

二维PT对称晶格势中的多极光孤子

章臣浩 徐四六

湖北科技学院电子与信息工程学院,湖北 咸宁 437100

摘要 基于改进的平方算符方法和傅里叶配点法,研究了二维宇称-时间(PT)对称的三角-高斯晶格势中二极、三极和四极光孤子的传输特性。结果表明:三极孤子的光场分布随参数变化而变化,不存在稳定的三极孤子;二极、四极孤子的功率随传播常数的增大而增大,随调制深度的增大而减小;孤子稳定性决定于晶格的调制深度和传播系数,对于给定的调制深度,孤子存在一个稳定性范围;当调制深度增加时,二极孤子的稳定性范围先减小后增大,而四极孤子则先呈波浪式增大后减小。

关键词 非线性光学;多极光孤子;改进的平方算符法;宇称-时间对称晶格势

中图分类号 O437

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201536.0219001

Multipole Solitons in Two Dimensions PT-Symmetric Optical Potentials

Zhang Chenhao Xu Siliu

*School of Information and Electronic Engineering, Hubei University of Science and Technology,
Xianning, Hubei 437100, China*

Abstract Based on the modified square-operator method and the Fourier collocation method, the transmission characteristics of dipole, tripole and quadrupole solitons in two dimension parity-time (PT) symmetric triangle-Gaussian potential are studied. The results turn out that the field distribution of tripole solitons changes with altering parameter, and no stable tripole soliton exists. For dipole and quadrupole solitons, the powers increase with the propagation constant and decrease with potential depth. Further, it is found that the stability of solitons is controlled by the potential depth of crystal lattice and the propagation constant. For given potential depth, there exists a stable region. With raising potential depth, the size of stable region decreases firstly and then goes up for dipole solitons; whereas it wave-like increases firstly and then decreases for quadrupole solitons.

Key words nonlinear optics; multipole solitons; modified square-operator method; parity-time symmetric potentials

OCIS codes 190.4370; 190.6135

1 引言

20世纪90年代以来,光束在宇称-时间(PT)对称光学介质中的传输特性激起了人们广泛兴趣,使得在这一方面的研究取得了巨大进步^[1-3]。这一进步归功于物理学各个领域的发展,如量子场论,数学物理学等^[4-7]。PT对称这一概念来源于量子力学,量子力学要求每一个可观察到的物理量光谱都是实光谱,即该物理量一定厄米共轭。然而,本德尔(Bender)等^[8]指出,PT对称的非厄米共轭哈密顿量也能展现出实光谱。当一个哈密顿量的实部关于坐标为偶函数,虚部关于坐标为奇函数时,称这个哈密顿量PT对称。鉴于量子力学和非线性光学之间的关系由薛定谔方程连接,使得在光学中实现PT对称成为可能。

光学系统中空间光孤子的研究一直是热点。空间光孤子^[9-11]是在非线性介质中传输和碰撞时不改变

收稿日期:2015-08-12;收到修改稿日期:2015-09-30

基金项目:国家自然科学基金(61340042)、大学生创新训练项目(201310927059)、湖北省自然科学基金(2013CFC011)

作者简介:章臣浩(1992—),男,学士,主要从事非线性光学方面的研究。E-mail:jadezhang1992@163.com

导师简介:徐四六(1969—),男,博士,副教授,主要从事非线性光学、光通信、量子通信方面的研究。

E-mail:xusiliu1968@163.com (通信联系人)

其波形的局域束缚态光脉冲,其在衍射和非线性平衡时存在。最近,不同类型 **PT** 对称系统中的空间光孤子被报道出来^[12-16],对其研究范围也从单极孤子^[17-18]扩展至多极孤子,譬如 **PT** 对称缺陷波导阵列中的离散多极孤子^[19]、**PT** 对称晶格中的稳定多极孤子^[20]、缺陷多极孤子^[21]等;同时支持多级孤子的晶格势从高斯型^[22]到各种不同类型,如贝塞尔晶格势^[23]、斯卡夫晶格势^[24]等。尽管如此,对 **PT** 对称系统中多极光孤子传输特性的研究仍有待深入,二维 **PT** 对称三角-高斯晶格势中的多极光孤子尚未被报道。

本文建立了一个多极孤子在二维 **PT** 对称三角-高斯晶格势中的传输模型,并利用数值方法进行了研究。结果表明,不同的参数下三极孤子的光场分布不稳定;四极孤子所需的 **PT** 势调制深度临界值大于二极孤子,在一定参数范围内这两种孤子传输稳定。

2 (2+1)维传输模型

在 **PT** 对称的二维非线性介质中,沿 z 轴传播的光束满足归一化的(2+1)维非线性薛定谔方程

$$i\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + T[V(x,y) + iW(x,y)]U + \sigma|U|^2U = 0, \quad (1)$$

