

# 米散射介质退偏特性的表征与计算方法

王雪珍 来建成 李振华

南京理工大学理学院, 江苏 南京 210094

**摘要** 对比描述米散射介质退偏特性的米勒矩阵分解法和米勒相关矩阵法, 讨论了完备的退偏特性描述参数。发现退偏介质在不含其他偏振特性时, 分解法和相关矩阵法得到的保偏系数与标准值的差异会随着介质主轴方向上的退偏各向异性程度增大而增大, 此差异最大时分别为 0.16 和 0.07, 相对差值分别为 33% 和 15%。由于米散射介质表现出退偏各向异性特征, 发现除了可用退偏各向异性系数表征此特性外, 保偏系数-熵图也可定性地反映介质的退偏各向异性程度。而当介质表现出其他偏振特性, 如双折射和旋光等效应时线性退偏会表现出各向异性特征, 此时还需引入线性退偏各向异性系数才可完备地表征米散射介质的退偏特性。

**关键词** 物理光学; 组织光学; 保偏系数; 米勒矩阵分解; 米散射介质; 米勒相关矩阵; 熵

**中图分类号** O436 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/AOS201636.1226001

## Characterization and Calculation Methods of Depolarization Properties of Mie Scatterers

Wang Xuezhen Lai Jiancheng Li Zhenhua

College of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China

**Abstract** Mueller matrix decomposition method and Mueller coherence matrix method for the complete depolarization characteristics of Mie scatterers are compared. The parameters of the depolarization characteristics are discussed. It is found that when the depolarizing medium doesn't contain other polarization characteristics, the difference between the general polarization-maintaining indexes calculated by decomposition method and coherence matrix, and the standard value will increase with the deviation degree of anisotropy coefficient of depolarization along the medium's principal axis. The maximum divergences are 0.16 and 0.07 and the relative divergences are 33% and 15% respectively. Because of the depolarization anisotropy in Mie scatterers, the polarization-maintaining index-entropy chart can also be used to denote the depolarization anisotropy qualitatively, as well as the anisotropy coefficient of depolarization. When the Mie scatterers show other polarization properties, for example the birefringence and the optical rotation, the linear depolarization will show the anisotropic property. At the moment, the linear depolarization anisotropy factor should be introduced to completely depict the depolarization characteristics of Mie scatterers.

**Key words** physical optics; tissue optics; polarization-maintaining index; Mueller matrix; Mie scatterers; Mueller coherence matrix; entropy

**OCIS codes** 260.5430; 170.7050; 290.5855

## 1 引 言

众所周知斯托克斯矢量描述光的偏振状态, 米勒矩阵描述光学介质的偏振变换特性。光的保偏度可由斯托克斯-米勒公式直接计算得到, 也可通过米勒矩阵计算。通过米勒矩阵计算的介质退偏能力有保偏系数和熵 2 种表达方式, 退偏能力越强则保偏系数越小。保偏系数可由米勒矩阵自身元素<sup>[1-2]</sup>、米勒相关矩阵<sup>[3]</sup>、或者通过米勒矩阵极分解后计算得到<sup>[4]</sup>, 最为严谨的方式则是对所有入射偏振状态的保偏度求平均值<sup>[5]</sup>。

**收稿日期:** 2016-05-19; **收到修改稿日期:** 2016-08-09

**作者简介:** 王雪珍(1979—), 女, 博士研究生, 讲师, 主要从事光在生物组织中的传输规律和应用方面的研究。

E-mail: njjustwxz@njjust.edu.cn

**导师简介:** 李振华(1964—), 男, 博士, 教授, 主要从事激光雷达和组织光学等方面的研究。

E-mail: lizhenhua@njjust.edu.cn(通信联系人)

在通过米勒矩阵计算保偏系数的4种方法中,前2种在数学上是等同的<sup>[3]</sup>;第3种可反映介质在3个主轴方向上保偏度的平均值和退偏各向异性特征;第4种则是从保偏度平均值的定义出发进行计算。另一方面,也可从熵的角度来描述介质的退偏特性<sup>[6]</sup>。

米勒矩阵分解法是目前计算混浊介质退偏特性的一种常用方法。米勒矩阵分解法可比较全面地反映退偏特性,即通过  $x-y$ ,  $45^\circ$ - $135^\circ$ 和左旋-右旋3个主轴方向的保偏系数获得退偏各向异性系数  $\Gamma$  和总体保偏系数。通过米勒相关矩阵得到的保偏系数和熵也可表达介质的退偏能力,而且这两个量之间存在一定的联系。已有一些文献探讨过这种联系,Aiello A等<sup>[7]</sup>从理论上证明两者之间非单值函数关系;Puentes G等<sup>[8]</sup>选取了不同的样品从实验上验证了这种非单值函数关系,同时还发现做布朗运动的混浊介质和诸如光纤之类的静态样品会处在保偏系数-熵图的不同区域内。

Chipman R A<sup>[5]</sup>讨论了根据米勒相关矩阵法计算的保偏系数与保偏度平均值的区别,发现两者在绝大多数情况下都很接近;但当样品本身在退偏基础上还存在强烈的二向色特性时两者的计算结果可相差0.5左右,即米勒相关矩阵法计算所得的保偏度在某些情况下与标准值出入较大。而米勒矩阵分解法所得结果与标准值的吻合程度目前尚未见文献报道。另一方面,瑞利散射和米散射介质对圆偏光和线偏光的退偏能力不一样,即存在着退偏各向异性。因此,单纯从总体保偏系数去讨论介质的退偏特性是不全面的。

近年来随着偏振光在生物组织<sup>[9]</sup>、大气传输<sup>[10-11]</sup>等领域应用的日益广泛,对偏振光经过混浊介质后偏振状态变化的准确描述就显得愈发重要。本文旨在探讨准确和完备的米散射介质退偏特性的描述方法,所讨论的退偏特性的表征以及不同计算方法所得结果的比较可为准确描述米散射介质的退偏特性提供重要的参考价值。

