

经典场辅助下的三原子量子纠缠动力学

杨秀丽 孙 童 张 博 张军鹏 张英杰

曲阜师范大学山东省激光偏光与信息技术重点实验室, 山东 曲阜 273165

摘要 在腔量子电动力学模型中引入经典场驱动原子,通过设置原子-腔场的频率失谐量与经典场驱动强度的关系,实现有效 Jaynes-Cummings 模型到反 Jaynes-Cummings 模型的转化,从而达到控制系统动力学过程的目的。分别讨论了三原子 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ)型和 W 型纠缠态在不同原子-腔场有效相互作用模型下的纠缠动力学行为。结果发现,在经典场驱动下,三原子纠缠在动力学过程中可以实现从存在纠缠死亡现象到无纠缠死亡现象的转化,从而抑制纠缠突然死亡现象的发生。探究了泄漏腔情形下三原子 GHZ 型和 W 型纠缠态在演化过程中的纠缠稳健性,得到了三原子 GHZ 型和 W 型纠缠态在动力学过程中纠缠稳健性最强的有效原子-腔场相互作用模型。

关键词 量子光学; 纠缠态; Jaynes-Cummings 模型; 反 Jaynes-Cummings 模型

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201636.1227001

Classical-Field-Assisted Three-Atom Quantum Entanglement Dynamics

Yang Xiuli Sun Tong Zhang Bo Zhang Junpeng Zhang Yingjie

Shandong Provincial Key Laboratory of Laser Polarization and Information Technology,

Qufu Normal University, Qufu, Shandong 273165, China

Abstract The atoms are driven by classical field introduced in the cavity quantum electro-dynamic model. By setting the relationship between frequency detuning of atom-cavity field and classical field driven strength, the transformation from the effectively Jaynes-Cummings model to the anti-Jaynes-Cummings model is achieved. The dynamic process of the whole system can be controlled. The entanglement dynamic behaviors of three-atom Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ)-type and W-type entanglement states in different effective atom-cavity field interaction models are discussed. The results show that the three-atom entanglement state in dynamic process can change from entanglement-sudden-death to no-entanglement-sudden-death with the assisting of classical field, so the phenomenon of entanglement-sudden-death can be inhibited. The entanglement robustness of the three-atom GHZ-type and W-type entanglement states in dissipative cavity is explored in the evolutionary process. The effective atom-cavity interaction model of the three-atom GHZ-type and W-type entanglement states are obtained in dynamic process in which the strongest robustness can be acquired.

Key words quantum optics; entanglement state; Jaynes-Cummings model; anti-Jaynes-Cummings model

OCIS codes 270.5565; 270.5585

1 引 言

量子纠缠态作为量子信息处理和量子计算过程的核心资源,可用来实现一些经典手段无法实现的量子任务^[1-3]。在完成实际量子任务时,量子系统会不可避免地与环境发生耦合,引起单个子系统的退相干,从而破坏整个系统的量子纠缠^[4-5]。研究发现,初始处于纠缠的二能级系统与真空场相互作用时,量子系统间的纠缠在有限时间内消失,这个现象被称为纠缠突然死亡^[6-11],该现象已在实验上得到证

收稿日期: 2016-06-12; **收到修改稿日期:** 2016-07-15

基金项目: 国家自然科学基金(11304179,11247240)、国家级大学生创新创业训练计划(201510446072)、教育部高校博士点基金(20133705110001,20123705120002)

作者简介: 杨秀丽(1994—),女,本科生,主要从事量子力学方面的研究。E-mail: 15564716328@163.com

导师简介: 张英杰(1983—),男,博士,副教授,主要从事量子光学与量子信息方面的研究。

E-mail: yingjiezhang@qfnu.edu.cn(通信联系人)

实^[12-14]。一个二能级原子与单模腔场的相互作用模型称为 Jaynes-Cummings (JC) 模型^[15]。JC 模型在腔量子电动力学(QED)领域占有重要地位,目前已经出现了多原子、多模式以及经典场驱动等 JC 模型的扩展模型。

近年来,基于腔 QED 理论的原子与腔场的 JC 模型,研究者们对原子系统纠缠动力学行为进行了较多的研究。Yönac 等^[9]通过分析双 JC 模型中系统纠缠动力学行为,发现两原子间纠缠突然死亡现象的发生与否取决于两原子的初始纠缠。Zhang 等^[16]研究了两个受强经典场驱动的二能级原子的纠缠动力学行为,分析了原子与腔场的耦合参数和频率失谐量对原子间纠缠的影响,得到原子间纠缠发生突然死亡现象的条件。对于三 JC 模型,Feng 等^[17]研究了三个纠缠的非局域二能级原子分别与各自的腔场发生 JC 模型相互作用的纠缠动力学,发现三原子的初始纠缠可以完全转移为三腔场的光子纠缠,即伴随原子间纠缠突然死亡现象,腔场间光子纠缠突然产生。上述研究主要针对腔 QED 理论中原子-腔场 JC 模型的相互作用,分析了原子间纠缠动力学行为。对原子施加经典场驱动后,在合适的物理参数下,原子-腔场的相互作用可以实现由有效 JC 模型到反 Jaynes-Cummings (AJC)模型的转化。因此,整个系统的动力学过程可以通过原子辅助经典场进行调控。