式中 U 为无量纲光场包络波, z 轴为光束传播轴,其根据衍射长度 $L = 2k_0n_0a^2$ 进行归一化, k_0 是真空中波数, n_0 是折射率,势能宽度 a 为 **PT** 势实部最大值的 $1/e$ 处的半宽度, x 轴和 y 轴为垂直于传播轴的光束展开方向,其根据 a 进行归一化, $V(x,y)$ 和 $W(x,y)$ 分别为 **PT** 对称晶格势的实部和虚部, T 表示调制深度,其归一化参数为 $1/(2k_0^2n_0a^2)$, σ 为非线性调制系数,可取正值或负值,下面的讨论取 $\sigma=1$,表示自聚焦克尔非线性。**PT** 对称三角-高斯晶格势为

$$V(x,y) = [\cos^2(x) + \cos^2(y)][\exp(-x^2) + \exp(-y^2)], \quad (2a)$$

$$W(x,y) = W_0[\sin(2x) + \sin(2y)][\exp(-x^2) + \exp(-y^2)], \quad (2b)$$

式中 W_0 为 **PT** 势的虚部强度,为了便于讨论,取 **PT** 势的虚部强度 $W_0 = 0.1$ 。**PT** 势的分布如图 1 所示,可见其实部 V 相对于坐标是偶函数,虚部 W 相对于坐标是奇函数。

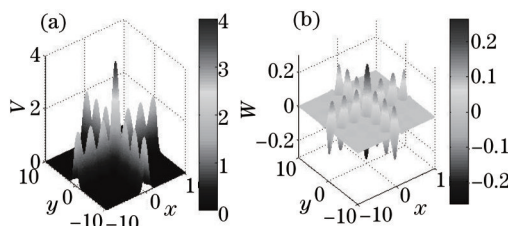


图 1 **PT** 势分布; (a) 偶函数 V ; (b) 奇函数 W

Fig.1 Profiles of **PT** potentials. (a) Even function V ; (b) odd function W

为寻求(1)式的孤子解,假设其解的形式为 $U = f(x,y)\exp(i\mu z)$,其中 μ 为传播常数,孤子模 $f(x,y)$ 满足下列差分方程:

$$\mu f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + T[V(x,y) + iW(x,y)]f + |f|^2 f. \quad (3)$$

采用改进的平方算符方法^[25]对(3)式进行数值求解,得到 **PT** 孤子模。为了研究所得孤子的稳定性,对(1)式采用微扰解:

$$U = \exp(i\mu z) \left\{ f(x,y) + [g(x,y) - h(x,y)]\exp(\lambda z) + [g(x,y) + h(x,y)]\exp(\lambda^* z) \right\}, \quad (4)$$

式中 $g(x,y), h(x,y) \ll f(x,y)$ 为微扰项。将微扰后的 $U(x,y,z)$ 代入(1)式,然后对 $g(x,y)$ 和 $h(x,y)$ 进行线性化,得到它们的本征值方程:

$$\lambda g = -i \left[\frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{d^2 h}{dy^2} - \mu h + TVh - iTWg + 2|f|^2 h - \frac{1}{2}(f^2 - f^{*2})g - \frac{1}{2}(f^2 + f^{*2})h \right], \quad (5a)$$

$$\lambda h = -i \left[\frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{d^2 g}{dy^2} - \mu g + TVg - iTWh + 2|f|^2 g + \frac{1}{2}(f^2 - f^{*2})h + \frac{1}{2}(f^2 + f^{*2})g \right], \quad (5b)$$

此本征值问题可以通过傅里叶配点法进行求解^[26],若本征值的实部为0,则孤子线性稳定,反之,线性不稳定。

3 二极孤子

首先对(3)式进行数值求解得到二极孤子,孤子的功率 $P = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|^2 dx dy$ 。图2(a)为传播常数 μ 与功率 P 之间的关系,实线代表稳定区域,点线代表不稳定区域,可以看到 P 随 μ 的增大而增加。图2(b)为调制深度 T 与 P 之间的关系,可见 P 随 T 的增大而减小。图2(c)为 μ 与微扰因子实部 $\text{Re}(\lambda)$ 之间的关系,当实部为正值时,对应的孤子不稳定。每一个调制深度值对应一个传播常数存在阈值 μ_1 和稳定阈值 μ_2 ,当传播常数 $\mu > \mu_1$ 时孤子存在,而当 $\mu < \mu_2$ 时孤子稳定[图2(a),(c)],则二极孤子的稳定范围 $\delta(\mu) = \mu_2 - \mu_1$ 。图2(d),(e)、(f)分别为 T 与 μ_1 、 μ_2 、 $\delta(\mu)$ 之间的关系。可见二极孤子仅在调制深度 $T \geq 3$ 时存在[图2(d)],且随着 T 的增大, μ_1 和 μ_2 均增加,而稳定范围 $\delta(\mu)$ 先减小后增大,在 $T = 3.6$ 时取最小值。

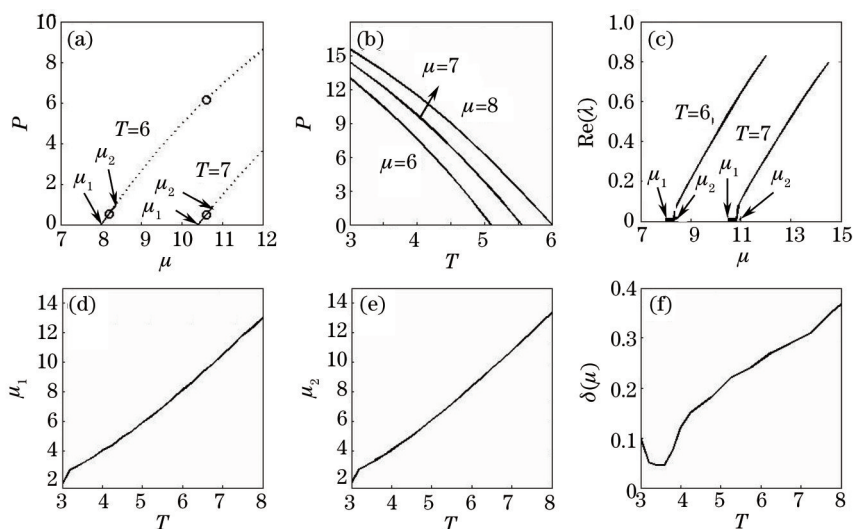


图2 二极孤子。(a) 传播常数 μ 与功率 P 的关系,实线表示稳定区域,点线表示不稳定区域;
(b) 调制深度 T 与 P 的关系; (c) μ 与微扰增长率实部 $\text{Re}(\lambda)$ 的关系; (d) T 与传播常数存在阈值 μ_1 的关系;
(e) T 与传播常数稳定阈值 μ_2 的关系; (f) T 与稳定范围 $\delta(\mu)$ 的关系

Fig.2 Dipole solitons. (a) Power P versus propagation constant μ , solid lines indicate stable region and dotted lines indicate unstable region; (b) P versus potential depth T ; (c) real parts of perturbation growth rate $\text{Re}(\lambda)$ versus μ ;
(d) critical propagation constant of dipole solitons existence μ_1 versus T ; (e) critical propagation constant of dipole solitons stability μ_2 versus T ; (f) size of stable region $\delta(\mu)$ versus T

图3(a)~(c)表示不同传播常数 μ 和调制深度 T 时二极孤子的强度分布图,其分别对应图2(a)功率曲线中所标出的3个点。当 $T = 6$, μ 增加时,图3(a)中孤子的光强小于图3(b);当 $\mu = 10.6$, T 增加时,图3(b)中孤子的光强大于图3(c)。图3(d)~(f)为对应孤子的光场实部分布,3(g)~(i)为虚部分布。可见光场实部关于原点奇对称,而虚部关于原点偶对称。图3(j)~(l)为对应孤子的线性稳定谱,图3(a)、(d)中孤子的线性稳定谱仅包含虚数本征值,因此这两个孤子稳定;而图3(b)中孤子的线性稳定谱包含两对复数和两对实数本征值,故该孤子不稳定。

孤子的稳定性可以解释为,(1)式中非线性项和 PT 势的实部诱导非线性波导使光束会聚,限制了由差分项导致的线性展宽,同时抑制了由 PT 势的虚部产生的能量流动,当所有这些效应平衡时得到孤子解。由于一个二极孤子可看作两个有 π 相位差的单极孤子,它们之间存在着互斥力。因此要得到稳定的二极孤子,较单极孤子而言,其所需 PT 势的调制深度更大。由以上结果可知,二极孤子的稳定性由较大调制深度和较小传播常数控制。

同时本文分析了稳定二极孤子对应的线性模,不考虑非线性项时求解(3)式即可得到对应的线性模。图

4(a)~(c)和图 4(d)~(f)为 $T=6, \mu=8.2$ 和 $T=7, \mu=10.6$ 时孤子对应线性模的强度分布,实部分布和虚部分布,分别对应图 3(a)、(d)、(g)和图 3(c)、(f)、(i)。对照孤子的光场分布,可以看到线性模强度分布的波形与对应孤子相似,但峰值比对应孤子小;虽然线性模的实部分布也关于原点奇对称,但波形与对应孤子相反,且峰值小于对应孤子;与对应孤子不同的是线性模的虚部分布关于原点对称。

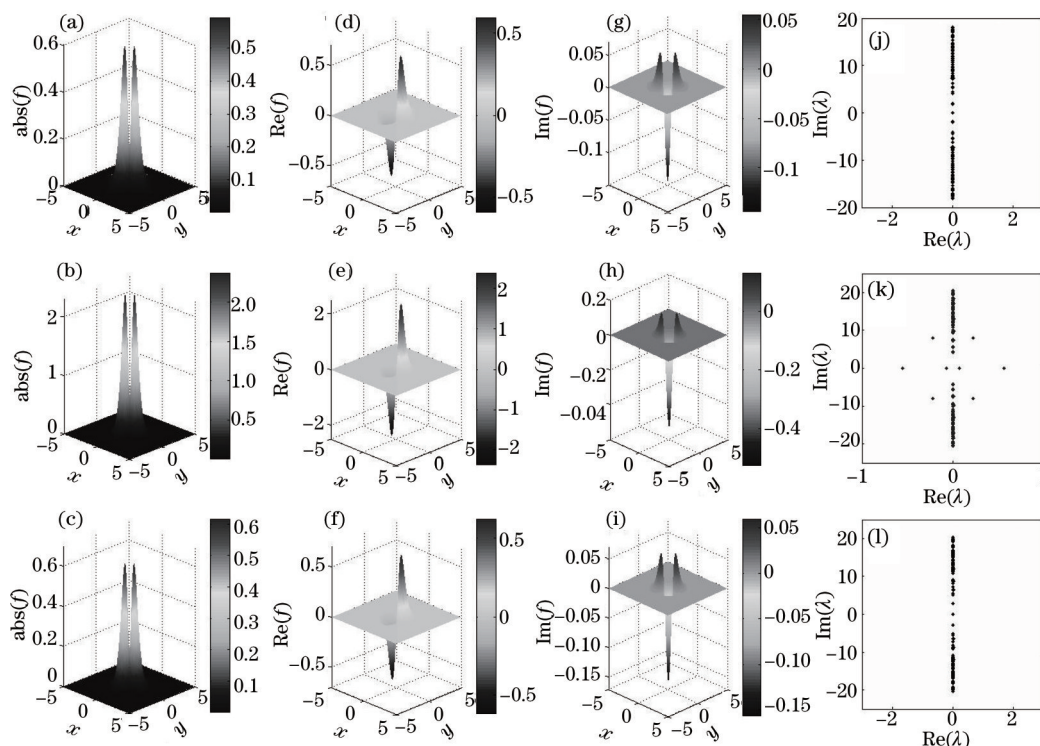


图 3 (a)~(c) 二极孤子强度分布图,参数为(a) $T=6, \mu=8.2$, (b) $T=6, \mu=10.6$, (c) $T=7, \mu=10.6$, 分别对应图 2(a)功率曲线所标出的 3 个点; (d)~(f) 二极孤子光场实部分布; (g)~(i) 二极孤子光场虚部分布; (j)~(l) 二极孤子线性稳定谱

Fig. 3 (a)~(c) Intensity distribution of dipole solitons at (a) $T=6, \mu=8.2$, (b) $T=6, \mu=10.6$, (c) $T=7, \mu=10.6$, which marked 3 points on power curve in Fig. 2(a); (d)~(f) real parts of fields; (g)~(i) imaginary parts of fields; (j)~(l) linear-stability spectra of dipole solitons

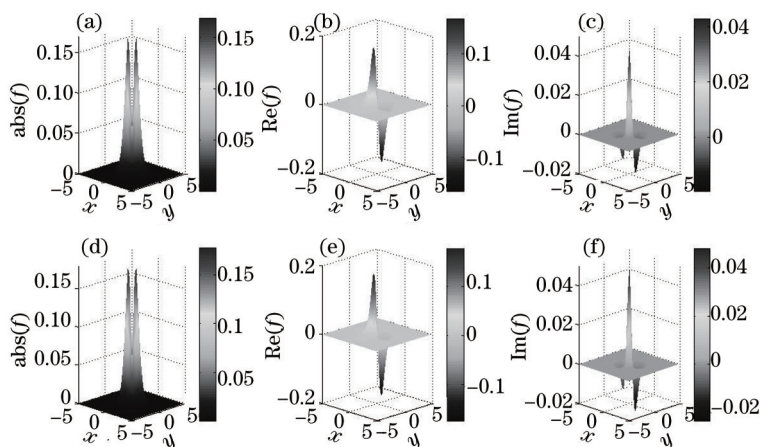


图 4 (a)~(c) 二极孤子对应的线性模,参数为 $T=6, \mu=8.2$, 分别对应图 3(a)、(d)、(g); (d)~(f) 二极孤子对应的线性模,参数为 $T=7, \mu=10.6$, 分别对应图 3(c)、(f)、(i)

Fig.4 (a)~(c) Linear mode corresponding to dipole soliton in Fig.3(a),(d),(g) at $T=6, \mu=8.2$; (d)~(f) linear mode corresponding to dipole soliton in Fig.3(c),(f),(i) at $T=7, \mu=10.6$

4 三极和四极孤子

接下来改变输入光,数值求解(3)式,得到三极孤子。图 5(a)~(c)表示同一调制深度下,不同传播常数时三极孤子的强度分布图。当 $T=8$ 时,由图 5(a)~(c)可知随着 μ 的增加,孤子光强逐渐增大,中间的峰值增速小于两侧,但在变化过程中两侧峰值始终保持对称且相同。可见三极孤子的波形随 μ 的变化而变化,故三极孤子的光场分布不稳定。图 5(d)~(f)为孤子的实部分布,(g)~(i)为虚部分布。与二极孤子相反,三极孤子的光场实部关于原点偶对称,而虚部关于原点奇对称。图 5(j)~(l)为对应孤子的线性稳定谱,可以看到孤子[图 5(a)~(c)]均不稳定。当进一步改变参数时,也不能得到稳定的三极孤子。

