

角反射器的理论计算

焦仲科^{1,2} 岳永坚¹ 刘博¹

¹中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209; ²中国科学院大学, 北京 100049

摘要 理论推导了三角形角反射器、圆形角反射器、六边形角反射器能够正常工作的最大入射角; 推导出三类角反射器在不同入射条件下, 有效反射面积的计算方法。进一步分析了各类角反射器的最大入射角、有效反射面积, 为合作目标角反射器阵列的设计、回波能量的计算和远场衍射光斑的研究等提供了理论依据。

关键词 光学器件; 角反射器; 激光雷达; 有效反射面积; 入射角

中图分类号 O435 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201535.s123001

Theoretical Calculations of Cube Corner Retro-Reflector

Jiao Zhongke^{1,2} Yue Yongjian¹ Liu Bo¹

¹Institute of Optics Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China

²University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract Maximum incident angles of triangular circular and hexagonal retro-reflector in different incident parameters and the calculations of the effective reflection area of different reflectors in different incident parameters are derived. Comparisons are made between different reflectors. The calculations of maximum incident angle and effective reflection area provid theoretical foundation for the design of corner retro-reflector array, the calculation of echo energy and the study of far-field diffraction spot.

Key words optical devices; corner retro-reflector; lidar; effective reflection area; incident angle

OCIS codes 230.5480; 280.3640; 350.0350

1 引言

角反射器是一种特殊的逆向反射器, 具有空间定向反射特性, 广泛应用于激光雷达中, 作为合作目标, 可以显著增加作用距离和提高测距精度, 并广泛用于卫星精确定轨、地球物理或大气研究、自由空间激光通信、激光跟踪与扫描、导弹与人造卫星等的激光测距、空间精密测量等^[1-6]。事实上, 角反射器并非对任何入射光线都具有空间定向反射特性。只有当入射光线的入射角在一定范围内且角反射器的有效反射面积大于 0 时, 角反射器才正常工作。本文推导出不同角反射器的最大入射角及有效反射面积的计算公式, 同时, 研究了实心角反射器用于测距时的补偿距离。

2 前提设定

角反射器是由三个相互垂直的反射面和一个入(出)射面构成的锥状棱镜, 底面形状为三角形的角反射器为最基本的角反射器, 经切除变成以圆形和正六边形为底面的角反射器, 其尺寸关系如图 1。

O 为角反射器的顶点; 直角边长 $\overline{OA} = a$; 顶点到底面的距离 $\overline{OO_0} = h$; 圆 O_0 的半径为 r ; $\triangle ABC$ 、圆 O_0 、六边形 $DEFGHI$ 均为入(出)射面, 即角反射器的底面, 其中圆 O_0 与 $\triangle ABC$ 、六边形 $DEFGHI$ 均相切。设入射光线的入射角为 i , 方位角为 φ , 折射角为 i_0 , 角反射器的折射率为 n , 工作环境的折射率为 n_0 , 顶点投影点的偏移量为 δ , 出射点投影点的偏移量为 2δ 。经计算证明得: $h = \sqrt{3}/(3a)$; $r = \sqrt{6}/(6a)$; $\delta = h \tan i_0$; $\tan i_0 =$

收稿日期: 2015-01-13; 收到修改稿日期: 2015-03-05

作者简介: 焦仲科(1988—), 男, 博士研究生, 主要从事激光雷达等方面的研究。E-mail: jiaozhongke2008@163.com

导师简介: 刘博(1979—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事激光雷达方面的研究。E-mail: boliu@ioe.ac.cn

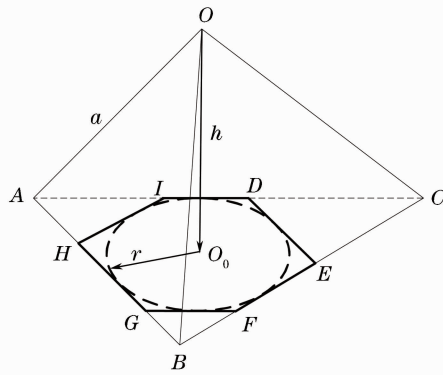


图 1 各类角反射器尺寸关系

Fig. 1 Relationship of dimensions between different corner retro-reflectors

$\sin i / \sqrt{(n/n_0)^2 - \sin^2 i}$; $\triangle ABC$ 的边长 $\overline{AB} = \sqrt{2}a$; 正六边形 $DEFGHI$ 的边长 $\overline{DE} = \sqrt{2}/(3a)$ 。

3 三角形角反射器

3.1 最大入射角计算

角反射器的有效反射面积指底面关于顶点对称的面沿内部入射光线反方向在底面的投影与底面的公共面积^[7-10], 见图 2 中的阴影部分。入射光线的方位角为过底面中心的入射光线在底面的投影与 AO_0 的夹角, 如图 2 中的 φ 。

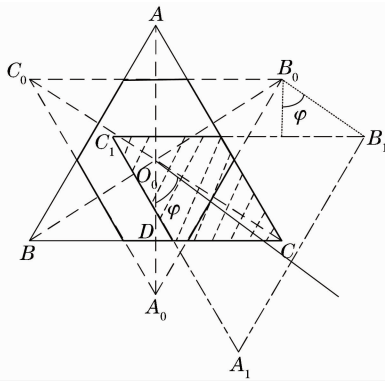


图 2 最大入射角

Fig. 2 Maximum incident angle

角反射器正常工作的条件是有效反射面积大于 0, 因此入射角存在最大值, 此时有效反射面积为 0。三角形角的底面具有对称性与周期性, 因此现只分析 $-\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/3$ 的入射光线, 当 B_1C_1 与 BC 重合时, 有效反射面积为 0, 因此入射角满足 $\overline{B_0B_1} \cos \varphi \leq 2/3 \overline{AD}$, 即

$$i_{\max} = \arcsin \frac{n}{n_0 \sqrt{2 \cos^2 \varphi + 1}} \quad (-\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/3). \quad (1)$$

3.2 有效反射面积计算

光线垂直入射时, 三角形角反射器的有效反射面积最大, 如图 3 所示。最大有效反射面积为

$$S_{\text{effective-max}} = S_{DEFGHI} = \sqrt{3}/(3a)^2. \quad (2)$$

光线倾斜入射时, 设入射光线的入射角为 i , 方位角为 $\varphi (0 \leq \varphi \leq \pi/3)$, 折射角为 i_0 , 此时, 三角形角反射器的有效反射面积减小。当入射角较小时, 三角形角反射器的有效反射面积为六边形, 如图 4 所示; 当入射角较大时, 三角形角反射器的有效反射面积为平行四边形, 如图 5 所示。

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} - \arccos \frac{\sqrt{2} \sqrt{(n/n_0)^2 - \sin^2 i}}{4 \sin i} \text{ 或 } 0 \leq i \leq \arcsin \frac{n}{n_0 \sqrt{8 \cos^2 (\pi/3 - \varphi) + 1}} \text{ 时, 三角形角反射器的有}$$

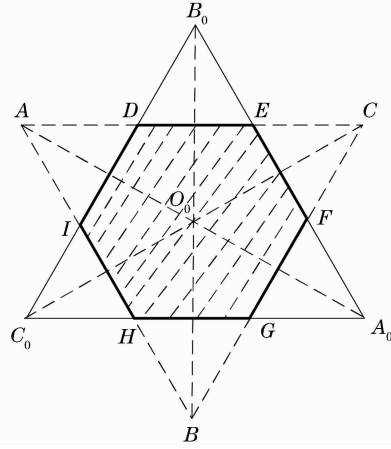


图 3 三角形角反射器最大有效反射面积

Fig. 3 Maximum effective area of triangle corner retro-reflector

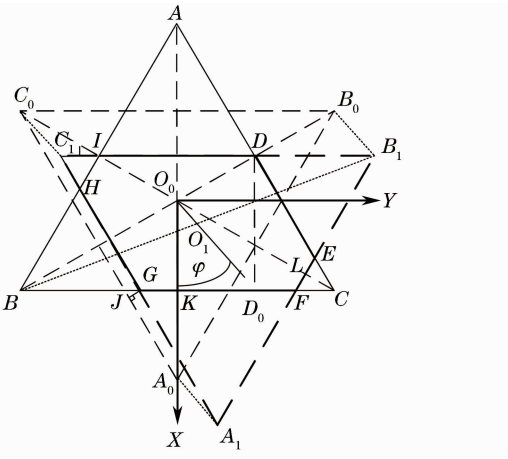


图 4 三角形角反射器的六边形有效反射面积

Fig. 4 Hexagonal effective area of triangle corner retro-reflector

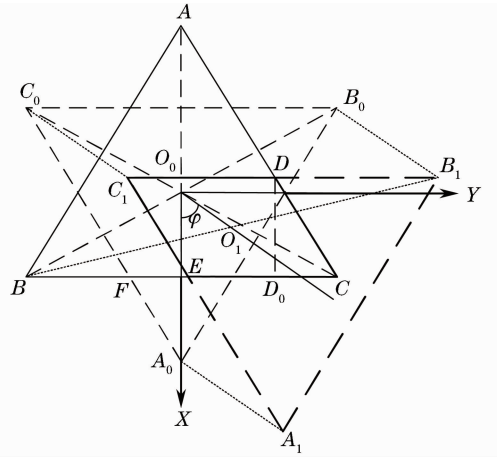


图 5 三角形角反射器的四边形有效反射面积

Fig. 5 Quadrilateral effective area of triangle corner retro-reflector

有效反射面积 $S_{\text{effective11}} = S_{\text{DEFGHI}} \cos i = (S_{C_1 DCG} - 2S_{\text{CEF}}) \cos i$, 即

$$S_{\text{effective11}} = \frac{\sqrt{3}a^2 \cos i (3n_0^2 \sin^2 i - n^2)}{3n_0^2 \sin^2 i - 3n^2}. \quad (3)$$

当 $\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{\sqrt{2} \sqrt{(n/n_0)^2 - \sin^2 i}}{4 \sin i} < \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ 或 $\arcsin \frac{n}{n_0 \sqrt{8 \cos^2(\pi/3 - \varphi) + 1}} < i \leq \arcsin \frac{n}{n_0 \sqrt{2 \cos^2 \varphi + 1}}$

时, 三角形角反射器的有效反射面积为 $S_{\text{effective11}} = S_{C_1 DCG} = \overline{DD_0} \cdot \overline{C_1 D}$, 即

$$S_{\text{effective11}} = S_{C_1 DCE} = -\cos i \left[-\frac{4\sqrt{3}}{9}a^2 + \frac{a^2 \sin i (2\sqrt{6}/9 \cos \varphi + 2\sqrt{2}/3 \sin \varphi)}{\sqrt{(n/n_0)^2 - \sin^2 i}} + \frac{a^2 \sin^2 i (4/3 \sin \varphi \cos \varphi - 4\sqrt{3}/9 \cos^2 \varphi)}{\sin^2 i - (n/n_0)^2} \right]. \quad (4)$$

三角形角反射器底面具有周期性与对称性, 因此

$$S_{\text{effective12}}(\varphi) = S_{\text{effective11}}(2\pi/3 - \varphi) \quad (\pi/3 < \varphi \leq 2\pi/3), \quad (5)$$

$$S_{\text{effective1}}(\varphi) = \begin{cases} S_{\text{effective11}}(\varphi) & (0 \leq \varphi \leq \pi/3) \\ S_{\text{effective12}}(\varphi) & (\pi/3 < \varphi \leq 2\pi/3) \end{cases}, \quad (6)$$

$$S_{\text{effective2}}(\varphi) = S_{\text{effective1}}(\varphi - 2\pi/3) \quad (2\pi/3 \leq \varphi \leq 4\pi/3), \quad (7)$$

$$S_{\text{effective3}}(\varphi) = S_{\text{effective1}}(\varphi - 4\pi/3) \quad (4\pi/3 \leq \varphi \leq 2\pi). \quad (8)$$

4 圆形角反射器

圆形角反射器是在三角形角反射器的基础上加工而成,入(出)射面为圆形,该圆与三角形角反射器的底面三角形相切。圆形角反射器是从基本角反射器演变而来的,因此也具有基本的光学特性。

4.1 最大入射角计算

圆形角反射器正常工作的条件是有效反射面积大于0,即入射光线的入射角有一定的范围限制,最大入射角及有效反射面积的计算如图6所示。

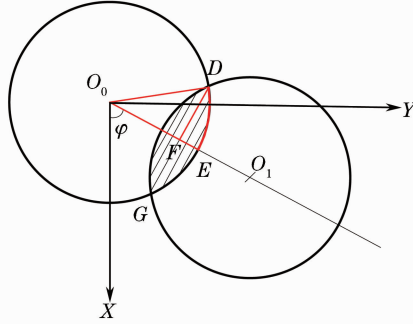


图6 圆形角反射器的最大入射角及有效反射面积

Fig. 6 Maximum incident angle and effective area of circular corner retro-reflector

有效反射面积大于0等价于图6中阴影部分的面积大于0,即 $\overline{O_0O_1} \leq 2r$,又因 $\overline{O_0O_1} = 2\delta$,故 $\delta \leq r$,化简有

$$i_{\max} = \arcsin \frac{\sqrt{3}n}{3n_0}. \quad (9)$$

从(9)式可知,圆形角反射器的最大入射角只与 n, n_0 有关,与入射光线的方位角 φ 无关,该特性是由圆形角反射器底面的对称性决定的。

4.2 有效反射面积计算

圆形角反射器的底面关于圆心对称,所以圆形角反射器的有效反射面积与入射光线的方位角无关。当 $i > i_{\max}$ 时, $S_{\text{effective}} = 0$,角反射器不能正常工作;当 $i \leq i_{\max}$ 时,角反射器正常工作,有效反射面积为图6中阴影部分,即 $S_{\text{effective}} = 4(S_{O_0DE} - S_{\Delta O_0DF}) \cos i$,其中 $S_{\Delta O_0DF} = \frac{1}{2\delta \sqrt{r^2 - \delta^2}}$, $S_{O_0DE} = \frac{1}{2}r^2 \arccos\left(\frac{\delta}{r}\right)$,整理得

$$S_{\text{effective}} = \frac{1}{3}a^2 \cos i \arccos \left[\frac{\sqrt{2} \sin i}{\sqrt{(n/n_0)^2 - \sin^2 i}} \right] - \frac{2a \sin i \cos i \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2 \sin^2 i}{(n/n_0)^2 - \sin^2 i}}}{3 \sqrt{(n/n_0)^2 - \sin^2 i}}. \quad (10)$$

5 正六边形角反射器

正六边形角反射器也是在三角形角反射器的基础上加工而成的,入(出)射面为正六边形。正六边形角反射器是从基本角反射器演变而来的,因此也具有基本的光学特性。正六边形角反射底面具有周期性与对称性,因此,只需考虑计算 $0 \leq \varphi \leq \pi/6$ 时的最大入射角和有效反射面积。

5.1 最大入射角计算

正六边形角反射器正常工作的条件是有效反射面积大于0,即入射光线的入射角有一定的范围限制,最大入射角的计算如图7所示。

有效反射面积大于0时,角反射正常工作,有效反射面积恰为0时,入射角最大,即满足条件为 $\overline{OO_0} \cos \varphi \leq 2r$,代入已知条件可得

$$i_{\max} = \arcsin \left[\frac{n}{n_0 \sqrt{2 \cos^2 \varphi + 1}} \right] \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/6). \quad (11)$$