基于上述想法,本文研究初始处于三原子 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ)型和 W 型纠缠态原子系统的纠缠动力学行为,并利用多体真正共生和共生下限的多体纠缠度量方法分析三原子 GHZ 型和 W 型纠缠态的纠缠度。通过设置原子-腔场频率失谐量与经典场驱动强度的关系,得到不同局域原子-腔场有效相互作用模型;整个系统在这些不同有效相互作用模型的演化下,可以控制三原子 GHZ 型和 W 型纠缠态的纠缠突然死亡现象的发生,从而得到可抑制三原子纠缠态突然死亡的原子-腔场有效相互作用模型。鉴于无光子能量耗散的完美闭合腔场在实验中较难实现,本文分析了经典场辅助下泄漏腔中三原子 GHZ 型和 W 型纠缠态在动力学过程中的稳健性。若初始三原子处于 GHZ 型纠缠态,通过调节经典场驱动强度和原子-腔场的频率失谐量的关系,整个系统按 JC+AJC+JC 模型/AJC+JC+AJC 模型演化,抑制了纠缠突然死亡现象的发生,此时初始原子间三原子纠缠的稳健性最强。在有效的三 JC 模型下,初始 W 型纠缠态在动力学过程中的纠缠稳健性最强。可见,通过对原子加以经典场驱动,并调节原子-腔场的频率失谐量与经典场驱动强度的关系,可以提升三原子 GHZ 型和 W 型纠缠态在动力学过程中的纠缠稳健性。

2 理论模型

三个跃迁频率为 ω_0 的二能级原子 A、B、C 分别被各自的经典场(频率为 ω_L)驱动并分别与三个单模腔场(a、b、c)作用的模型如图 1 所示。初始纠缠的三个二能级原子分别放置在三个单模腔场中,并受到经典场的驱动,频率为 ω_L ,驱动场强度为 Ω 。由于各原子与相应腔场间的作用彼此相互独立,互不影响,故只需要分析经典场驱动下单个原子与单模腔场的哈密顿量($\hbar = 1$),即

$$H = \omega_0 \sigma^+ \sigma + \omega a^+ a + \Omega [\exp(-i\omega_L t) \sigma^+ + \exp(i\omega_L t) \sigma] + g(\sigma^+ a + \sigma a^+), \quad (1)$$

式中 σ^+ 、 σ 分别为原子的上升和下降算符, $\sigma^+ = |e\rangle\langle g|$, $\sigma = |g\rangle\langle e|$; a 、 a^+ 分别为单模腔场的湮灭和产生算符; ω 为单模腔场的模式频率,原子 A、B、C 的模式频率 ω_a 、 ω_b 、 ω_c 与 ω 相等,即 $\omega_a = \omega_b = \omega_c = \omega$; g 为原子与腔场耦合的强度。在么正旋转操作 U_R ($U_R = \exp[-i\omega_L(\sigma^+ \sigma + a^+ a)]$), (1) 式可转化为

$$H_L = \Delta \sigma^+ \sigma + \delta a^+ a + \Omega(\sigma^+ + \sigma) + g(\sigma^+ a + \sigma a^+), \quad (2)$$

式中 $\Delta = \omega_0 - \omega_L$, $\delta = \omega - \omega_L$ 。为简单起见,设原子跃迁频率与经典场频率相等,即 $\Delta = 0$; 定义 $H_L = H_{L,0} + H_{L,int}$, 其中 $H_{L,0}$ 为自由哈密顿量, $H_{L,0} = \delta a^+ a + \Omega(\sigma^+ + \sigma)$; $H_{L,int}$ 为相互作用的哈密顿量, $H_{L,int} = g(\sigma^+ a + \sigma a^+)$ 。

在相互作用绘景下哈密顿量 H_L 可表示为

$$H_L = \frac{g}{2} [|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| + \exp(2i\Omega t) |+\rangle\langle -| - \exp(-2i\Omega t) |-\rangle\langle +|] a \exp(-i\delta t) + \text{H.c.}, \quad (3)$$

式中缀饰态 $|+\rangle$ 、 $|-\rangle$ ($|\pm\rangle = |g\rangle \pm |e\rangle / \sqrt{2}$) 分别为 σ_x ($\sigma_x = \sigma^+ + \sigma$) 的本征态,本征值为 ± 1 。考虑到原子

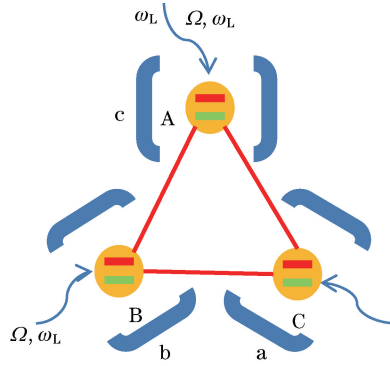


图 1 经典场驱动下的三原子纠缠动力学研究模型

Fig. 1 Research model of three-atom entanglement dynamics with classical field driving

与单模腔场的频率失谐量 $\delta = \pm 2\Omega$, 满足大失谐条件 $|\delta| \gg g$, 可以消除高频振荡项^[18], 因此(3)式可转化为有效哈密顿量, 其表达式分别为

$$H_{JC}^{(+)} = \frac{g}{2} (|+\rangle\langle -| a + |-\rangle\langle +| a^\dagger), \quad (4)$$

$$H_{AJC}^{(-)} = \frac{g}{2} (|-\rangle\langle +| a + |+\rangle\langle -| a^\dagger). \quad (5)$$

在腔 QED 理论中, 原子与腔场间相互作用的 JC 模型在原子基态空间 $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ 内不考虑能量不守恒的相互作用项 $\sigma^+ a^\dagger$ 和 σa , 仅考虑能量守恒的相互作用项 $\sigma^+ a$ 和 σa^\dagger , 原子与腔场间相互作用的 AJC 模型不易实现。对原子施加经典场驱动后, 在原子缀饰态基态空间 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 内可以有效实现原子与腔场间相互作用的 JC 模型和 AJC 模型。当设置原子-腔场的频率失谐量 δ 与经典场驱动强度 Ω 满足 $\delta = 2\Omega$ 时, 原子与单模腔场间相互作用遵循有效 JC 模型[(4)式]; 满足 $\delta = -2\Omega$ 时, 原子与腔场间相互作用遵循有效 AJC 模型[(5)式]。

可见, 在原子与单模腔场遵循有效 JC 模型的演化过程中, 原子与腔场状态 $|-\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc}$ 不随时间演化, 而状态 $|+\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc}$ 会随时间发生变化, 求解薛定谔方程可得

$$|+\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc} \rightarrow \cos(gt/2) |+\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc} - i\sin(gt/2) |-\rangle|1\rangle_{Aa/Bb/Cc}. \quad (6)$$

在原子与单模腔场遵循有效 AJC 模型的演化过程中, 原子与腔场状态 $|+\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc}$ 不随时间演化, 而状态 $|-\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc}$ 会随时间发生变化, 同样由薛定谔方程可得

$$|-\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc} \rightarrow \cos(gt/2) |-\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc} - i\sin(gt/2) |+\rangle|1\rangle_{Aa/Bb/Cc}. \quad (7)$$

根据上述原子与腔场间状态在不同有效哈密顿量下的动力学演化行为, 研究经典场驱动下原子间三原子纠缠态的动力学特性。之前的工作仅研究了原子与腔场间相互作用的哈密顿量都为 JC 模型时的三原子纠缠动力学行为, 未对原子施加任何操作。本文对三个原子分别进行经典场驱动, 设置物理参数可获得有效的 JC 模型和 AJC 模型。通过改变局域原子-腔场 Aa、Bb、Cc 间不同的有效相互作用哈密顿量, 可以在三 JC 模型、三 AJC 模型、单 JC 模型结合双 AJC 模型、单 AJC 模型结合双 JC 模型下研究三原子纠缠态动力学行为, 重点研究如何抑制三原子纠缠态在演化过程中的纠缠突然死亡现象。

3 数值计算与理论分析

主要考虑三纠缠原子初始处于 GHZ 态 $\cos \theta |+++ \rangle_{ABC} + \sin \theta |-- - \rangle_{ABC}$ 和 W 态 $\cos \theta \cos \varphi |+- - \rangle_{ABC} + \cos \theta \sin \varphi |-+- \rangle_{ABC} + \sin \theta |-- + \rangle_{ABC}$, 三个单模真空腔场为 $|000 \rangle_{abc}$, 这里 $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$ 。

3.1 三原子 GHZ 态在经典场驱动下的纠缠动力学行为

初始三原子 GHZ 态在演化过程中, 描述三原子的约化密度矩阵 $\rho_{ABC}(t)$ 始终为 X 型矩阵, 其表达式为

$$\rho_{ABC}(t) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & z_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4^* & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3^* & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & z_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ z_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

针对三原子约化密度矩阵的 X 型状态[满足 $|z_i| \leq a_i b_i, \sum_{i=1}^4 (a_i + b_i) = 1$], 采用真正多体共生^[19]的方法来度量。对于由密度矩阵 $\rho_{ABC}(t)$ 表示的三原子量子系统状态, 纠缠度 C_{ABC} 可定义为

$$C_{ABC} = 2\max\{0, |z_i| - \omega_i\}, \quad (9)$$

式中 $\omega_i = \sum_{j \neq i}^n \sqrt{a_j b_j}, i=1, 2, 3, 4$ 。纠缠度 C_{ABC} 从 0 到 1 变化, 当 $C_{ABC} = 0$ 时, 三原子完全分离; 当 $C_{ABC} = 1$ 时, 三原子纠缠处于最大; 当 $0 < C_{ABC} < 1$ 时, 三原子处于部分纠缠。

讨论三个受经典场驱动的二能级原子初始处于 GHZ 态时, 在不同原子与腔场的有效相互作用模型下的纠缠动力学行为。在局域原子-腔场 Aa、Bb、Cc 的相互作用下, 当原子-腔场的频率失谐量和经典驱动场强度满足 $\delta = 2\Omega$, 即整个系统状态在三 JC 模型下进行演化。当各个局域的原子与经典场驱动强度满足 $\delta = -2\Omega$, 整个系统状态在三 AJC 模型下进行演化。若其中一个原子与其经典场驱动强度满足 $\delta = -2\Omega$, 另外两个原子与各自的经典场驱动强度满足 $\delta = 2\Omega$, 则整个系统在单 AJC 模型结合两个 JC 模型下进行演化。若其中一个原子与其经典场驱动强度满足 $\delta = 2\Omega$, 另外两个原子与各自的经典场驱动强度满足 $\delta = -2\Omega$, 则整个系统在单 JC 模型结合两个 AJC 模型下进行演化。因此, 在不同原子与各自腔场的有效相互作用模型下, 根据(6)、(7)式可以精确得到三个原子在演化过程中的约化密度矩阵, 并根据真正多体共生的方法度量三原子纠缠。不同情形下原子间三原子纠缠的表达式不同。

模型 a: 三 JC 模型, 在三个局域原子-腔场 Aa、Bb、Cc 中满足 $\delta = 2\Omega$, 原子间三原子纠缠的表达式为

$$C_{ABC} = 2\max\{0, |\cos \theta \sin \theta \cos^3(gt/2) - \sqrt{3} |\cos^2 \theta \cos^3(gt/2) \sin^3(gt/2)|\}. \quad (10)$$

模型 b: 三 AJC 模型, 在三个局域原子-腔场 Aa、Bb、Cc 中满足 $\delta = -2\Omega$, 原子间三原子纠缠表达式为

$$C_{ABC} = 2\max\{0, |\cos \theta \sin \theta \cos^3(gt/2) - \sqrt{3} |\sin^2 \theta \cos^3(gt/2) \sin^3(gt/2)|\}. \quad (11)$$

模型 c: 对于 JC+AJC+JC 模型, 在局域原子-腔场 Aa、Cc 中满足 $\delta = 2\Omega$, 在局域原子-腔场 Bb 中满足 $\delta = -2\Omega$; 对于 AJC+JC+AJC 模型, 在局域原子-腔场 Aa、Cc 中满足 $\delta = -2\Omega$, 在局域原子-腔场 Bb 中满足 $\delta = 2\Omega$; 原子间三原子纠缠表达式为

$$C_{ABC} = 2\max\{0, |\cos \theta \sin \theta \cos^3(gt/2)|\}. \quad (12)$$

模型 d: 对于 JC+JC+AJC 模型, 在局域原子-腔场 Aa、Bb 中满足 $\delta = 2\Omega$, 在局域原子-腔场 Cc 中满足 $\delta = -2\Omega$; 对于 AJC+JC+JC 模型, 在局域原子-腔场 Aa 中满足 $\delta = -2\Omega$, 在局域原子-腔场 Bb、Cc 中满足 $\delta = 2\Omega$; 原子间三原子纠缠表达式为

$$C_{ABC} = 2\max\{0, |\cos \theta \sin \theta \cos^3(gt/2) - |\cos \theta \cos(gt/2) \sin^2(gt/2)| \times \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \sin^2(gt/2)}|\}. \quad (13)$$

模型 e: 对于 JC+AJC+AJC 模型, 在局域原子-腔场 Aa 中满足 $\delta = 2\Omega$, 在局域原子-腔场 Bb、Cc 中满足 $\delta = -2\Omega$; 对于 AJC+AJC+JC 模型, 在局域原子-腔场 Aa、Bb 中满足 $\delta = -2\Omega$, 在局域原子-腔场 Cc 中满足 $\delta = 2\Omega$; 原子间三原子纠缠表达式为

$$C_{ABC} = 2\max\{0, |\cos \theta \sin \theta \cos^3(gt/2) - |\sin \theta \cos(gt/2) \sin^2(gt/2)| \times \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \sin^2(gt/2)}|\}. \quad (14)$$

图 2 为三原子初始为 GHZ 型纠缠态 C_{ABC} 在不同动力学模型下随无量纲时间 t' ($t' = gt$) 和原子初态参

数 θ 的变化,整个系统分别遵循如下动力学模型演化:图 2(a)遵循三 JC 模型,图 2(b)遵循三 AJC 模型,图 2(c)遵循 JC+ JC+AJC 模型/AJC+AJC+ JC 模型,图 2(d)遵循 JC+AJC+ JC 模型/AJC+ JC+AJC 模型。根据以往的研究,对三个量子比特不进行任何操作时,初始三原子 GHZ 型纠缠态在三 JC 模型下发生纠缠死亡现象。根据本文研究,在对三原子进行经典场驱动得到有效三 JC 模型的动力学过程中,初始三原子 GHZ 型纠缠态同样会发生纠缠死亡现象,且发生该现象需满足 $|\tan \theta| < 3$,如图 2(a)中白色区域为发生纠缠突然死亡参数区,当 $|\tan \theta| > 3$ 时,三原子纠缠在演化过程中不会发生死亡现象。当三原子与各自的腔场在有效三 AJC 模型下演化时,出现三原子间纠缠死亡的现象,如图 2(b)所示的白色区域,但是发生死亡现象的参数范围发生变化($|\cot \theta| < 3$)。可见,在三 JC 模型下不会发生突然死亡现象的某些初始 GHZ 型纠缠态,在三 AJC 模型下会发生突然死亡现象,这是由于当满足 $|\tan \theta| > 3$ 时,必然满足 $|\cot \theta| < 3$ 。然而,在三 AJC 模型下不会发生突然死亡现象的 GHZ 型纠缠初态(即满足 $|\cot \theta| > 3$),在三 JC 模型下会发生突然死亡现象(满足 $|\tan \theta| < 3$)。

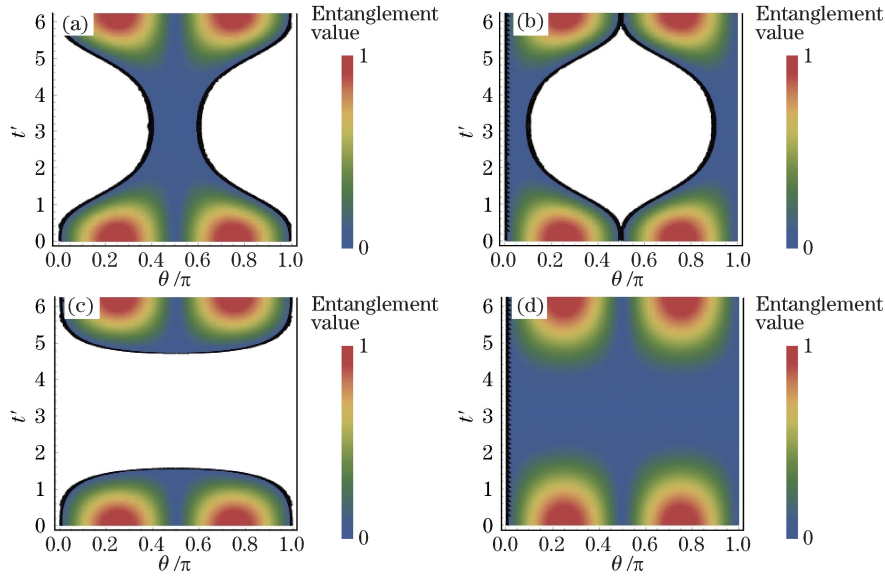


图 2 三原子初始为 GHZ 型纠缠态的 C_{ABC} 在不同动力学模型下随时间 t' 和原子初态参数 θ 的变化。

(a) 三 JC 模型;(b) 三 AJC 模型;(c) JC+ JC+AJC 模型/AJC+AJC+ JC 模型;
(d) JC+AJC+ JC 模型/AJC+ JC+AJC 模型

Fig. 2 Variation in C_{ABC} with time t' and atomic initial parameter θ for different dynamic models when the three-atom initial entanglement type is GHZ. (a) Three-JC model; (b) three-AJC model; (c) JC+ JC+AJC model/AJC+AJC+ JC model; (d) JC+AJC+ JC model/AJC+ JC+AJC model

设置局域子系统 Aa、Bb 遵循 JC 模型(或者 AJC 模型)演化,局域子系统 Cc 遵循 AJC 模型(或者 JC 模型)演化,即整个系统遵循 JC+JC+AJC 模型或者 AJC+AJC+JC 模型演化;此时任意参数下的初始 GHZ 型纠缠态在动力学过程中都会发生突然死亡现象,如图 2(c)所示。上述整个系统遵循三种不同的演化模型,它们的初始 GHZ 型纠缠态都在一定条件下发生纠缠死亡现象。这种在有限时间内消纠缠的现象限制了纠缠态作为一种有效资源在量子信息处理中的应用,因此抑制 GHZ 型纠缠态在动力学中的死亡现象具有重要意义。通过数值计算可以发现,设置局域子系统 Aa、Cc 遵循 JC 模型(或者 AJC 模型)演化,局域子系统 Bb 遵循 AJC 模型(或者 JC 模型)演化,即整个系统遵循 JC+AJC+ JC 模型或者 AJC+ JC+AJC 模型演化,此时任意参数下初始 GHZ 型纠缠态在演化过程中都不会发生突然死亡现象,通过引入经典场可有效抑制纠缠突然死亡现象。可见,通过设定原子-腔场的频率失谐量和经典场驱动强度的关系来确定各局域的原子与腔场之间的有效相互作用,从而达到有效控制三原子纠缠态动力学行为的目的,甚至可以抑制原子间纠缠态的突然死亡现象。

3.2 三原子 W 态在经典场驱动下的纠缠动力学行为

对于初始三原子为 W 型纠缠态,针对有效的原子与腔场相互作用的动力学过程,三原子的约化密度矩

阵并非 X 型矩阵,因此上述真正多体共生的方法不再适用。采用共生下限的度量方法^[20],得到三原子纠缠度的表达式为

$$C_{ABC} = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 [(C_i^{AB|C})^2 + (C_i^{AC|B})^2 + (C_i^{BC|A})^2]}, \quad (15)$$

式中 $C_i^{j|k} = \max\{0, \sqrt{\lambda_{i,q}^{j|k}} - \sum_{q>1} \sqrt{\lambda_{i,q}^{j|k}}\}$; $\lambda_{i,q}^{j|k}$ 为矩阵 $\tilde{\rho} = \rho (L_i^j \otimes \sigma_y^k) \rho^* (L_i^j \otimes \sigma_y^k)$ 的本征值, $i, j, k \in \{A, B, C\}$, ρ^* 为三原子约化密度矩阵 ρ 的复共轭矩阵, L_i^j 为操作在 i, j 原子上 SO_4 群的 6 个算子, σ_y^k 为原子 k 在 y 方向的泡利矩阵。此外,需要找到共生下限下三原子真正纠缠度的一种近似。针对一个三原子混合态 $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, 真正纠缠度 $C_{ABC} = \min \sum_i p_i C(|\psi_i\rangle)$, 这里的最小化指遍历 ρ 的所有可能分解 $|\psi_i\rangle$ 和所有可能的分解几率 p_i , 且 $C(|\psi_i\rangle) = \sqrt{(3 - \text{Tr}\rho_A^2 - \text{Tr}\rho_B^2 - \text{Tr}\rho_C^2)/3}$, 其中 Tr 代表对矩阵求迹, ρ_A, ρ_B, ρ_C 为三原子约化密度矩阵。研究表明,这种近似在三比特混合态密度矩阵的秩满足 $r \leq 4$ 时,共生下限可以作为—种强有力的简单度量方法定性描述三原子混合态的纠缠度^[21-23]。初始 W 型三原子纠缠态在有效 JC 模型或者 AJC 模型下动力学过程中的演化态密度矩阵的秩 $r \leq 4$ 。采用共生下限可以较为准确地研究三原子间纠缠的动力学特性。

当三原子初始处于 W 型纠缠态,探究在不同局域原子-腔场的有效相互作用模型下原子间纠缠的动力学行为。根据以往的研究,对原子不进行任何操作的情形下,初始原子间 W 型纠缠态在原子-腔场间的相互作用遵循 JC 模型时不会发生纠缠突然死亡现象。采用共生下限的度量方法,计算得到引入经典场驱动后三原子间纠缠的表达式为

$$C_{ABC} = \sqrt{\frac{2}{3} (C_{AB}^2 + C_{AC}^2 + C_{BC}^2)}, \quad (16)$$

式中 C_{AB}, C_{AC}, C_{BC} 为两原子间的共生纠缠^[24]。在不同局域原子-腔场的有效相互作用模型(如 GHZ 型纠缠态模型 a~e)下两原子间的共生纠缠具有不同的表达式。图 3 为三原子初始处于 W 型纠缠态的 C_{ABC} 随无量纲时间 t' 和原子初态参数 θ 的变化,取 $\varphi = \pi/4$, 整个系统分别遵循如下动力学模型演化:图 3(a)为三 JC 模型,图 3(b)为 JC+ JC+AJC 模型,图 3(c)为 AJC+AJC+JC 模型,图 3(d)为三 AJC 模型。与不对原子进行任何操作的情形下原子纠缠的动力学行为相比,引入经典场驱动后,原子间三原子纠缠在有效 AJC+AJC+ JC 模型和三 AJC 模型下都可以发生纠缠死亡现象,如图 3(c)、(d)所示。在有效三 JC 模型和 JC+JC+AJC 模型下,原子间三原子纠缠在动力学过程中不会发生突然死亡现象,如图 3(a)、(b)所示。可见,在经典场辅助下通过调节原子-腔场的频率失谐量和经典场驱动强度的关系,可以改变局域原子-腔场的有效哈密顿量,从而达到控制 W 型纠缠态动力学行为的目的。

3.3 三原子 GHZ 型和 W 型纠缠态在耗散腔场中的纠缠稳健性

上述对三原子 GHZ 型和 W 型纠缠态在经典场驱动下纠缠动力学行为的分析是在完美闭合腔场条件下进行的,但是产生这种完全没有光子能量耗散的腔场比较困难。下面分析泄漏腔场下三原子纠缠态在经典场辅助下的动力学行为。在泄漏腔条件下,初始量子系统纠缠随着演化发生衰减,从而破坏纠缠的稳健性。不对原子进行任何操作,即原子-光腔场之间的相互作用遵循 JC 模型,初始 GHZ 型纠缠态在弱耦合机制下会发生纠缠突然死亡现象,且初始 W 型纠缠态呈指数衰减,最后几乎衰减至零。在强耦合机制下,由于环境的非马尔可夫性,系统初始三原子纠缠会在死亡后突然产生,并最终振荡衰减至零。在对原子引入经典场驱动后,可以实现有效的 JC 模型和 AJC 模型。当腔场为泄漏腔,在求解原子与腔场间动力学过程的演化态时,薛定谔方程不再适用,应利用主方程求解。当原子-腔场的频率失谐量 δ 与经典驱动强度 Ω 满足

$$\delta = \pm 2\Omega, \text{ 该主方程可以表示为 } \frac{d\rho_{i,j}}{dt} = -i[H_{\text{eff}}, \rho_{i,j}] - \frac{\Gamma}{2} (a^+ a \rho_{i,j} - 2a \rho_{i,j} a^+ + \rho_{i,j} a^+ a), \text{ 其中 } H_{\text{eff}} \text{ 为 (4)、}$$

(5) 式中的有效哈密顿量, Γ 为腔场的耗散率。根据微扰理论,主方程的解可近似为 $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, 其中 $|\psi(t)\rangle = c_+(t)|+0\rangle + c_-(t)|-1\rangle$ (有效 JC 模型, $c_+(t), c_-(t)$ 分别为 $|+0\rangle, |-1\rangle$ 状态的几率幅) 或者 $|\psi(t)\rangle = d_+(t)|-0\rangle + d_-(t)|+1\rangle$ (有效 AJC 模型, $d_+(t), d_-(t)$ 分别为 $|-0\rangle, |+1\rangle$ 状态的几率幅)。利用

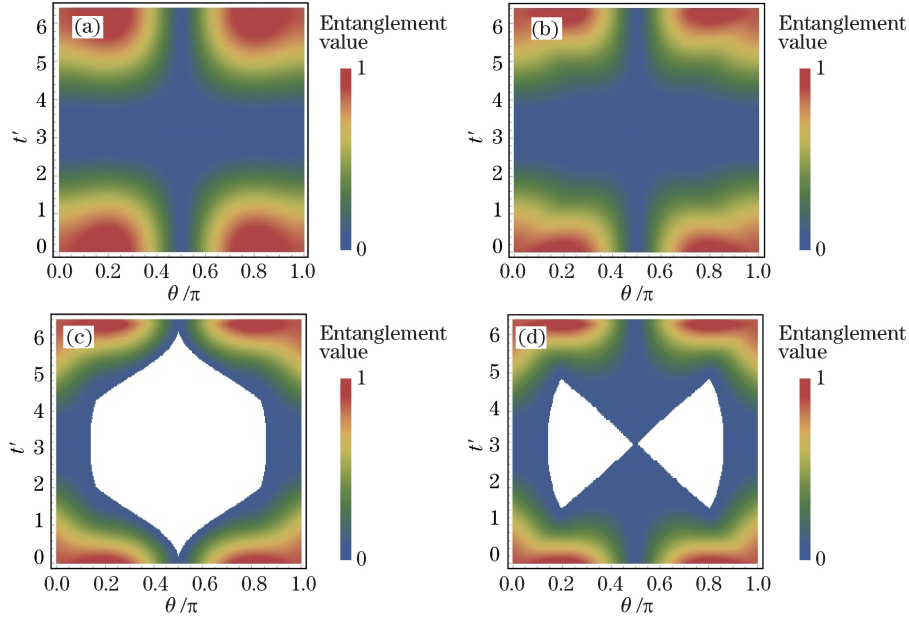


图 3 三原子初始处于 W 型纠缠态的 C_{ABC} 在不同动力学模型下随时间 t' 和原子初态参数 θ 的变化。

(a) 三 JC 模型; (b) JC+ JC+AJC 模型; (c) AJC+AJC+JC 模型; (d) 三 AJC 模型

Fig. 3 Variation in C_{ABC} with time t' and atomic initial parameter θ for different dynamic models when the three-atom initial entanglement type is W. (a) Three-JC model; (b) JC+ JC+AJC model; (c) AJC+AJC+ JC model; (d) three-AJC model

$$\frac{dc_+(t)}{dt} = -i \frac{g}{2} c_-(t), \quad \frac{dc_-(t)}{dt} = -i \frac{g}{2} c_+(t) - \frac{\Gamma}{2} c_-(t) \text{ (有效 JC 模型) 或者 } \frac{dd_+(t)}{dt} = -i \frac{g}{2} d_-(t) - \frac{\Gamma}{2} d_+(t),$$

$$\frac{dd_-(t)}{dt} = -i \frac{g}{2} d_+(t) \text{ (有效 AJC 模型), 并根据初始条件 } c_+(0)=1 \text{ 或者 } d_-(0)=1, \text{ 求解 } c_+(t) \text{ 或 } d_-(t)。$$

在有效 JC 模型下的演化过程中, 原子与腔场状态 $|-\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc}$ 不随时间演化, 状态 $|+\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc}$ 的演化过程为

$$|+\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc} \rightarrow \xi(t) |+\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc} + \sqrt{1-|\xi(t)|^2} |-\rangle|1\rangle_{Aa/Bb/Cc}, \quad (17)$$

式中 $\xi(t) = \exp(-\Gamma t/4) \left[\cosh(Gt/4) + \frac{\Gamma}{G} \sinh(Gt/4) \right]$, $G = \sqrt{\Gamma^2 - 4g^2}$ 。若 $\Gamma > 2g$, $\xi(t)$ 为指数衰减函数, 体现马尔可夫动力学过程; 当 $\Gamma < 2g$ 时, $\xi(t)$ 为振荡衰减函数, 体现非马尔可夫动力学过程。

在原子与单模泄漏腔场的有效 AJC 模型的演化过程中, 原子与腔场状态 $|+\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc}$ 不随时间演化, 状态 $|-\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc}$ 的演化过程为

$$|-\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc} \rightarrow \xi(t) |-\rangle|0\rangle_{Aa/Bb/Cc} + \sqrt{1-|\xi(t)|^2} |+\rangle|1\rangle_{Aa/Bb/Cc}。 \quad (18)$$

图 4 为三原子纠缠 C_{ABC} 在不同局域的原子与泄漏腔场有效相互作用下随无量纲时间 T 的变化行为。在原子与腔场的弱耦合机制 ($\Gamma = 5g$) 下得到图 4(a)、(c), 在强耦合机制 ($\Gamma = 0.2g$) 下得到图 4(b)、(d)。当初始系统为 GHZ 型三原子纠缠态 ($\theta = \pi/4$), 由(10)~(14)式可知, 整个系统遵循三 JC 模型/三 AJC 模型演化时, 原子间纠缠动力学行为相同; 整个系统遵循 JC+AJC+JC 模型/AJC+JC+AJC 模型演化时的三原子纠缠动力学行为与遵循三 JC 模型/三 AJC 模型演化时基本一致, 如图 4(a)、(b)所示。调节经典场驱动强度和原子-腔场的频率失谐量的关系, 使整个系统按 JC+AJC+JC 模型/AJC+JC+AJC 模型演化, 可以抑制纠缠突然死亡现象。对于初始为 W 型三原子纠缠态的系统, 考虑等权重叠加态, 即 $\cos \theta \cos \varphi = \cos \theta \sin \varphi = \sin \theta = 1/\sqrt{3}$, 由图 4(c)、(d)可知, 随着遵循 AJC 模型的局域原子-腔场有效相互作用的减小, 初始 W 型纠缠态在动力学过程中的纠缠稳健性增强。因此, 在遵循有效三 JC 模型演化过程中, 初始 W 型三原子纠缠态的稳健性最强, 在遵循有效三 AJC 模型演化过程中, 初始 W 型三原子纠缠态的稳健性最弱。可见, 对于 GHZ