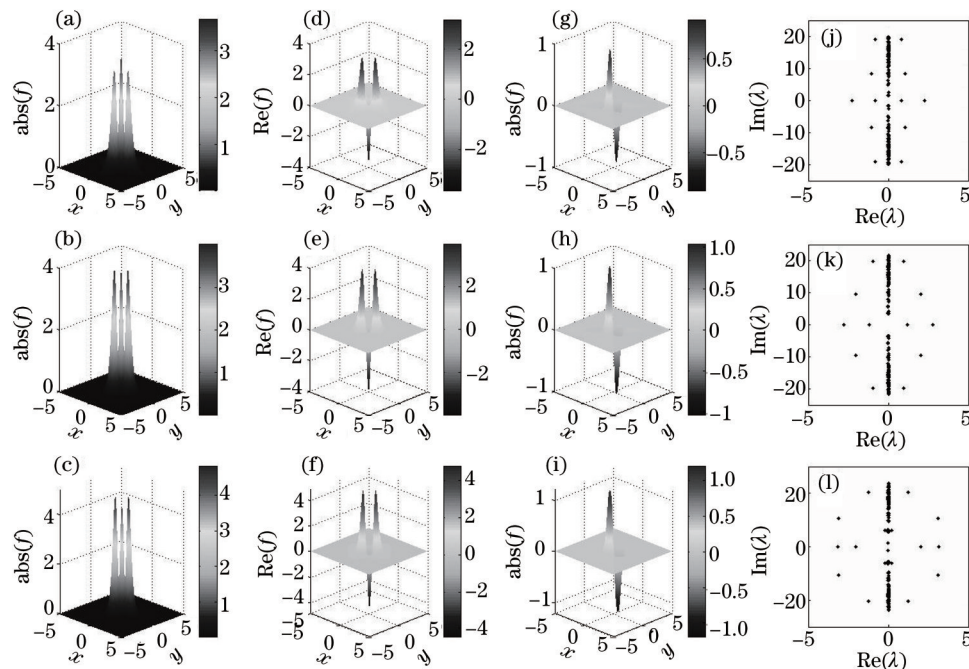


图 5 (a)~(c) 三极孤子强度分布图,参数为(a) $T=8, \mu=11$, (b) $T=8, \mu=12.8$, (c) $T=8, \mu=15$; (d)~(f) 三极孤子光场实部分布; (g)~(i) 三极孤子光场虚部分布; (j)~(l) 三极孤子线性稳定谱

Fig.5 (a)~(c) Intensity distribution of tripole solitons at (a) $T=8, \mu=11$, (b) $T=8, \mu=12.8$, (c) $T=8, \mu=15$; (d)~(f) real parts of fields; (g)~(i) imaginary parts of fields; (j)~(l) linear-stability spectra of tripole solitons

输入一束与四极孤子光场分布相似的初始光,数值求解(3)式以得到四极孤子。由图 6(a)可知四极孤子的功率 P 随传播常数 μ 的增大而增加;相较于二极孤子,为得到稳定的四极孤子需要较大的 T 值和较小的 μ 值。由图 6(b)可见 P 随 T 的增大而减小,每一个 μ 值对应一段 T 值区域,在此区域内四极孤子存在,且区域大小随着 μ 的增加而增大。图 6(c)为 μ 与微扰因子实部 $Re(\lambda)$ 之间的关系,当 $T=10$ 时,稳定范围为 $8.8 < \mu < 9.8$; 当 $T=11$ 时,稳定范围为 $10.9 < \mu < 11.7$ 。由图 6(d)可知,四极孤子仅在调制深度 $T \geq 4$ 时存在,其临界值大于二极孤子 ($T \geq 3$)。究其原因为一个四极孤子可看作两个有 π 相位差的二极孤子(见图 7),其间的固有互斥力大于二极孤子,因此要得到稳定的四极孤子,较二极孤子而言,其需要的 PT 势更大。由图 6(d),(e)可见,传播常数存在阈值 μ_1 和稳定阈值 μ_2 , 它们均随 T 的增大而增大,由图 6(f)可知,四极孤子的稳定范围 $\delta(\mu)$ 先呈波浪式增大后减小,在 $T=8.5$ 时稳定范围最大。

图 7(a)~(c)表示不同传播常数 μ 和调制深度 T 时四极孤子的强度分布图,其对应于图 6(a)功率曲线中所标出的 3 个点。当 $T=10$, μ 增加时,图 7(a)中孤子的光强小于图 7(b); 当 $\mu=11.4$, T 增加时,图 7(b)中孤子的光强大于图 7(c)。图 7(d)~(f)为对应四极孤子的光场实部分布,(g)~(i)为虚部分布。可见四极孤子的光场实部关于原点偶对称且关于 x 轴或 y 轴奇对称,这与二极和三极孤子都不同;虚部关于原点奇对称,与三极孤子相似。图 7(j)~(l)为对应孤子的线性稳定谱。可见图 7(a)和(c)中孤子稳定,而图 7(b)中孤子不稳定。

