰瑞