

矢量场完全相干与偏振的内在关联

陈晶晶¹ 陈斐楠² 李 伽³

¹合肥工业大学仪器科学与光电工程学院, 安徽 合肥 230009

²中国科学院合肥物质科学研究院应用技术研究所, 安徽 合肥 230031

³迈阿密大学文理学院物理系, 佛罗里达 迈阿密 33146

摘要 基于统计相似理论, 利用完全相干所隐含的两点处光场分量间的关系, 分别对 Wolf 和 Setälä 定义下完全相干所对应的偏振特性进行研究。分析完全相干所包含的光场偏振度特性以及偏振部分的偏振态分布特征, 并找出光场分量间的线性特性与椭圆率和方位角之间的关联形式, 最后进行了模拟仿真实验。结果表明, 基于 Wolf 定义的完全相干, 两点处光场的偏振度可以是任意的, 但是这两点处的偏振度以及交叉偏振度绝对相等, 且两点光场完全偏振部分的偏振态也完全一致; 基于 Setälä 定义的完全相干, 对应着两点处的光场均是完全偏振的, 但是这两点光场的偏振态并不一致, 而且它们的椭圆率以及方位角之间并无特定联系。

关键词 物理光学; 相干; 偏振; 统计相似; 矢量场

中图分类号 O436 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201636.1026021

Relation Between Complete Coherence and Polarization of Vector Fields

Chen Jingjing¹ Chen Feinan² Li Jia³

¹ School of Instrument Science and Opto-Electronics Engineering, Hefei University of Technology, Hefei, Anhui 230009, China

² Institute of Applied Technology, Hefei Institutes of Physical Science, Chinese Academy of Sciences, Hefei, Anhui 230031, China

³ Department of Physics, College of Arts and Sciences, University of Miami, Miami, Florida 33146, USA

Abstract Based on statistical similarity theory, the corresponding polarization properties of complete coherence defined by Wolf and Setälä are studied respectively by using the relationship of light field component of two points hidden by complete coherence. The polarization degree characteristic of light field included by complete coherence and the polarization state distribution characteristic of the polarized portion are analyzed. Then the analytic expressions of the linear characteristic of light field component, ellipticity and azimuth angle are derived. The simulation experiment are carried out at last. Results show that based on the complete coherence defined by Wolf, the polarization degree of the random field at the two points is an arbitrary value, but the value and the degree of the cross polarization are exactly the same. Based on the complete coherence introduced by Setälä, the random field at the two points is completely polarized, but the polarization state does not exhibit the same character, and there is no association between ellipticity and azimuth angle.

Key words physical optics; coherence; polarization; statistical similarity; vector field

OCIS codes 260.5430; 030.6600; 030.1640

1 引 言

统计相似这个概念由 Verdet 于 1865 年提出, 可以看作是一致振动的精确数学意义。虽然相干的概念是几十年后才被提出来的, 但是基于统计相似理论, Verdet 估算了太阳光照射到地面上光一致振动区域的

收稿日期: 2016-05-18; **收到修改稿日期:** 2016-06-23

基金项目: 国家自然科学基金(11404086, 11504383)、中央高校基本科研业务费专项资金资助(J2014HGBZ0170, 2014HGQC0009)、安徽省自然科学基金(1508085QA23)

作者简介: 陈晶晶(1988—), 女, 博士研究生, 讲师, 主要从事光场相干偏振方面的研究。

E-mail: jingjingchen@hfut.edu.cn

大小,即太阳光在地球表面上的相干区域大小。近年来,Wolf^[1]发现利用统计相似的概念可以对空间-时间域中完全相干和完全偏振的物理意义给出清晰的说明,而且随机光束的偏振理论和相干理论之间存在值得注意的极其相似的特性。但是在空间-时间域中处理光的传播和散射问题时,时间延迟因子的存在常常导致结果比较复杂,因此在很多情况下难以得到有用的结果。而这个问题如果在空间-频率域内进行处理则会相对简便,于是 Lahiri 等^[2]将统计相似的概念推广到空间-频率域中,并且研究了标量理论框架下的完全相干特性。基于上述研究并利用统计相似理论,Chen 等^[3-4]研究了矢量场中的完全相干特性。进一步地,2015年,Voipio 等^[5]对空间-时间域和空间-频率域的完全相干特性之间的联系进行了研究。

另一方面,1938年,Zernike^[6]在标量场中利用杨氏干涉实验中干涉条纹的可见度定义了标量理论框架下的光场的相干度。但是对于矢量理论框架下相干度定义,至今依然存在着争议。Wolf^[7]利用干涉现象对部分偏振光的相干特性进行深入研究,从而建立了相干偏振统一理论,使相干度定义与杨氏干涉实验可见度之间建立了密切的关系,该定义强调的是相干度在双缝实验中的可测量性,已经被广泛应用于光场相干特性的研究中。随后 Setälä 等^[8]报道了光场在空间-频率域中的另一个相干度定义,他强调电磁矢量框架下相干条纹的可见度并不适合用来描述相干度,因而提出了包含交叉谱密度矩阵的非对角元素所定义的相干度,不同于 Wolf 所定义的仅仅包含了交叉谱密度矩阵对角元素的相干度定义。由于与 Wolf 提出的定义不一致,该相干度的定义一提出就引起了争议^[9]。Martínez-Herrero 等^[10]对 Wolf 和 Setälä 定义的相干度之间的关系进行研究,但此研究建立在光场需要满足三个条件的情况下。2012年 Tervo 等^[11]对矢量场中相干度定义进行比较,依据于 Zernike 提出的论点:完全相干对应的是完全的相位依赖,完全不相干对应的是完全的相位不依赖,但该研究是利用特例对以上相干度定义进行了比较。故现存相干度定义在全局及本质层面上的内在关联机制还需要进一步研究。

针对于矢量场相干度定义的争论,本课题组曾对两种不同的相干度定义下的完全相干特性进行研究^[3],利用光场分量间的线性关系初步阐述了两种不同相干度定义之间的区别。该研究不需要借助特例,具有普适性,并且研究成果简化了交叉谱纯光的描述并扩展了其应用^[4]。本文对课题组之前的研究成果进行拓展,通过基于统计相似的处理方法,利用两种不同的光谱相干度定义下光场完全相干所隐含的两点处光场分量间的关系,对光场的完全相干特性对应的偏振特性进行研究,分析完全相干所包含的光场偏振度特性以及偏振态的分布特征,进一步揭示两种相干度定义之间的区别与联系以及相干特性与偏振特性的内在关联。

2 基本原理

电磁矢量场中光束的二阶相干特性可以通过 2×2 的交叉谱密度矩阵(CSDM)来表示^[7]:

$$\mathbf{W} = [W_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)] = [\langle U_i^*(\mathbf{r}_1, \omega) U_j(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle_\omega] \quad (i, j = x, y), \quad (1)$$

由 Wolf 提出的矢量理论框架下空间-频率域中光谱相干度的定义表示为:

$$\mu_w(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{\text{Tr}[\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)]}{\sqrt{\text{Tr}[\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)] \text{Tr}[\mathbf{W}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)]}}, \quad (2)$$

式中,Tr 表示矩阵的迹。点 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 处光场的横向分量 $U_i(\mathbf{r}_1, \omega)$ 和 $U_j(\mathbf{r}_2, \omega)$ 之间的相干度 $\mu_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ 的定义为:

$$\mu_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{\langle U_i^*(\mathbf{r}_1, \omega) U_j(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle_\omega}{\sqrt{S_i(\mathbf{r}_1, \omega) S_j(\mathbf{r}_2, \omega)}} \quad (i, j = x, y), \quad (3)$$

在空间-频率域内,根据 Wolf 提出的相干偏振统一理论,光场中一点处的偏振度计算公式为^[7]:

$$P(\mathbf{r}, \omega) = \sqrt{1 - \frac{4 \text{Det}[\mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)]}{\{\text{Tr}[\mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)]\}^2}}, \quad (4)$$

式中,Det 表示矩阵对应的行列式的值。

根据 Wolf 提出的相干度定义,一个光场在点 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 处是完全相干的,其充分必要条件是这两点处对应的随机场 $\mathbf{U}(\mathbf{r}, \omega)$ 满足确定关系^[3]:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}_2, \omega) = \beta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \mathbf{U}(\mathbf{r}_1, \omega), \quad (5)$$

式中,

$$\beta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = [S(\mathbf{r}_2, \omega) / S(\mathbf{r}_1, \omega)]^{1/2} \exp[i\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)], \quad (6)$$