## 2 退偏特性的计算方法

### 2.1 米勒相关矩阵法

米勒相关矩阵  $\mathbf{H}$  为

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^4 m_{i,j} (\boldsymbol{\sigma}_i \otimes \boldsymbol{\sigma}_j^*), \quad (1)$$

式中  $\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_j$  由  $2 \times 2$  单位矩阵和3个标准泡利矩阵组成,  $m_{i,j} (i, j = 1, 2, 3, 4)$  为米勒矩阵的16个元素<sup>[8]</sup>。

由  $\mathbf{H}$  的定义可知,这是一个厄米矩阵。用  $\lambda_i (i = 0, 1, 2, 3)$  表示相关矩阵的本征值,由  $\mathbf{H}$  的非负性可知,其本征值落在0和1之间。

散射介质的熵可由米勒相关矩阵的本征值来表示<sup>[7,12]</sup>,即

$$E_M = - \sum_{i=0}^3 p_i \log_4(p_i). \quad (2)$$

式中,

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=0}^3 \lambda_i}. \quad (3)$$

而保偏系数则可由  $\mathbf{H}$  的本征值定义为

$$D_M = \sqrt{\frac{1}{3} \left( 4 \sum_{i=0}^3 p_i^2 - 1 \right)}. \quad (4)$$

如图1所示,对于同样的保偏系数  $D_M$  值会有多个熵  $E_M$  值对应,即保偏系数和熵值之间并不是一一对应的关系。

图1被划分成4个区域,分别为A、B、C、D,由  $P_1, P_2, P_3, P_4$  所连曲线分割而成。  $P_1 P_2$  两点所连曲线称为  $C_{12}$ ,  $P_1 P_3$  两点所连曲线称为  $C_{13}$ ,其他以此类推。这些曲线有特定的函数关系,设

$$E(n, f) = - \left[ (1 - nf) \log_4(1 - nf) + nf \log_4(f) \right], \quad (5)$$

式中,

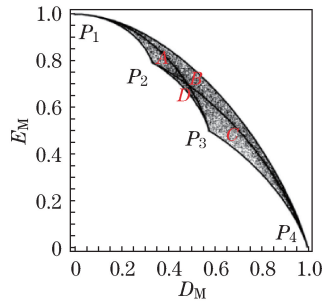


图 1 由米勒相关矩阵得到的保偏系数和熵关系图<sup>[7]</sup>

Fig. 1 Relationship between polarization-maintaining index and entropy derived from Mueller coherent matrix

$$f_{\pm} = [1 \pm \sqrt{1 - 3(n+1)(1 - D_M^2)/(4n)}] / (n+1), \quad (6)$$

式中,  $n=1, 2, 3$  是  $\mathbf{H}$  相同本征值的个数。  $C_{i,j}$  与  $E(n, f)$  之间有对应的关系, 其关系由表 1 给出。表中  $\eta$  和  $\gamma$  是  $\mathbf{H}$  的本征值。  $E_{13} = -2(0.5 - \gamma) \log_4(0.5 - \gamma) - 2\gamma \log_4(\gamma)$ , 这里的  $\gamma$  与  $D_M$  的关系可通过公式  $\gamma = [1 \pm \sqrt{3} D_M] / 4$  来确定。

表 1  $C_{i,j}$  与  $E(n, f)$  的关系表<sup>[7]</sup>

Table 1 Relationship of  $C_{i,j}$  and  $E(n, f)$ <sup>[7]</sup>

| Curve    | Equation    | Eigenvalues of $H$                 |
|----------|-------------|------------------------------------|
| $C_{12}$ | $E(3, f_+)$ | $\{\eta, \gamma, \gamma, \gamma\}$ |
| $C_{23}$ | $E(2, f_+)$ | $\{\eta, \gamma, \gamma, 0\}$      |
| $C_{34}$ | $E(1, f_+)$ | $\{\eta, \gamma, 0, 0\}$           |
| $C_{14}$ | $E(3, f_-)$ | $\{\eta, \gamma, \gamma, \gamma\}$ |
| $C_{13}$ | $E_{13}$    | $\{\eta, \eta, \gamma, \gamma\}$   |
| $C_{24}$ | $E(2, f_-)$ | $\{\eta, \gamma, \gamma, 0\}$      |

在图 1 中, 尤其需要注意的是  $P_1$  和  $P_4$  相连的曲线, 这条曲线表示的  $D_M$  和  $E_M$  关系为

$$E_M^{cr} = -\frac{3D_M + 1}{4} \log_4\left(\frac{3D_M + 1}{4}\right) - 3\frac{1 - D_M}{4} \log_4\left(\frac{1 - D_M}{4}\right), \quad (7)$$

其对应的随机介质称为退偏各向同性散射介质。不落在此条曲线上的点对应的介质为退偏各向异性散射介质。

## 2.2 米勒矩阵极分解法

通过米勒矩阵分解法得出光学介质的各个偏振特性是目前广泛应用的方法。Lu S Y 等<sup>[4]</sup> 将米勒矩阵通过极分解的方式分解为 3 个矩阵之积, 即

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\Delta} \mathbf{M}_R \mathbf{M}_D, \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{M}_D$  表示二向色矩阵,  $\mathbf{M}_R$  表示相位延迟矩阵,  $\mathbf{M}_{\Delta}$  表示退偏矩阵。  $x$ - $y$  方向上的线性保偏系数由  $|\mathbf{M}_{\Delta}(2, 2)|$  表示,  $45^{\circ} \sim 135^{\circ}$  方向上的线性保偏系数由  $|\mathbf{M}_{\Delta}(3, 3)|$  表示, 圆保偏系数由  $|\mathbf{M}_{\Delta}(4, 4)|$  表示。由于只研究退偏特性, 故只给出退偏矩阵各元素的意义。采用  $D_p$  表示极分解所得总体保偏系数, 则

$$D_p = \frac{|\mathbf{M}_{\Delta}(2, 2)| + |\mathbf{M}_{\Delta}(3, 3)| + |\mathbf{M}_{\Delta}(4, 4)|}{3}, \quad (9)$$