型和 W 型纠缠态,通过对原子施加经典驱动场,调节原子-腔场的频率失谐量和经典场驱动强度的关系,从而增加三原子纠缠态在动力学过程中的纠缠稳健性。

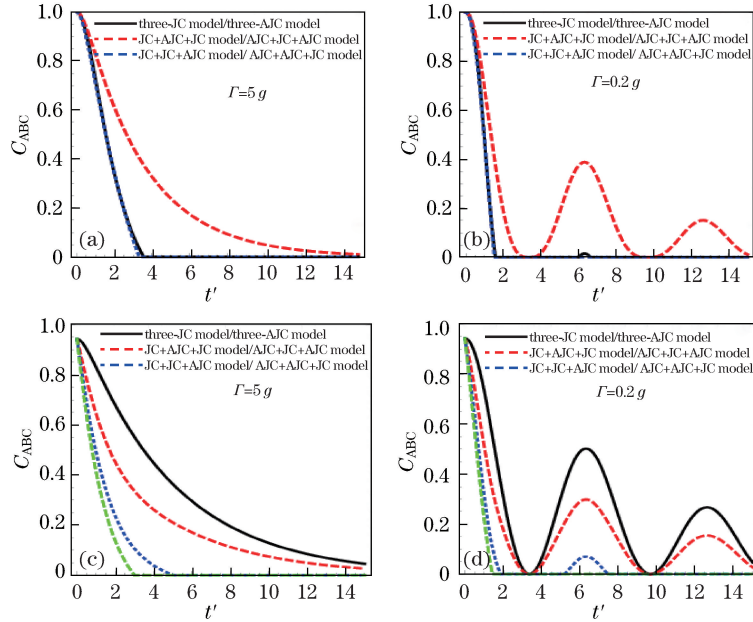


图 4 系统初始纠缠态为(a)(b) GHZ 型和(c)(d) W 型三原子纠缠态的 C_{ABC} 随时间 t' 的变化

Fig. 4 Variation in three-atom entanglement C_{ABC} with time t' for systems with initial (a)(b) GHZ-type and (c)(d) W-type entanglements

4 结 论

通过引入经典场对原子进行驱动,实现了腔 QED 理论中 JC 模型到 AJC 模型的转化;在可控的原子-腔场有效相互作用下,采用了多体真正共生和共生下限的度量方法定性研究了三原子 GHZ 型和 W 型纠缠态的动力学行为。研究发现,通过设置原子-腔场的频率失谐量与经典场驱动强度的关系,抑制了三原子纠缠在动力学过程中出现的纠缠突然死亡现象,提升了泄漏腔场情形下 GHZ 型和 W 型纠缠态的纠缠稳健性。

参 考 文 献

- 1 Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, *et al.* Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. Phys Rev Lett, 1993, 70(13): 1895-1899.
- 2 Einstein A, Podolsk B, Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? [J]. Phys Rev, 1935, 47: 777-780.
- 3 Bennett C H, Brassard G, Mermin N D. Quantum cryptography without Bell's theorem [J]. Phys Rev Lett, 1992, 68(5): 557-559.
- 4 Bennett C H, DiVincenzo D P. Quantum information and computation [J]. Nature, 2000, 404(6775): 247-255.
- 5 Yu T, Eberly J H. Sudden death of entanglement [J]. Science, 2009, 323: 598.
- 6 Hadzibabic Z, Stock S, Battelier B, *et al.* Interference of an array of independent Bose-Einstein condensates [J]. Phys Rev Lett, 2004, 93(18): 180403.
- 7 Xu J Z, Guo J B, Wen W, *et al.* Entanglement evolution of three-qubit mixed states in multipartite cavity-reservoir systems [J]. Chin Phys B, 2012, 21(8): 080305.
- 8 Yu T, Eberly J H. Finite-time disentanglement via spontaneous emission [J]. Phys Rev Lett, 2004, 93(14): 140404.
- 9 Yönc M, Yu T, Eberly J H. Pairwise concurrence dynamics: a four-qubit model [J]. J Phys B, 2007, 40(9): s45-s59.
- 10 Cui L, Zhang Y, Man Z, *et al.* Different entanglement dynamics and transfer behaviors due to dipole-dipole interaction [J]. Chinese Optics Letters, 2012, 10(10): 100202.
- 11 Lu Daoming. Entanglement properties of two-photon process in three coupling cavities [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(1): 0127001.

- 卢道明. 三耦合腔系统双光子过程中的纠缠特性[J]. 光学学报, 2013, 33(1): 0127001.
- 12 Almeida M P, de Melo F, Hor-Meyll M, *et al.* Environment-induced sudden death of entanglement[J]. Science, 2007, 316(5824): 579-582.
- 13 Salles A, de Melo F, Almeida M P, *et al.* Experimental investigation of the dynamics of entanglement: sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment[J]. Phys Rev A, 2008, 78(2): 022322.
- 14 Xu J S, Li C F, Gong M, *et al.* Experimental demonstration of photonic entanglement collapse and revival[J]. Phys Rev Lett, 2010, 104(10): 100502.
- 15 Jaynes E T, Cummings F W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser[J]. Proc IEEE, 1963, 51(1): 89-109.
- 16 Zhang Y J, Man Z X, Xia Y J. Atomic entanglement sudden death in a strongly driven cavity QED system[J]. J Phys B, 2009, 42(9): 095503.
- 17 Feng L J, Zhang Y J, Xia Y J. Dynamics and improvement of quantum correlations in the triple Jaynes-Cummings model [J]. Optics Communications, 2016, 366: 328-334.
- 18 Solano E, Agarwal G S, Walther H. Strong-driving-assisted multipartite entanglement in cavity QED[J]. Phys Rev Lett, 2003, 90(2): 027903.
- 19 Hashemi R S M, Huber M, Broadbent C J, *et al.* Genuinely multipartite concurrence of N-qubit X matrices[J]. Phys Rev A, 2012, 86(6): 062303.
- 20 An N B, Kim J, Kim K. Entanglement dynamics of three interacting two-level atoms within a common structured environment[J]. Phys Rev A, 2011, 84(2): 022329.
- 21 Siomau M, Fritzsche S. Entanglement dynamics of three-qubit states in noisy channels[J]. Eur Phys J D, 2010, 60(2): 397-403.
- 22 Weinstein Y S. Entanglement dynamics in three-qubit X states[J]. Phys Rev A, 2010, 82(3): 032326.
- 23 An N B, Kim J, Kim K. Nonperturbative analysis of entanglement dynamics and control for three qubits in a common lossy cavity[J]. Phys Rev A, 2010, 82(3): 032316.
- 24 Wootters W K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits[J]. Phys Rev Lett, 1998, 80(10): 2245-2248.