式中, $S(\mathbf{r}_n, \omega)$ 是点 \mathbf{r}_n 处的光谱密度, $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ 等于么模的光谱相干度 $\mu_w(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ 的相位。故 $\beta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ 是确定的量, 一般为包含振幅和相位的函数, 而振幅和相位均是实验可测量的量。

另一方面, 由 Setälä 提出的随机电磁场中光谱相干度的另外一个定义为^[8]:

$$\mu_{\text{STF}}^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{\text{Tr}[\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \mathbf{W}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \omega)]}{\text{Tr}[\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)] \text{Tr}[\mathbf{W}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)]}, \quad (7)$$

可知当且仅当这两点处对应的随机场 $\mathbf{U}(\mathbf{r}, \omega)$ 分量之间满足如下确定关系的时候, 点 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 处的光场是完全相干的^[3]:

$$U_j(\mathbf{r}_2, \omega) = \beta_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) U_i(\mathbf{r}_1, \omega), \quad (8)$$

式中,

$$\beta_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = [S_j(\mathbf{r}_2, \omega) / S_i(\mathbf{r}_1, \omega)]^{1/2} \exp[i\phi_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)], \quad (9)$$

于是 $\beta_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ 也是确定的, 一般为复数, 而且 $\phi_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ 等于么模相干度 $\mu_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ 的相位。

3 Wolf 定义下完全相干与偏振的内在关联

根据 Wolf 定义的相干度, 两点 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 处频率为 ω 的光场完全相干的充分必要条件是这两点处对应的随机电场满足统计相似特性, 即(5)式。由基本理论公式(1)和(5)可以得出这两点处 CSDM 分量也具有相似的线性关系, 即:

$$W_{ij}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega) = |\beta|^2 W_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega), \quad (10)$$

式中, $\|\cdot\|$ 代表对复数取模, $|\beta|$ 的数值由这两点处光谱密度的比值来决定, 即(6)式。这说明两点间光谱相干度分量所对应的关联, 但此时, 任一点处光场的 x, y 分量之间并无关联, 即点 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 处光场的横向分量 $U_x(\mathbf{r}_n, \omega)$ 和 $U_y(\mathbf{r}_n, \omega)$ 之间是无关联的。根据偏振度的定义[即(4)式]可得: 此时点 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 处光场的偏振度取值范围是在 $0 \sim 1$ 之间的任意值, 即光场可能是部分偏振、完全非偏振或是完全偏振的。

当两点 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 处频率为 ω 的光场完全相干时, 利用(10)式代入偏振度的定义, 可得 $P(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega) = P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)$ 。即 Wolf 定义下的完全相干意味着这两点处光场的偏振度绝对相等。并且, 根据与强度相关直接关联的交叉偏振度 $P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ 的定义^[12], 可得:

$$P(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega) = P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega) = P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega), \quad (11)$$

由于光场可能是部分偏振、完全非偏振或是完全偏振的, 因此若想对光场的偏振态进行研究, 就必须将光场分解为完全偏振部分以及完全非偏振部分分别进行研究。任一光场的 CSDM 可以被唯一地分解成两个矩阵 $\mathbf{W}^{(u)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)$ 和 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)$ ^[13]:

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = \mathbf{W}^{(u)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) + \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega), \quad (12)$$

式中, 上标 u 和 p 分别代表完全非偏振部分和完全偏振部分, 且:

$$\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = \begin{bmatrix} B(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) & D(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) \\ D^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) & C(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{W}^{(u)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = \begin{bmatrix} F(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) & 0 \\ 0 & F(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

利用 CSDM 分量分别描述(13)、(14)式, 即[为了简便, CSDM 分量的位置矢量表示 $(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)$ 均省略]:

$$\begin{cases} F(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = [W_{xx} + W_{yy} - \sqrt{(W_{xx} + W_{yy})^2 + 4|W_{xy}|^2}] / 2 \\ B(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = [W_{xx} - W_{yy} + \sqrt{(W_{xx} - W_{yy})^2 + 4|W_{xy}|^2}] / 2 \\ C(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = [W_{yy} - W_{xx} + \sqrt{(W_{xx} - W_{yy})^2 + 4|W_{xy}|^2}] / 2, \\ D(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = W_{xy} \\ D^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = W_{yx} \end{cases} \quad (15)$$