退偏各向异性系数定义为圆保偏系数和线性保偏系数的比值<sup>[12]</sup>; 此处可定义主轴方向上的退偏各向异性系数为

$$\Gamma = \frac{2|\mathbf{M}_{\Delta}(4, 4)|}{|\mathbf{M}_{\Delta}(2, 2)| + |\mathbf{M}_{\Delta}(3, 3)|}. \quad (10)$$

下文中所述退偏各向异性系数特指主轴方向上的退偏各向异性系数。

## 2.3 保偏度标准值的计算方法

从保偏度平均值的定义出发, 求解整个邦加球上出射光保偏度的平均值可得<sup>[5]</sup>

$$D_A(\mathbf{M}) = \frac{\int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D[\mathbf{M} \cdot \mathbf{S}(\varphi, \chi)] \cos \chi d\chi d\varphi}{4\pi} = \frac{\int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D(S_o) \cos \chi d\chi d\varphi}{4\pi}, \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{M}$  为米勒矩阵,  $\mathbf{S}$  为入射光的斯托克斯矢量。 $\mathbf{S}$  的变量  $\varphi$  表示椭圆偏振光的长轴与  $x$  轴的夹角,  $\chi$  的正切值表示 2 倍的椭圆长短轴比值。而  $D[S_o]$  表示由出射光的斯托克斯矢量计算得到的保偏度, 即

$$D(S_o) = \frac{\sqrt{S_o^2(2) + S_o^2(3) + S_o^2(4)}}{S_o(1)}. \quad (12)$$

$\mathbf{S}$  可表示为

$$\mathbf{S}(\varphi, \chi) = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\varphi) \cos \chi \\ \sin(2\varphi) \cos \chi \\ \sin \chi \end{bmatrix}. \quad (13)$$

### 3 结果与分析

#### 3.1 纯退偏介质米勒矩阵分解法和米勒相关矩阵法的计算结果分析

假设有一退偏介质, 其不含二向色性、旋光效应和双折射效应, 同时线性退偏不存在方向上的差异, 则其米勒矩阵可以表示为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad (14)$$

式中  $a$  表示线性保偏系数,  $b$  表示圆保偏系数。图 2(a)~(c) 分别示出了  $D_A$ 、 $D_M$ 、 $D_P$  在  $a$  和  $b$  处及  $(0, 1)$  范围内的二维图(图中横坐标表示  $b$ , 纵坐标表示  $a$ , 计算过程中  $a$  和  $b$  的间隔以 0.01 来计); 退偏各向异性参数的对数值(以 10 为底数)如图 2(d) 所示; 图 2(e)~(h) 分别示出了  $D_A$  与  $D_M$ 、 $D_P$  的差值以及相应的相对差值。采用对角线将图 2 划分成 2 个区域, 可知右下角区域属于米散射范畴(圆保偏系数大于线性保偏系数), 而左上角区域属于瑞利散射范畴(线性保偏系数大于圆保偏系数), 如图 2(d) 所示。需要注意的是, 计算过程中以  $D_A$  为保偏度标准值。从图 2 可发现以下几点:

1) 观察图 2(a)~(c) 发现, 与  $D_P$  相比较,  $D_M$  与  $D_A$  更为接近;

2) 观察图 2(e)~(h) 发现, 在非对角区域  $D_P$  和  $D_M$  与  $D_A$  的差异大于对角区域。结合图 2(d) 可发现在退偏各向异性系数较大的情况下差异大于退偏各向同性的情况; 同时亦可发现沿着对角区域从左下角往右上角的方向观察, 呈现出了类似于领带的形状。领带范围内 3 种方法的计算结果差异较小, 相对误差在 1% 范围内。

3) 观察图 2(e) 和 (f) 发现  $D_M$  大于  $D_A$ ,  $D_P$  小于  $D_A$ ; 观察图 2(g) 和 (h) 发现, 当退偏各向异性较小时即在左下角到右上角的对角区域差异不明显, 随着退偏各向异性系数变大, 在远离对角方向的米散射区域, 与标准值的差异相对值最大分别达到 15% 和 33%。

综上所述, 对于不存在其他偏振效应的米散射介质来说, 由米勒矩阵分解法得到的保偏系数要小于标准值; 而由米勒相关矩阵得到的保偏系数则大于标准值。当退偏各向异性系数与 1 的偏离程度越高时分解法和相关矩阵计算所得的保偏系数与标准值的差异越大, 此时尤其不宜采用米勒矩阵分解法表示总体保偏系数。然而当退偏相对不严重时米勒矩阵分解法和米勒相关矩阵法都可较好地描述介质的总体保偏能力。

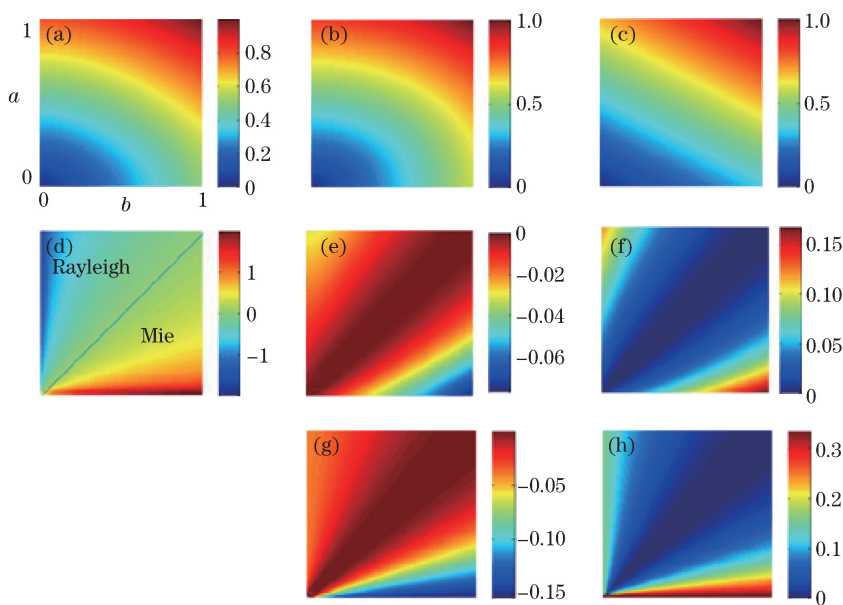


图 2 不存在其他偏振特性的退偏介质保偏度及退偏各向异性参数的变化图。(a) $D_A$ ; (b) $D_M$ ; (c) $D_P$ ; (d) $\lg\Gamma$ ;  
(e) $D_\Lambda-D_M$ ; (f) $D_\Lambda-D_P$ ; (g) $(D_\Lambda-D_M)/D_A$ ; (h) $(D_\Lambda-D_P)/D_A$

Fig. 2 Variation diagram of polarization-maintaining degree and anisotropy coefficient of depolarization for depolarizing medium without other polarization properties. (a)  $D_A$ ; (b)  $D_M$ ; (c)  $D_P$ ; (d)  $\lg\Gamma$ ;  
(e)  $D_\Lambda-D_M$ ; (f)  $D_\Lambda-D_P$ ; (g)  $(D_\Lambda-D_M)/D_A$ ; (h)  $(D_\Lambda-D_P)/D_A$

### 3.2 米散射介质退偏各向异性系数和 $D_M E_M$ 图之间的联系

对于大多数米散射介质来说,退偏各向异性因子不会过大,因此在不存在其他偏振特性时采用米勒矩阵分解或米勒相关矩阵都可获得较为准确的总体保偏系数,但总体保偏系数不能全面描述退偏特性。退偏各向异性系数和  $D_M E_M$  图都可描述介质的退偏各向异性特征,那么这 2 种方法的描述结果之间有何联系呢?

图 3(a)示出了高退偏各向异性的米散射介质在  $D_M E_M$  图中的位置。由图可见,当线性偏振光完全退偏,圆保偏系数在 0 和 1 之间变化时形成的曲线正好与  $C_{13}$  曲线重合;当圆偏振光完全保偏,线性保偏系数在 0 和 1 之间变化时形成的曲线接近  $C_{34}$  曲线;而退偏各向同性的介质落在曲线  $C_{14}$  上。那么由此证明,米散射介质将不会落在 A 和 D 区域。而图 3(b)显示米散射介质确实落在由  $C_{13}$ , 靠近  $C_{34}$  的曲线和  $C_{14}$  围成的区域内。也就是说从理论上来说,任一种不含其他偏振特性的米散射介质都落在此区域内。

### 3.3 6 种米散射样品的退偏特性分析

6 种样品被用来验证 3.1 节中由图 3 获得的结论,同时为说明其他偏振特性和测量方式对退偏特性的影响,这 6 种样品包含了无其他偏振特性和有偏振特性的散射介质,3 种样品为前向散射面上获得,3 种为后向散射面上获得。样品 1、2、3 由聚苯乙烯微球颗粒产生散射,微球直径  $1.40 \mu\text{m}$ , 折射率 1.59, 入射光波长  $632.8 \text{ nm}$ ; 聚丙烯酰胺凝胶产生双折射效应,蔗糖产生旋光效应。它们之间的区别在于样品 1 为有双折射和旋光效应的非散射介质;样品 2 为不具双折射和旋光效应的散射介质(散射系数  $\mu_s = 30 \text{ cm}^{-1}$ , 各向异性因子  $g = 0.95$ , 介质厚度为  $10 \text{ mm}$ ); 样品 3 为同时具有双折射和旋光效应的散射介质, 散射参数同样品 2。这些样品的米勒矩阵在前向散射方向测得<sup>[13]</sup>。样品 4、5、6 的光学参数都一样( $\mu_s = 60 \text{ cm}^{-1}$ ,  $g = 0.935$ ), 样品 4 和 5 为不具双折射和旋光效应的散射介质, 样品 4 在后向散射面径向距离为  $2 \text{ mm}$  的位置, 样品 5 和 6 在径向距离为  $5 \text{ mm}$  的位置探测, 区别在于样品 6 具有旋光效应和双折射效应<sup>[14]</sup>。样品 4、5、6 的米勒矩阵在后向散射方向上由蒙特卡罗模拟得到。

表 2 和表 3 列出了这些样品的米勒矩阵和相应的保偏系数。表中 1、3、6 为含其他偏振特性的样品; 2、5 为不含其他偏振特性的样品; 4 为后向散射面一倍平均传输自由程内的样品。因为文献[14]指明在一个传输自由程内,会发生由于散射引起的二向色和相位延迟特性,而在一个传输自由程以外,这种特性几乎不存

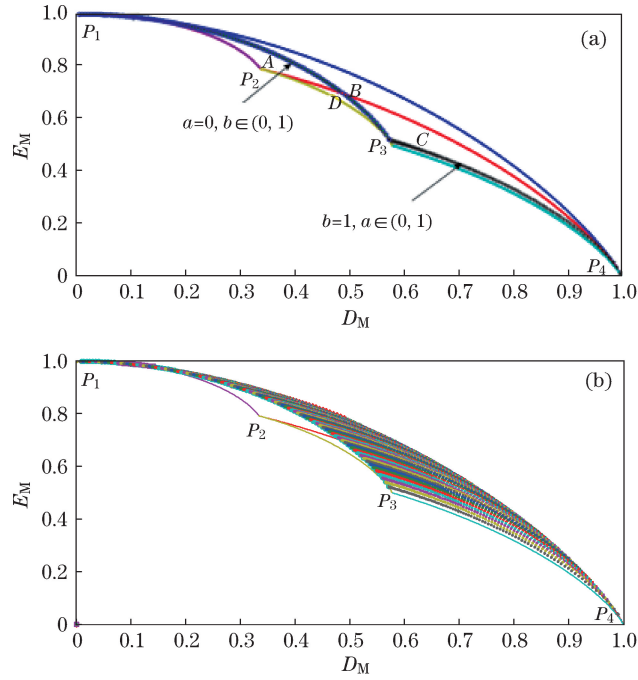


图 3 米散射介质在  $D_M E_M$  图上的位置。(a)  $\Gamma$  无穷大;(b) 对应图 2(d)中米散射区域

Fig. 3 Locations of Mie scatterers in  $D_M E_M$ . (a) Infinite  $\Gamma$ ; (b) Mie scattering in Fig. 2(d)