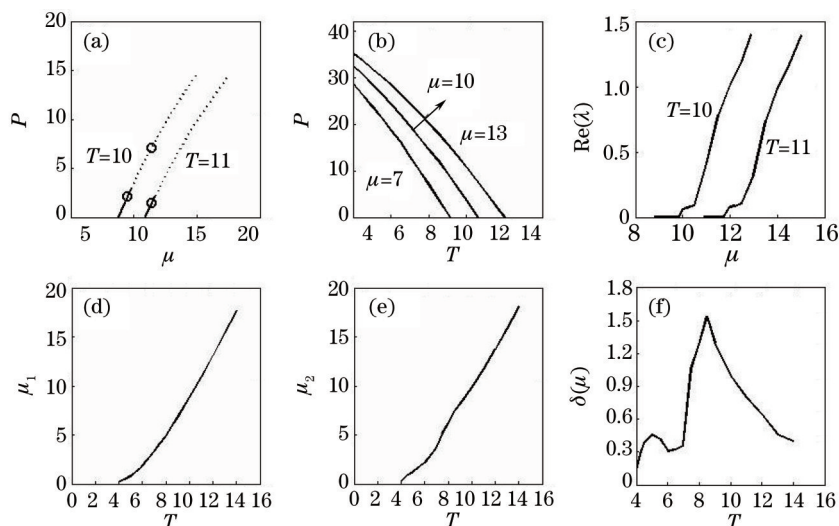


图 6 四级孤子。(a) 传播常数 μ 与功率 P 的关系, 实线表示稳定区域, 点线表示不稳定区域; (b) 调制深度 T 与 P 的关系; (c) μ 与微扰增长率实部 $\text{Re}(\lambda)$ 的关系; (d) T 与传播常数存在阈值 μ_1 的关系; (e) T 与传播常数稳定阈值 μ_2 的关系; (f) T 与稳定范围 $\delta(\mu)$ 的关系

Fig.6 Quadrupole solitons. (a) Power P versus propagation constant μ , solid lines indicate stable region and dotted lines indicate unstable region; (b) P versus potential depth T ; (c) real parts of perturbation growth rate $\text{Re}(\lambda)$ versus μ ; (d) critical propagation constant of quadrupole solitons existence μ_1 versus T ; (e) critical propagation constant of quadrupole solitons stability μ_2 versus T ; (f) size of stable region $\delta(\mu)$ versus T

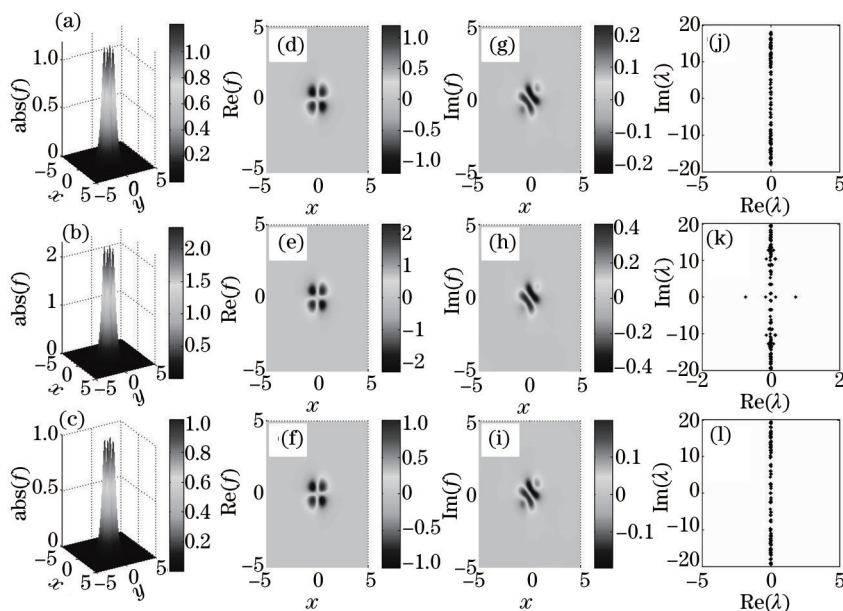


图 7 (a)~(c) 四极孤子强度分布图, 参数为(a) $T=10, \mu=9.5$, (b) $T=10, \mu=11.4$, (c) $T=11, \mu=11.4$, 分别为图 6(a)功率曲线中所标出的 3 个点; (d)~(f) 四极孤子光场实部分布; (g)~(i) 四极孤子光场虚部分布; (j)~(l) 四极孤子线性稳定谱

Fig.7 (a)~(c) Intensity distribution of quadrupole solitons at (a) $T=10, \mu=9.5$, (b) $T=10, \mu=11.4$, (c) $T=11, \mu=11.4$, which marked 3 points on power curve in Fig.6(a); (d)~(f) real parts of fields; (g)~(i) imaginary parts of fields; (j)~(l) linear-stability spectra of quadrupole solitons

图 8(a)~(c)和图 8(d)~(f)为 $T=10, \mu=9.5$ 和 $T=11, \mu=11.4$ 时四极孤子对应线性模的强度分布, 实部分布和虚部分布, 分别对应图 7(a)、(d)、(g)和图 7(c)、(f)、(i)。线性模场分布与孤子场分布的对比有以下 3 方面的特性: 1) 线性模强度分布的波形与对应孤子相似, 但峰值比对应孤子小; 2) 线性模的实部关于原点奇对称, 同时关于 x 轴和 y 轴偶对称, 但波形与孤子相反, 同时峰值也小于对应孤子; 3) 线性模的虚部关于原点奇对称, 波形与对应孤子相反, 同时峰值较孤子小。

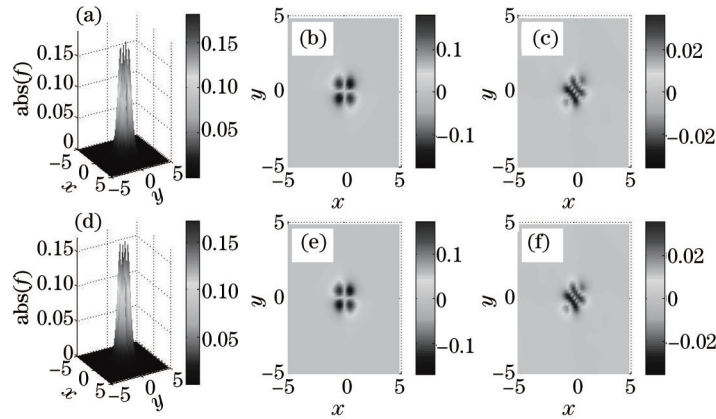


图 8 (a)~(c) 四极孤子对应的线性模, 参数为 $T=10, \mu=9.5$, 分别对应图 7(a) 、(d) 、(g);(d)~(f) 四极孤子对应的线性模, 参数为 $T=11, \mu=11.4$, 分别对应图 7(c) 、(f) 、(i)

Fig.8 (a)~(c) Linear mode corresponding to quadrupole soliton in Fig. 7(a), (d), (g) at $T=10, \mu=9.5$;
(d)~(f) linear mode corresponding to quadrupole soliton in Fig. 7(c), (f), (i) at $T=11, \mu=11.4$

5 数值模拟

为了验证孤子的稳定性, 利用分步傅里叶算法^[26]对光束的传播特性进行数值模拟。假设输入光束为 $U(x, y, z=0)=f(x, y)[1 + \varepsilon\eta(x, y)]$, 其中 $\eta(x, y)$ 为值在 0~1 之间的随机函数, $\varepsilon = 10\%$, 为微扰常数。图 9(a)~(c) 和图 9(d)~(f) 分别为图 3(a)~(c) 中的二极孤子和图 7(a)~(c) 中的四极孤子在 $z=200$ 时的输出图像。由图 9(b) 和 (e) 可见经过较长距离的传输后图 3(b) 中的二极孤子和图 7(b) 中的四极孤子发生能量流动, 波形产生形变, 因此这两个孤子不稳定; 图 3(a)、(c)、图 7(a)、(c) 中的孤子维持其原有的波形, 因此稳定, 从而证实了以上的稳定性分析。孤子的稳定性在物理上解释为稳定的孤子在传输过程中与噪声没有能量交换, 噪声干扰不影响其稳定传输; 不稳定的孤子与噪声进行能量交换, 波形产生形变, 从而传输不稳定。

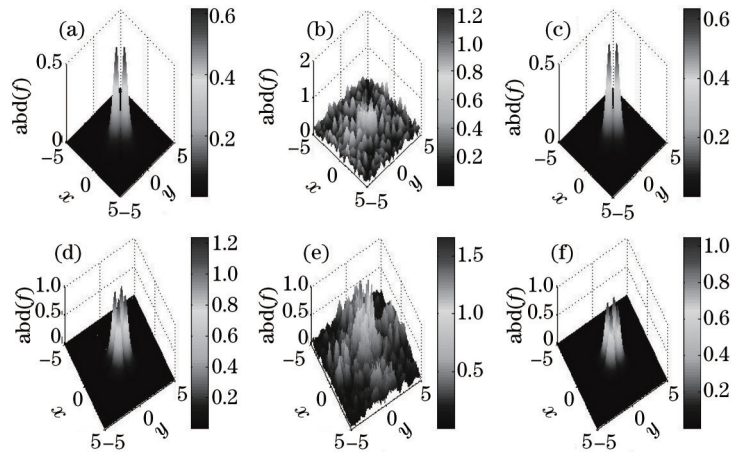


图 9 (a)~(c) 分别为图 3(a)~(c) 中的二极孤子在 $z=200$ 的输出; (d)~(f) 分别为图 7(a)~(c) 中的四极孤子在 $z=200$ 的输出

Fig.9 (a)~(c) Output of dipole solitons in Fig. 3(a)~(c) at $z=200$, respectively;
(d)~(f) output of quadrupole solitons in Fig. 7(a)~(c) at $z=200$, respectively

6 结 论

研究了 PT 对称的三角-高斯晶格势中二极、三极和四极孤子的传输特性。发现对于不同的参数, 三极孤子的光场分布是不稳定的; 在特定参数下二极和四极孤子是稳定的。特别地, 要得到稳定的孤子, 四极孤子所需的 PT 势调制深度临界值大于二极孤子; 进一步发现, 随着调制深度的增加, 二极孤子的稳定性范围先减小, 后增大, 而四极孤子先呈波浪式增大后减小。