进而可以得出完全偏振部分偏振椭圆的长短轴、椭圆率以及方位角, 其中偏振椭圆的形状由椭圆率来表示,

偏振椭圆的长轴方位由方位角来表示:

$$A_{1,2}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{[B(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - C(\mathbf{r}, \mathbf{r})]^2 + 4|D(\mathbf{r}, \mathbf{r})|^2} \pm \sqrt{[B(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - C(\mathbf{r}, \mathbf{r})]^2 + 4\text{Re}[D(\mathbf{r}, \mathbf{r})]^2} \right\}^{1/2}, \quad (16)$$

$$\epsilon(\mathbf{r}) = A_2(\mathbf{r}) / A_1(\mathbf{r}), \quad (17)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \arctan \left\{ \frac{2\text{Re}[D(\mathbf{r}, \mathbf{r})]}{B(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - C(\mathbf{r}, \mathbf{r})} \right\}, \quad (18)$$

式中, $A_1(\mathbf{r})$ 和 $A_2(\mathbf{r})$ 分别对应着偏振椭圆的短轴和长轴, $\epsilon(\mathbf{r})$ 为椭圆率, $\varphi(\mathbf{r})$ 为方位角。

在已经知道两点处光场的偏振度一致的情况下, 对这两点处光场完全偏振部分的偏振态进行研究, 利用(5)式、(10)式和(15)式, 得到:

$$B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega) = \{S_x(\mathbf{r}_1, \omega) - S_y(\mathbf{r}_1, \omega) + \sqrt{[S_x(\mathbf{r}_1, \omega) - S_y(\mathbf{r}_1, \omega)]^2 + 4|W_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)|^2}\} / 2, \quad (19)$$

$$B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega) = [|\beta|^2 S_x(\mathbf{r}_1, \omega) - |\beta|^2 S_y(\mathbf{r}_1, \omega) + \sqrt{[|\beta|^2 S_x(\mathbf{r}_1, \omega) - |\beta|^2 S_y(\mathbf{r}_1, \omega)]^2 + 4|\beta|^4 |W_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)|^2}] / 2, \quad (20)$$

利用同样的方法继续得到:

$$\begin{cases} B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega) = |\beta|^2 B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega) \\ C(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega) = |\beta|^2 C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega) \\ D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega) = |\beta|^2 D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega) \end{cases}, \quad (21)$$

将(19~21)式代入偏振椭圆参量的计算公式, 即(16)~(18)式中, 可以得出:

$$A_{1,2}(\mathbf{r}_2) = |\beta|^2 A_{1,2}(\mathbf{r}_1), \quad (22)$$

$$\epsilon(\mathbf{r}_1) = \epsilon(\mathbf{r}_2), \quad \varphi(\mathbf{r}_1) = \varphi(\mathbf{r}_2). \quad (23)$$

于是, 这两点处光场完全偏振部分偏振椭圆的椭圆率以及方位角完全一致。可以得出: 若根据 Wolf 定义的相干度, 当两点处光场完全相干时, 对应着各点的偏振度以及这两点处的交叉偏振度是绝对相等的, 而且这两点光场完全偏振部分的偏振态也完全一致, 只是其长短轴的绝对数值之比为 $|\beta|^2$ 。这个结论进一步揭示了 Wolf 的相干度定义与偏振特性的内在关联。

4 Setälä 定义下完全相干与偏振的内在关联

4.1 内在关联分析

根据 Setälä 定义的相干度, 两点处频率为 ω 的光场完全相干的充分必要条件是这两点对应的随机光场中任意两个分量之间均要满足一定的线性关系, 即(8)式。对(8)式进行分析, 可以得出: 任一点处的光场的 x, y 分量之间也会随之满足一定的线性关系, 根据偏振度的定义, 若一点处的光场在频率为 ω 的情况下是完全偏振的, 即 $P(\mathbf{r}, \omega) = 1$, 那么从(4)式很容易可以得到偏振度等于 1 所需要的条件为:

$$\text{Det}[\mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)] = 0, \quad (24)$$