在,故此这里另行指出。从中可看出对于样品 1,3 种方法得到的保偏系数是相同的;当介质呈现退偏各向异性时,样品 2~6 的  $D_M$ 、 $D_P$  与  $D_A$  产生了差异,而且这种差异随着退偏各向异性系数  $\Gamma$  的增大有增大的趋势。对于不含其他偏振特性的样品 2、4、5 来说这与前文中的结论是一致的;同时发现当米散射介质含其他偏振特性时,即对于样品 1、3、6 来说也同样具有这样的趋势,即偏振特性的出现对分解法与相关矩阵法计算结果的准确性几乎没有影响,此准确性主要取决于退偏各向异性系数的大小。

表 2 聚苯乙烯悬浮液前向散射方向实验结果与保偏系数比较表

Table 2 Experimental results and polarization-maintaining indexes for polystyrene suspensions in forward scattering direction

| Sample | Mueller matrix   | $D_M$  | $D_P$  | $D_A$  | $\Gamma$ |
|--------|--|--------|--------|--------|----------|
| 1      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0229 & 0.0027 & 0.0058 \\ -0.0186 & 0.9956 & -0.0361 & 0.0318 \\ -0.0129 & 0.0392 & 0.2207 & -0.9656 \\ 0.0014 & 0.0280 & 0.9706 & 0.2231 \end{bmatrix}$    | 0.995  | 0.995  | 0.995  | 1        |
| 2      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0190 & 0.0030 & 0.0114 \\ -0.0183 & 0.7454 & -0.0025 & 0.0019 \\ 0.0013 & 0.0085 & 0.7378 & -0.0648 \\ 0.0034 & 0.0037 & 0.0747 & 0.8530 \end{bmatrix}$     | 0.7828 | 0.7809 | 0.7820 | 1.15     |
| 3      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0039 & 0.0022 & -0.0097 \\ 0.0012 & 0.7742 & 0.0310 & -0.0393 \\ -0.0061 & -0.0429 & 0.1234 & -0.7949 \\ -0.0009 & -0.0251 & 0.8146 & 0.1983 \end{bmatrix}$ | 0.8072 | 0.8063 | 0.8068 | 1.06     |

表 3 聚苯乙烯悬浮液后向散射面模拟结果与保偏系数比较表

Table 3 Simulated results and polarization-maintaining indexes for polystyrene suspensions in backward scattering direction

| Sample | Mueller matrix   | $D_M$  | $D_P$  | $D_A$  | $\Gamma$ |
|--------|--|--------|--------|--------|----------|
| 4      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0690 & 0.0020 & -0.0034 \\ -0.0666 & 0.2192 & 0.0012 & -0.0035 \\ -0.0004 & 0.0018 & 0.1407 & -0.0535 \\ 0.0012 & -0.0012 & 0.0568 & 0.4674 \end{bmatrix}$  | 0.3171 | 0.2784 | 0.3037 | 2.59     |
| 5      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0178 & 0.0057 & 0.0043 \\ -0.0171 & 0.1376 & 0.0014 & 0.0035 \\ 0.0009 & 0.0016 & 0.1368 & -0.0091 \\ -0.0013 & -0.0009 & 0.0166 & 0.4354 \end{bmatrix}$    | 0.2758 | 0.2368 | 0.2599 | 3.17     |
| 6      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0167 & -0.0019 & -0.0095 \\ -0.0190 & 0.1273 & 0.0075 & -0.0058 \\ 0.0009 & -0.0054 & 0.0302 & -0.1853 \\ 0.0024 & -0.0051 & 0.1901 & 0.2648 \end{bmatrix}$ | 0.2299 | 0.2017 | 0.2185 | 2.14     |

为了进一步说明退偏各向异性系数和  $D_M E_M$  图之间的关系,表 4 和表 5 列出了样品 1~6 的退偏矩阵,退偏各向异性参数、熵等参数。由前文可知,当熵值低于  $E_M^c$  时介质会呈现各向异性的退偏特性;而观察表 4 和表 5 可见,6 种样品的熵值都介于  $E_M^c$  和相应的临界线之间,即便对于样品 1,其主轴上的退偏各向异性系数为 1 的情况下。样品 1 具有旋光和双折射效应,观察其退偏矩阵的对角元素可知,退偏呈现出各向异性特征,但单纯通过退偏各向异性系数表达却会掩盖这种特性。而通过  $D_M E_M$  的关系却可表现出退偏矩阵表现出的退偏各向异性特征。

表 4 聚苯乙烯悬浮液前向散射方向实验结果与退偏各向异性参数

Table 4 Experimental results and depolarization parameters for polystyrene suspensions in forward scattering direction

| Sample | Depolarizing Mueller matrix   | $\Gamma$ | $E_M$  | $E_M^c$ | $C_{24}$ |
|--------|---|----------|--------|---------|----------|
| 1      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0041 & 0.9969 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0070 & 0.0000 & 0.9915 & -0.0000 \\ -0.0019 & -0.0000 & -0.0000 & 0.9966 \end{bmatrix}$  | 1        | 0.0199 | 0.0208  | 0.0197   |
| 2      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0042 & 0.7454 & 0.0030 & 0.0027 \\ -0.0000 & 0.0030 & 0.7409 & -0.0001 \\ -0.0065 & 0.0027 & -0.0001 & 0.8565 \end{bmatrix}$  | 1.15     | 0.4391 | 0.4497  | 0.4070   |
| 3      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0038 & 0.7759 & 0.0011 & -0.0012 \\ -0.0143 & 0.0011 & 0.8050 & -0.0341 \\ -0.0009 & -0.0012 & -0.0341 & 0.8381 \end{bmatrix}$ | 1.06     | 0.4064 | 0.4127  | 0.3743   |

为说明退偏各向异性与  $D_M E_M$  图的关系,将上述样品在  $D_M E_M$  图的位置示于图 4 和图 5 中。由于介质表现出轻微的退偏各向异性,所以可见熵值介于  $E_M^c$  和  $C_{24}$ 、 $C_{13}$  曲线之间。由于图 4 不能很好地表现局部特征,图 5 示出了样品 2~5 在熵图上位置的局部放大图。由图 5 可见,样品 2 和 3 比样品 4~6 的退偏各向异性系数小,所以其在熵图上较靠近  $E_M^c$  线;而样品 4~6 会往  $C_{13}$  的方向偏移。

表 5 聚苯乙烯悬浮液后向散射面模拟结果与退偏各向异性参数  
Table 5 Simulated results and depolarization parameters for polystyrene suspensions in backward scattering direction

| Sample | Depolarizing Mueller matrix   | $\Gamma$ | $E_M$  | $E_M^{cr}$ | $C_{13}$ |
|--------|---|----------|--------|------------|----------|
| 4      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0517 & 0.2156 & 0.0019 & -0.0027 \\ -0.0007 & 0.0019 & 0.1483 & -0.0276 \\ 0.0026 & -0.0027 & -0.0276 & 0.4712 \end{bmatrix}$ | 2.59     | 0.8949 | 0.9057     | 0.8849   |
| 5      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0147 & 0.1374 & 0.0015 & 0.0025 \\ 0.0002 & 0.0015 & 0.1371 & -0.0030 \\ -0.0033 & 0.0025 & -0.0030 & 0.4358 \end{bmatrix}$   | 3.17     | 0.9194 | 0.9277     | 0.9142   |
| 6      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0169 & 0.1274 & 0.0018 & -0.0015 \\ -0.0009 & 0.0018 & 0.1645 & -0.0907 \\ 0.0052 & -0.0015 & -0.0907 & 0.3132 \end{bmatrix}$ | 2.14     | 0.9447 | 0.9490     | 0.9412   |

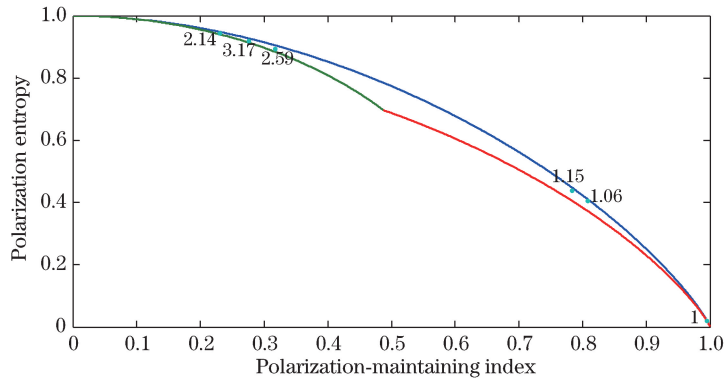


图 4  $\Gamma$  与  $D_M E_M$  图之间的关系

Fig. 4 Relationship between  $\Gamma$  and  $D_M E_M$

虽然文献[12]指出:在介质表现出退偏各向异性特征时不适宜用熵来表示退偏特性,但从图 5 可见,结合了保偏系数和熵两个信息的  $D_M E_M$  图可大致反映退偏各向异性的程度。

另外,从表 4 和表 5 可见,虽然样品 2、3 与样品 4~6 的微观光学参数均相同,但它们的退偏各向异性参数差异较大,主要可能是探测方式的差异以及在样品内存在的其他偏振特性,如双折射、旋光效应产生的影响。因此下节着重讨论当存在其他偏振特性时米散射介质退偏特性会产生什么变化,该如何描述这种变化。

### 3.4 存在其他偏振特性时米散射介质退偏特性的分析

观察表 4 和表 5 中的样品 2、3 与样品 5、6 会发现,虽然两者的所有散射光学参数均相同,但由于样品 3 和 6 存在双折射和旋光效应,将样品 2、3 和样品 5、6 相比较会发现:样品 2 和 5 在  $x-y$  方向、 $45^\circ \sim 135^\circ$  方向的线性保偏系数几乎没有差异,而样品 3 和 6 在  $45^\circ \sim 135^\circ$  方向的线性保偏系数要明显高于  $x-y$  方向。这说明了旋光效应和双折射效应对退偏特性产生了显著的影响。为了更加深入地说明旋光效应和双折射效应对退偏特性的影响,补充选取了样品 7 和 8。样品 7 为同时具有双折射和旋光效应的高散射介质,散射系数  $\mu_s = 30 \text{ cm}^{-1}$ ,各向异性因子  $g$  为 0.95,测量得到前向散射方向的米勒矩阵;样品 8 为具有双折射和旋光效应的高散射介质,散射系数  $\mu_s = 60 \text{ cm}^{-1}$ ,各向异性因子  $g$  为 0.95,蒙特卡罗模拟得到后向散射面米勒矩阵<sup>[15]</sup>。前面提到在后向散射面入射点附近区域由于单/少次散射事件会引起线性二向色和线性相位延迟,因此发现表 5 中样品 4 在  $x-y$  方向和  $45^\circ \sim 135^\circ$  方向的线性保偏度不一致。将样品 3、4、6、7、8 的相关参数列于表 6(其中  $R$  表示后向散射面探测点与入射点的径向距离),其中线性退偏各向异性系数定义为  $2[\mathbf{M}_\Delta(2,2) - \mathbf{M}_\Delta(3,3)] / [(\mathbf{M}_\Delta(2,2) + \mathbf{M}_\Delta(3,3))]$ 。表 6 中所有的样品,前向探测情况下样品的散射系数



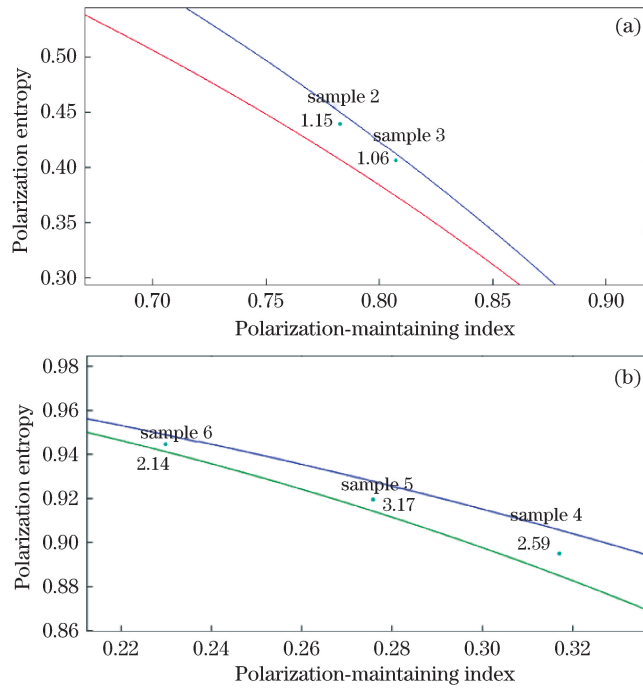


图 5  $\Gamma$  与  $D_M E_M$  图关系局部放大图。(a) 样品 2 和 3; (b) 样品 4、5 和 6

Fig. 5 Local enlarging graph of relationship between  $\Gamma$  and  $D_M E_M$ . (a) Sample 2 and 3; (b) sample 4, 5 and 6

$\mu_s = 30 \text{ cm}^{-1}$ ; 后向探测样品的散射系数  $\mu_s = 60 \text{ cm}^{-1}$ 。观察表 6 可见, 在前向散射方向线性退偏各向异性系数绝对值相比后向散射方向要小; 而在后向散射方向的线性退偏各向异性系数与探测位置、线性相位延迟和旋光角等有着复杂的关系。从样品 4 可以看出, 由于散射本身引起的线性保偏的差异与由于偏振特性本身引起的不一致。样品 4 的散射系数  $\mu_s = 60 \text{ cm}^{-1}$ ;  $g = 0.935$ , 因此平均传输自由程约为 2.56 mm, 意即在临近传输自由程的位置出现了线性保偏的各向异性。

由于表 6 中只有样品 4 为后向散射面上因散射引起的偏振特性而产生线性退偏各向异性, 为进一步验证该种效应, 图 6 示出了质量分数为 4% 的红细胞悬浮液后向散射面  $M_\Delta(2, 2)$  和  $M_\Delta(3, 3)$  的差值, 图像面积约为  $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ , 图中小圈半径为 2 mm, 大圈半径为 4 mm。该结果的实验条件在文献[16]中有详细介绍。该红细胞悬浮液本身不存在双折射效应和旋光效应,  $\mu_s = 319 \text{ cm}^{-1}$ ;  $g = 0.99236$ , 因此平均传输自由程约为 4 mm。由图 6 可知远离中心位置区域  $M_\Delta(2, 2)$  和  $M_\Delta(3, 3)$  的差值几乎为零, 该结果与样品 5 类似, 也与 3.1 节中讨论米散射介质时的假设前提一致; 但在临界传输自由程以及一个传输自由程以内的位置出现了  $M_\Delta(2, 2)$  和  $M_\Delta(3, 3)$  不相等的情况, 该结果则与样品 4 类似。至于为什么在一个传输自由程内  $M_\Delta(2, 2)$  大于  $M_\Delta(3, 3)$  的情况和  $M_\Delta(2, 2)$  小于  $M_\Delta(3, 3)$  的情况沿着圆周方向会交替性变化不属于该研究主题, 有待于进一步研究。

至此可认为对于存在双折射和旋光效应的米散射介质以及米散射介质在后向散射面一个平均传输自由程范围内时除总体退偏系数、退偏各向异性系数以外, 还需要线性退偏各向异性系数来反映线性退偏的各向异性程度。

## 4 结 论

虽然通过邦加球计算总体保偏系数最为准确, 但却需要耗时的积分运算。讨论和对比了 2 种总体保偏系数的通用算法。首先, 对比了不含其他偏振特性的退偏介质保偏系数采用米勒矩阵分解法和米勒相关矩阵法计算的结果与标准值之间的差异, 发现差异随着退偏各向异性系数与 1 的偏离程度增大而增大, 相对而言米勒矩阵分解法比米勒相关矩阵法得到的结果与标准值的差异要大, 当退偏各向异性系数趋近与极限值时两者的差异分别是 0.16 和 0.07, 相对差异分别是 33% 和 15%。然后, 研究了退偏各向异性程度与由米勒

表 6 含有旋光效应和双折射效应的米散射介质退偏特性

Table 6 Depolarizing characteristics for Mie scatterers with optical rotation and birefringent effect

| Sample | Depolarizing Mueller matrix  | Linear depolarization anisotropy | Linear retardation /rad | Optical rotation /( $^{\circ}$ ) | Di-attenuation | Detection direction     |
|--------|--|----------------------------------|-------------------------|----------------------------------|----------------|-------------------------|
| 3      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0038 & 0.7759 & 0.0011 & -0.0012 \\ -0.0143 & 0.0011 & 0.8050 & -0.0341 \\ -0.0009 & -0.0012 & -0.0341 & 0.8381 \end{bmatrix}$  | -0.037                           | 1.373                   | 2.33                             | 0.011          | Forward                 |
| 7      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0028 & 0.7683 & -0.0013 & 0.0027 \\ -0.0102 & -0.0013 & 0.7797 & -0.0404 \\ 0.0016 & 0.0027 & -0.0404 & 0.8201 \end{bmatrix}$   | -0.015                           | 1.574                   | 1.72                             | 0              | Forward                 |
| 4      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0517 & 0.2156 & 0.0019 & -0.0027 \\ -0.0007 & 0.0019 & 0.1483 & -0.0276 \\ 0.0026 & -0.0027 & -0.0276 & 0.4712 \end{bmatrix}$  | 0.370                            | 0                       | 0                                | 0              | Backward<br>( $R=2$ mm) |
| 6      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0169 & 0.1274 & 0.0018 & -0.0015 \\ -0.0009 & 0.0018 & 0.1645 & -0.0907 \\ 0.0052 & -0.0015 & -0.0907 & 0.3132 \end{bmatrix}$  | -0.254                           | 0.905                   | 2.09                             | 0.019          | Backward<br>( $R=5$ mm) |
| 8      | $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0116 & 0.6662 & 0.0032 & -0.0006 \\ -0.0073 & 0.0032 & 0.7397 & -0.0669 \\ -0.0088 & -0.0006 & -0.0669 & 0.7237 \end{bmatrix}$ | -0.105                           | 1.782                   | 2.63                             | 0              | Backward<br>( $R=3$ mm) |