- 1 Musslimani Z H, Makris K G, El-Ganainy R, *et al.*. Optical solitons in PT periodic potentials[J]. Phys Rev Lett, 2008, 100(3): 030402.
- 2 Nixon S, Ge L J, Yang J K. Stability analysis for solitons in PT-symmetric optical lattices[J]. Phys Rev A, 2012, 85(2): 023822.
- 3 Dai C Q, Wang X G, Zhou G Q. Stable light-bullet solutions in the harmonic and parity-time-symmetric potentials[J]. Phys Rev A, 2014, 89(1): 013834.
- 4 Bender C M, Boettcher S. Comment on 'Numerical estimates of the spectrum for anharmonic PT symmetric potentials'[J]. Phys Scr, 2013, 87(4): 017001.
- 5 Ahmed Z. Reciprocity and unitarity in scattering from a non-Hermitian complex PT-symmetric potential[J]. Phys Rev A, 2013, 87(13): 957-959.
- 6 Luo Xiaobing, Huang Jiahao, Zhong Honghua, *et al.*. Pseudo parity-time symmetry in optical systems[J]. Phys Rev Lett, 2013, 110(24): 243902.
- 7 Yang Jianke. Partially-PT-symmetric optical potentials with all-real spectra and soliton families in multi-dimensions[J]. Opt Lett, 2014, 39(5): 1133-1136.
- 8 Bender Carl M, Boettcher S. Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT-symmetry[J]. Phys Rev Lett, 1998, 80(24): 5243-5246.
- 9 Chiao R Y, Garmire E, Townes C H. Self-trapping of optical beams[J]. Phys Rev Lett, 1964, 13(15): 479-482.
- 10 Kivshar Y S, Agrawal G P. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals[M]. San Diego: Academic, 2003: 3-5.
- 11 Du Yingjie, Yang Zhanying, Xie Xiaotao, *et al.*. Influence of higher nonlinearity to optical solitons in electromagnetically induced transparency medium[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(2): 0227002.
杜英杰, 杨战营, 谢小涛, 等. 电磁感应透明的高阶非线性效应对光孤子的影响[J]. 光学学报, 2015, 35(2): 0227002.
- 12 Dai Chaoqing, Wang Yueyue. A bright 2D spatial soliton in inhomogeneous Kerr media with PT-symmetric potentials[J]. Laser Phys, 2014, 24(3): 035401.
- 13 Achilleos V, Kevrekidis P G, Frantzeskakis D J, *et al.*. Dark solitons and vortices in PT-symmetric nonlinear media: From spontaneous symmetry breaking to nonlinear PT phase transitions[J]. Phys Rev A, 2012, 86(1): 013808.
- 14 Li H, Shi Z, Jiang X, *et al.*. Gray solitons in parity-time symmetric potentials[J]. Opt Lett, 2011, 36(16): 3290-3292.
- 15 Ge Lijuan, Shen Ming, Ma Chunlan, *et al.*. Gap solitons in PT-symmetric optical lattices with higher-order diffraction[J]. Opt Express, 2014, 22(24): 29435-29444.
- 16 Zhou Bozhen, Hua Chunbo, Xu Siliu, *et al.*. Optical vertex soliton in parity-time symmetric potentials[J]. Chinese J Lasers, 2015, 42(5): 0505004.
周博臻, 花春波, 徐四六, 等. PT对称晶格势中涡旋光孤子[J]. 中国激光, 2015, 42(5): 0505004.
- 17 Bludov Yuli V, Hang Chao, Huang Guoxiang, *et al.*. PT-symmetric coupler with a coupling defect: Soliton interaction with exceptional point[J]. Opt Lett, 2014, 39(12): 3382-3385.
- 18 Gupta S K, Sarma A K. Solitary waves in parity-time (PT)-symmetric Bragg grating structure and the existence of optical rogue waves [J]. Europhys Lett, 2014, 105(4): 44001.
- 19 Zhang Xiangyu, Chai Jinglei, Huang Jiasheng, *et al.*. Discrete solitons and scattering of lattice waves in guiding arrays with a nonlinear PT-symmetric defect[J]. Opt Express, 2014, 22(11): 13927-13939.
- 20 Fatkhulla K Abdullaev, Yaroslav V Kartashov, Vladimir V Konotop, *et al.*. Solitons in PT-symmetric nonlinear lattices[J]. Phys Rev A, 2011, 83(4): 041805.
- 21 Hu Sumei, Hu Wei. Defect solitons in parity-time symmetric optical lattices with self-defocusing nonlinearity[J]. Opt Commun, 2013, 294: 311-324.
- 22 Hu Sumei, Ma Xuekai, Lu Daquan, *et al.*. Solitons supported by complex PT-symmetric Gaussian potentials[J]. Phys Rev A, 2011, 84(4): 03818.
- 23 Hu Sumei, Hu Wei. Optical solitons in the parity-time symmetric Bessel complex potential[J]. J Phys B: At Mol Opt Phys, 2012, 45(22): 225401-225407.
- 24 Chen H, Hu S, Qi L. The optical solitons in the Scarff parity-time symmetric potentials[J]. Opt Commun, 2014, 331: 139-147.
- 25 Yang J K, Lakoba Taras I. Universally-convergent squared-operator iteration methods for solitary waves in general nonlinear wave equations[J]. Stud Appl Math, 2007, 118 (2): 153-197.
- 26 Yang J K. Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems[M]. Philadelphia: SIAM, 2010: 390-397.