因为 CSDM 的迹包含了光场所有分量之间的相干特性, 对(24)式进行计算, 然后根据光场分量之间的相干度 $\mu_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega)$ 的定义, 即(3)式, 可得(24)式等同于:

$$|\mu_{xy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega)| = 1, \quad (25)$$

故根据 Setälä 定义的相干度, 两点处频率为 ω 的光场完全相干所对应的点 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 处光场的偏振度均为 1, 即两点处的光场均是完全偏振的。进一步考虑光场的偏振态分布。此时, 两点处的光场均满足 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = \mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)$ 。即:

$$\begin{cases} B(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = S_x(\mathbf{r}, \omega) \\ C(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = S_y(\mathbf{r}, \omega) \\ D(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = W_{xy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) \end{cases}, \quad (26)$$

利用(26)式以及两点处光场的关联式(8), 并依据偏振椭圆长短轴的计算公式(16), 可以得出偏振椭圆长短

轴与线性关系的关联表达式:

$$A_{1,2}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ S_x(\mathbf{r}_1) + \frac{|\beta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2}{|\beta_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2} S_x(\mathbf{r}_1) \pm \sqrt{S_x^2(\mathbf{r}_1) \left[1 - \frac{|\beta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2}{|\beta_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2} \right]^2 + 4 \frac{|\beta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2}{|\beta_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2} \cos^2 [\theta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)]} \right\}^{1/2}, \quad (27)$$

$$A_{1,2}(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ S_x(\mathbf{r}_2) + \frac{|\beta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2}{|\beta_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2} S_x(\mathbf{r}_2) \pm \sqrt{S_x^2(\mathbf{r}_2) \left[1 - \frac{|\beta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2}{|\beta_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2} \right]^2 + 4 \frac{|\beta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2}{|\beta_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2} \cos^2 [\theta_{xy}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)]} \right\}^{1/2}, \quad (28)$$

式中, $\beta_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ 由(9)式决定, $\theta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)$ 是 \mathbf{r}_1 点处 xy 分量间么模相干度 $\mu_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)$ 的相位, $\theta_{xy}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)$ 是 \mathbf{r}_2 点处 xy 分量间么模相干度 $\mu_{xy}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)$ 的相位。

令

$$\begin{cases} \alpha_{xy} = \frac{|\beta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2}{|\beta_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2} = \frac{S_y(\mathbf{r}_1, \omega)}{S_x(\mathbf{r}_1, \omega)} \\ \gamma_{xy} = \frac{|\beta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2}{|\beta_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2} = \frac{S_y(\mathbf{r}_2, \omega)}{S_x(\mathbf{r}_2, \omega)} \end{cases}, \quad (29)$$

利用(27)~(29)式, 两点处光场的偏振椭圆的椭圆率表示为:

$$\varepsilon(\mathbf{r}_1) = \frac{1 + \alpha_{xy} - \sqrt{(1 - \alpha_{xy})^2 + 4\alpha_{xy} \cos^2 [\theta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)]}}{1 + \alpha_{xy} + \sqrt{(1 - \alpha_{xy})^2 + 4\alpha_{xy} \cos^2 [\theta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)]}}, \quad (30)$$

$$\varepsilon(\mathbf{r}_2) = \frac{1 + \gamma_{xy} - \sqrt{(1 - \gamma_{xy})^2 + 4\gamma_{xy} \cos^2 [\theta_{xy}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)]}}{1 + \gamma_{xy} + \sqrt{(1 - \gamma_{xy})^2 + 4\gamma_{xy} \cos^2 [\theta_{xy}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)]}}. \quad (31)$$

因为参量 α_{xy} 和 γ_{xy} 的数值分别与各点光场分量间光谱密度之比有关, 所以这两个参量之间并无关联, 并且相位角 $\theta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)$ 和 $\theta_{xy}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)$ 分别与各点光场分量间的相位差有关, 同样这两个参量之间并无关联, 因此从(30)、(31)式可得, 这两点处光场偏振态的椭圆率并不一致。这一点与 Wolf 定义的完全相干所蕴含的偏振特性不同。利用(26)式以及两点处光场的关联式(8), 并依据偏振椭圆方位角的计算公式(16), 可得偏振椭圆方位角的表达式为:

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{2} \arctan \left\{ \frac{2\sqrt{\alpha_{xy}} \cdot \cos [\theta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)]}{1 - \alpha_{xy}} \right\}, \quad (32)$$

$$\varphi(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \arctan \left\{ \frac{2\sqrt{\gamma_{xy}} \cdot \cos [\theta_{xy}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)]}{1 - \gamma_{xy}} \right\}. \quad (33)$$

从(8)式和(16)式, (32)式和(33)式同样可以得出, 这两点处光场的偏振椭圆的方位角并不一致。因此, 最终得出结论: 若根据 Setälä 定义的相干度, 当两点处光场完全相干时, 对应着各点的偏振度等于 1, 即这两点处的光场均是完全偏振的。但是这两点光场的偏振态并不一致, 无论是长短轴的绝对数值、偏振椭圆的椭圆率或是偏振椭圆的方位角, 并且它们的偏振态参量间并无关联。这个结论进一步揭示了 Setälä 的相干度定义与偏振特性的内在关联。

4.2 模拟仿真与讨论

根据 4.1 节的分析得知, 若是 Setälä 定义的相干度, 其完全相干对应着两点光场的偏振态并不一致, 并且由(30)~(33)式可知偏振椭圆的椭圆率和方位角是由各点光场分量间的光谱密度之比 α_{xy} 以及相位差决定的。在相干光学理论中, 相干与偏振统一归结于光场的二阶统计特性, 通过对传输过程中任意一点的 CSDM 测量, 可以确定包含空间相干度、光谱密度、偏振度与偏振态等的一系列参数, 这些表征光场性质的参数在自由空间或传输介质中的变化规律是当前研究的一个重要方向^[14-17]。为了深入探寻偏振性质与相干性质的内在联系, 考察椭圆率和方位角随着光谱密度之比以及相位差的变化, 仿真图如图 1~4 所示。

图 1 所示的是椭圆率与光场两分量间光谱密度之比的变化关系, 图中点划线对应分量间相位差为 $\pi/3$

的情况;点线和虚线分别对应相位差为 $4\pi/3$ 和 $\pi/2$ 的情况,其中点线和点划线在图中是完全重合的,根据(30)式也很容易得出此结论;实线对应着相位差为 $3\pi/4$ 的情形。图 2 所示的是在谱密度之比固定的情况下,椭圆率与光场两分量间相位差的变化关系,其中点划线、虚线、点线和实线分别对应谱密度之比 α_{xy} 为 0.1、0.5、5 和 10 的情况。由图 1 和图 2 可得:随着光谱密度之比的增大,偏振椭圆的椭圆率增大,直到光谱密度之比为 1,超过这个值后,随着谱密度之比的增大,偏振椭圆的椭圆率随之减小。并且椭圆率曲线只有在相位差是 $\pi/2$ 的奇数倍而且谱密度之比为 1 的时候,才可以取最大值 1,这种情况恰好对应着圆偏振的情况;而其他相位差以及其他谱密度之比的情况下,椭圆率的最大值一定小于 1;并且随着相位差的变化,偏振椭圆的椭圆率是周期性变化的,其周期是 π 。当两分量间相位差为 π 的整数倍,包括 0 的时候,此时无论谱密度之比为多少,椭圆率恒为 0,这种情况恰好对应着线偏振的情况^[14]。

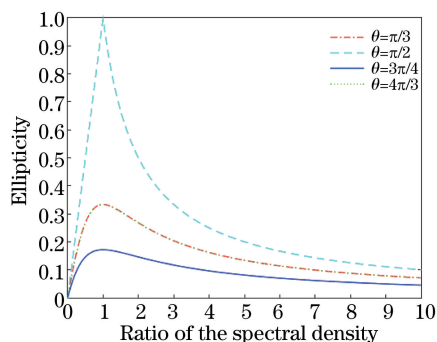


图 1 两分量间光谱密度之比与椭圆率的关系
Fig. 1 Relationship between the ellipticity and spectral densities ratio of two components

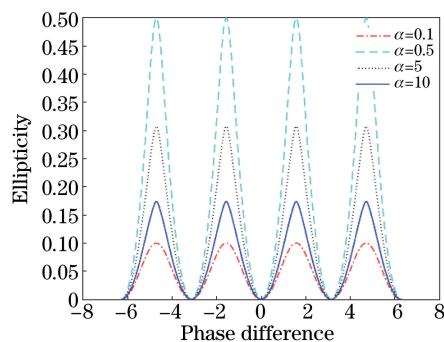


图 2 两分量间相位差与椭圆率的关系
Fig. 2 Relationship between the ellipticity and phase difference of two components

图 3 所示的是方位角与光场两分量间光谱密度之比的变化关系,其中参量以及线型的设置与图 1 相同。由图 3 可得:随着光谱密度之比的增大,偏振椭圆的方位角从 0 开始增大,也就是逐渐远离 x 轴,直到光谱密度之比为 1,在这个过程中,若相位差位于 $(0, \pi/2)$ 和 $(3\pi/2, 2\pi)$ 之间,那么此时方位角为正,即椭圆长轴位于 1,3 象限,若相位差位于 $(\pi/2, 3\pi/2)$ 之间,这时方位角为负,即椭圆长轴位于 2,4 象限。当光谱密度之比增大到 1 的时候,方位角会发生突变,长轴方向由 1,3 象限转至 2,4 象限或者由 2,4 象限转至 1,3 象限。紧接着,随着谱密度之比的增大,偏振椭圆的方位角又逐渐地靠近 x 轴。而且从图中也可以看出,当两分量间相位差等于 $\pi/2$ 的时候,方位角恒为 0,即此时为长短轴位于 x 轴的正椭圆,若光谱密度之比为 1 时,对应着圆偏振。

图 4 所示的是当谱密度之比固定的情况下,方位角与光场两分量间相位差之间的变化关系,其中参量以及线型的设置与图 2 相同。由图 4 可得:随着相位差的变化,偏振椭圆的方位角的变化也是周期性的,只是与椭圆率不同,其周期是 2π 。而且光谱密度限制的是方位角的最大值,并不限制方位角极值所对应的横坐标的值。与图 3 的分析一致,当光谱密度之比小于 1 的时候,若相位差位于 $(0, \pi/2)$ 和 $(3\pi/2, 2\pi)$ 之间,方位角为正,若相位差位于 $(\pi/2, 3\pi/2)$ 之间,方位角为负;当光谱密度之比大于 1 的时候,规律正好相反。最后,从图中

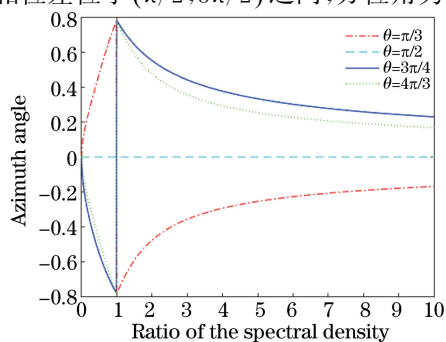


图 3 两分量间光谱密度之比与方位角的关系
Fig. 3 Relationship between azimuth angle and spectral densities ratio of two components

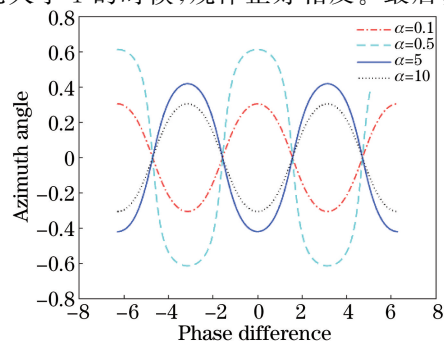


图 4 两分量间相位差与方位角的关系
Fig. 4 Relationship between azimuth angle and phase difference of two components

可以看出,当相位差为 $\pi/2$ 的奇数倍的时候,对应着方位角为 0,也就是长短轴位于 x 轴的正椭圆的情况。

5 结 论

通过利用矢量光场两种不同的相干度定义下完全相干所对应的统计相似特性,分别对 Wolf 定义下的完全相干以及 Setälä 定义下完全相干特性与偏振特性的内在关联进行研究,包括其完全相干所对应的偏振度以及完全偏振部分的偏振态分布特征。结果发现:1)根据 Wolf 定义的相干度,当两点处光场完全相干时,这两点处光场的偏振度是任意的,可以是完全偏振的、部分偏振的或者是完全非偏振的,但是它们的偏振度以及这两点处的交叉偏振度完全相等,而且这两点光场完全偏振部分的偏振态也完全一致;2)根据 Setälä 定义的相干度,当两点处光场完全相干时,对应着各点的偏振度均等于 1,即这两点处的光场均是完全偏振的,此时矢量光场下完全相干一定对应着完全偏振,但是这两点光场的偏振态并不一致,无论是长短轴的绝对数值、偏振椭圆的椭圆率或是偏振椭圆的方位角,而且它们之间并无特定的联系;3)基于 Wolf 的相干度定义,光场空间两点间的完全相干与这两点间的“一致偏振”相对应,而基于 Setälä 的相干度定义,两点间的完全相干则与这两点的“完全偏振”相对应。仿真实验证实了公式的正确性,且结论进一步揭示了矢量光场中两种不同的相干度定义的区别与联系,以及其与偏振特性的内在关联。

参 考 文 献

- 1 Wolf E. Statistical similarity as a unifying concept of the theories of coherence and polarization of light[J]. Optics Communications, 2010, 283(22): 4427-4429.
- 2 Lahiri M, Wolf E. Implications of complete coherence in the space-frequency domain[J]. Optics Letters, 2011, 36(13): 2423-2425.
- 3 Chen J, Chen Y, Chen F, *et al.* Physical significance of complete coherence and complete polarization of random electromagnetic beams in the space-frequency domain[J]. Optics and Laser Technology, 2013, 47(7): 174-178.
- 4 Chen J, Lu R S, Chen F, *et al.* Cross-spectrally pure light, cross-spectrally pure fields and statistical similarity in electromagnetic fields[J]. Journal of Modern Optics, 2014, 61(14): 1164-1173.
- 5 Voipio T, Setälä T, Friberg A T. Statistical similarity and complete coherence of electromagnetic fields in time and frequency domains[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2015, 32(5): 741-750.
- 6 Zernike F. The concept of degree of coherence and its application to optical problems[J]. Physica, 1938, 5(8): 785-795.
- 7 Wolf E. Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams[J]. Physics Letters A, 2003, 312(5-6): 263-267.
- 8 Setälä T, Tervo J, Friberg A T. Complete electromagnetic coherence in the space-frequency domain[J]. Optics Letters, 2004, 29(4): 328-330.
- 9 Wolf E. Comment on 'Complete electromagnetic coherence in the space-frequency domain'[J]. Optics Letters, 2004, 31(19): 1712-1713.
- 10 Martínez-Herrero R, Mejías P M. Relation between degrees of coherence for electromagnetic fields[J]. Optics Letters, 2007, 32(11): 1504-1506.
- 11 Tervo J, Setälä T, Friberg A T. Phase correlations and optical coherence[J]. Optics Letters, 2012, 37(2): 151-153.
- 12 Shirai T, Wolf E. Correlations between intensity fluctuations in stochastic electromagnetic beams of any state of coherence and polarization[J]. Optics communications, 2007, 272(2): 289-292.
- 13 Korotkova O, Wolf E. Changes in the state of polarization of a random electromagnetic beam on propagation[J]. Optics communications, 2005, 246(1): 35-43.
- 14 Born M, Wolf E. Principles of optics[M]. Yang Jiasun Transl. Beijing: Science Press, 1978.
玻 恩, 沃尔夫. 光学原理[M]. 杨葭孙译. 北京: 科学出版社, 1978.
- 15 Chen Feinan, Qi Jun, Chen Jingjing, *et al.* Propagation characteristics of spectral degrees of cross-polarization of quasi-homogenous beams[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(9): 25-33.
陈斐楠, 戚 俊, 陈晶晶, 等. 准均匀光束交叉偏振度传输特征分析[J]. 光学学报, 2015, 35(9): 25-33.
- 16 Pu Huan, Ji Xiaoling, Yang Ting. Spatial coherence of partially coherent annular beams in oceanic turbulence[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(s1): s101002.
蒲 欢, 季小玲, 杨 婷. 海洋湍流中部分相干环状光束的空间相干性[J]. 光学学报, 2015, 35(s1): s101002.
- 17 Ke Xizheng, Han Meimiao, Wang Mingjun. Spreading and wander of partially coherent beam propagating along a horizontal-path in the atmospheric turbulence[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(11): 1106003.
柯熙政, 韩美苗, 王明军. 部分相干光在大气湍流中水平传输路径上的展宽与漂移[J]. 光学学报, 2014, 34(11): 1106003.