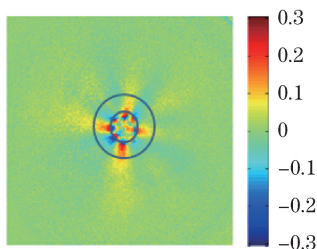


图 6 质量分数为 4% 的红细胞悬浮液后向散射面  $M_{\Delta}(2,2)$  和  $M_{\Delta}(3,3)$  的差值

Fig. 6 Difference between  $M_{\Delta}(2,2)$  and  $M_{\Delta}(3,3)$  on backward scattering plane of erythrocyte suspension with 4% mass fraction

相关矩阵计算所得的保偏系数-熵图的联系。发现当介质呈现退偏各向异性特征时对于米散射介质来说其在保偏系数-熵图上的位置会往  $C_{13}$  和  $C_{34}$  的方向推移,说明米散射介质在熵图中的位置一定程度上可以反映退偏各向异性程度。在对 6 种样品的偏振特性进行分析后,发现当米散射介质同时存在旋光效应和双折射效应等偏振特性时,米勒矩阵分解法和米勒相关矩阵法所得总体保偏系数与标准值的差异仍然只受退偏各向异性系数的影响。与此同时,线性退偏会呈现出各向异性,此时除了退偏各向异性系数以外,还需引入能反映线性退偏各向异性的系数才可全面表达介质的退偏特性。

总之,无论米散射介质是否含有其他偏振特性,米勒相关矩阵计算所得米散射介质的总体保偏系数误差较小,同时其保偏系数-熵图能在一定程度上反映退偏各向异性特征。当米散射介质含有其他偏振特性(包括散射引起的偏振特性)时,除需要总体退偏系数表述介质保偏特性,还需结合米勒矩阵分解法所得退偏矩阵定量描述退偏各向异性特征和线性退偏的各向异性特征,这样才能全面地反映介质的退偏特性。

## 参 考 文 献

- 1 Bohren C F, Huffman D R. Absorption and scattering of light by small particles[M]. New York: John Wiley & Sons, 2008.
- 2 Gil J J, Bernabeu E. Depolarization and polarization indices of an optical system[J]. J Mod Optic, 1986, 33(2): 185-189.
- 3 Le Roy-Brehonnet F, Le Jeune B. Utilization of Mueller matrix formalism to obtain optical targets depolarization and polarization properties[J]. Prog Quant Electron, 1997, 21(2): 109-151.
- 4 Lu S Y, Chipman R A. Interpretation of Mueller matrices based on polar decomposition[J]. J Opt Soc Am A, 1996, 13(5): 1106-1113.
- 5 Chipman R A. Depolarization index and the average degree of polarization[J]. Appl Optics, 2005, 44(13): 2490-2495.
- 6 Goldstein D. Polarized Light[M]. New York: Marcel Dekker, 2003.
- 7 Aiello A, Woerdman J P. Physical bounds to the entropy-depolarization relation in random light scattering[J]. Phys Rev Lett, 2005, 94(9): 090406.
- 8 Puentes G, Voigt D, Aiello A, *et al.* Experimental observation of universality in depolarized light scattering[J]. Opt Lett, 2005, 30(23): 3216-3218.
- 9 Ye Haishui, Gao Zhishan, He Jun, *et al.* Visual concentration effect on the polarization of scattered light[J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(3): 0317002.  
叶海水, 高志山, 何 军, 等. 视细胞浓度分布对散射光偏振性的影响[J]. 光学学报, 2012, 32(3): 0317002.
- 10 Wang Ziqian, Zhang Xudong, Jin Haihong, *et al.* All sky turbid atmospheric polarization pattern modeling based on Monte Carlo method[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(10): 1013001.  
王子谦, 张旭东, 金海红, 等. 基于 Monte Carlo 方法的混浊大气偏振模式全天域建模[J]. 中国激光, 2014, 41(10): 1013001.
- 11 Hao Zengzhou, Gong Fang, Pan Delu, *et al.* Scattering and polarization characteristics of dust aerosol particles[J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(1): 0101002.  
郝增周, 龚 芳, 潘德炉, 等. 沙尘气溶胶粒子群的散射和偏振特性[J]. 光学学报, 2012, 32(1): 0101002.
- 12 Boulvert F, Piedrière Y, Le Brun G, *et al.* Comparison of entropy and polarization memory rate behaviors through a study of weakly-anisotropic depolarizing biotissues[J]. Opt Commun, 2007, 272(2): 534-538.
- 13 Ghosh N, Wood M F G, Vitkin I A. Mueller matrix decomposition for extraction of individual polarization parameters from complex turbid media exhibiting multiple scattering, optical activity, and linear birefringence[J]. J Biomed Opt, 2008, 13(4): 044036.
- 14 Ghosh N, Wood M F G, Vitkin I A. Polarimetry in turbid, birefringent, optically active media: A Monte Carlo study of Mueller matrix decomposition in the backscattering geometry[J]. J Appl Phys, 2009, 105(10): 102023.
- 15 Kumar S, Purwar H, Ossikovski R, *et al.* Comparative study of differential matrix and extended polar decomposition formalisms for polarimetric characterization of complex tissue-like turbid media[J]. J Biomed Opt, 2012, 17(10): 105006.
- 16 Wang X, Lai J, Li Z. Polarization studies for backscattering of RBC suspensions based on Mueller matrix decomposition[J]. Opt Express, 2012, 20(18): 20771-20782.