由(1)式及(11)式可知,正六边形角反射器和三角形角反射器的最大入射角计算公式是一致的,但是两者取最大入射角时的方位角不同,且最大入射角值也不同。

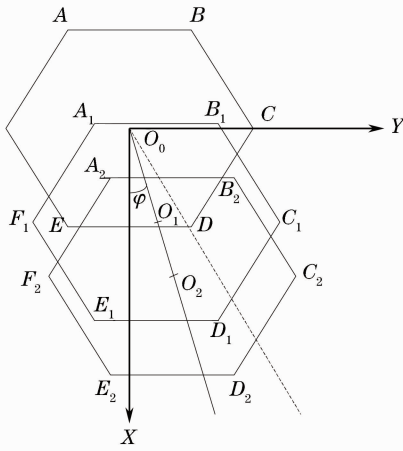


图 7 六边形角反射器的最大入射角

Fig. 7 Maximum incident angle of hexagon corner retro-reflector

5.2 有效反射面积计算

5.2.1 六边形有效反射面积

由图 7 可知,入射角较小时,正六边形角反射器的有效反射面积为六边形;入射角较大时,有效反射面积为平行四边形。图 8 中正六边形角反射器的有效反射面积为六边形 A_1B_1MDEH ,其中 $\overline{BK} = r, \overline{BG} = \overline{BK} / \cos(\pi/3 - \varphi) = r / \cos(\pi/3 - \varphi)$ 。

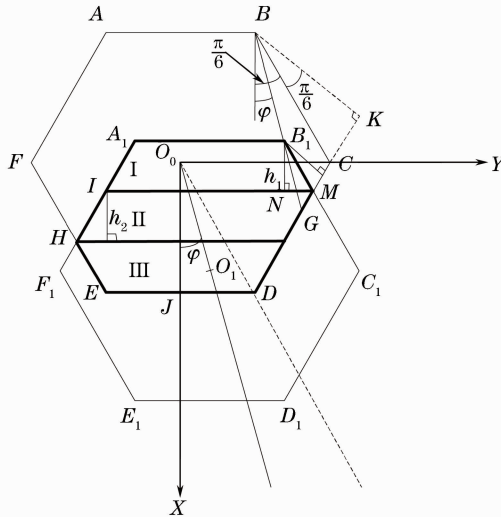


图 8 正六边形角反射器的六边形有效反射面积

Fig. 8 Hexagonal effective area of hexagon corner retro-reflector

当 $\overline{BB_1} \leq \overline{BG}$ 时,有效反射面积为六边形,代入已知条件可得

$$i \leq \arcsin \frac{n}{n_0 \sqrt{8\cos^2(\pi/3 - \varphi) + 1}} \tag{12}$$

$h_1 = \overline{BK} - \overline{BB_1} \cos(\pi/3 - \varphi) = r - 2\delta \cos(\pi/3 - \varphi)$; $S_1 = \overline{A_1B_1} \times h_1 + \sqrt{3}/3 h_1^2$, $\overline{IM} = \overline{A_1B_1} + 2h_1/\sqrt{3}$, $h_2 = 2r - 2\delta \cos \varphi - 2h_1$, $S_{II} = \overline{IM} \times h_2$, $S_{\text{effective}1} = S_{A_1B_1MDEH} \cos i = (S_1 + S_{II} + S_{III}) \cos i = (2S_1 + S_{II}) \cos i$, 整理得

$$S_{\text{effective}1} = \left\{ a^2 \cos i \left[3\sqrt{3}n^2 - 3\sqrt{3}n_0^2 \sin^2 i + 8\sqrt{3}n_0^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) \cos \varphi \sin^2 i - 8\sqrt{3}n_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) \sin^2 i - 4\sqrt{6}n_0^2 \cos \varphi \sin i \sqrt{(n/n_0)^2 - \sin^2 i} \right] / [9(n^2 - n_0^2 \sin^2 i)] \right\} \tag{13}$$

5.2.2 有效反射面积为平行四边形

当 B_1 移动至六边形 $ABCDEF$ 外时,有效反射面为平行四边形 A_1HDI ,如图 9 所示,此时的入射角满

$$\text{是 } \arcsin \frac{n}{n_0 \sqrt{8\cos^2(\pi/3-\varphi)+1}} \leq i \leq i_{\max}。$$

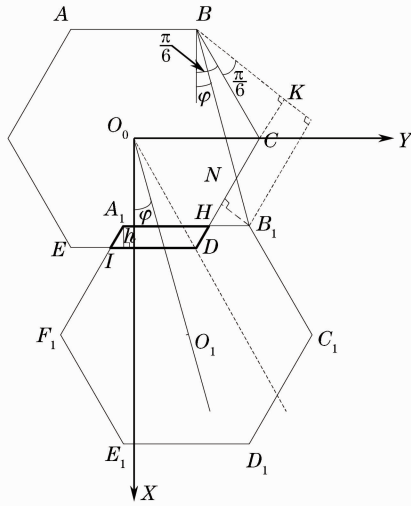


图 9 正六边形角反射器的四边形有效反射面积

Fig. 9 Quadrilateral effective area of hexagon corner retro-reflector

$$h = 2r - 2\delta \cos \varphi, \overline{B_1 H} = \frac{\overline{BB_1} \cos(\pi/3 - \varphi) - \overline{BK}}{\sin(\pi/3)} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \delta \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3} r, S_{\text{effective1}} = (\overline{A_1 B_1} - \overline{B_1 H})$$

$h \cos i$, 整理得

$$S_{\text{effective1}} = \left[\frac{2\sqrt{2}a}{3} - \frac{4a \sin i \sin(\pi/6 + \varphi)}{3 \sqrt{(n/n_0)^2 - \sin^2 i}} \right] \left[\frac{\sqrt{6}a}{3} - \frac{2\sqrt{3}a \sin i \cos \varphi}{3 \sqrt{(n/n_0)^2 - \sin^2 i}} \right] \cos i. \quad (14)$$

当 $\pi/6 < \varphi \leq \pi/3$ 时, $S_{\text{effective2}}(\varphi) = S_{\text{effective1}}(\pi/3 - \varphi)$, 故

$$S_{\text{effective}}(\varphi) = \begin{cases} S_{\text{effective1}}(\varphi) & (0 \leq \varphi \leq \pi/6) \\ S_{\text{effective2}}(\varphi) & (\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/3) \end{cases}, \quad (15)$$

$$S_{\text{effectiveN}}(\varphi) = S_{\text{effective}}(\varphi - N\pi/3) \quad (\pi/3 \leq \varphi \leq 2\pi, N = 1, 2, \dots, 5). \quad (16)$$

6 最大入射角及有效反射面积的对比分析

取 $n = 1.463, n_0 = 1$, 方位角 $0 \leq \varphi \leq \pi/3$, 则各类角反射器的最大入射角随方位角的变化关系如图 10 所示。整体来看, 角反射器的最大入射角均大于 57.6° , 其中三角形角反射器的最大入射角最大, 圆形角反射器的最大入射角最小。

$n = 1.463$ 且方位角一定时, 各类角反射器的有效反射面积随入射角的变化规律如图 11 所示; 三角形角

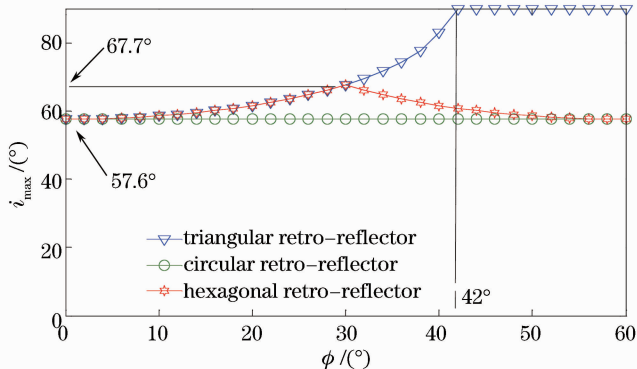


图 10 不同角反射器的最大入射角

Fig. 10 Maximum incident angles of different reflectors

反射器与六边形角反射器的有效反射面积同时随入射角和方位角的变化规律如图 12 所示。

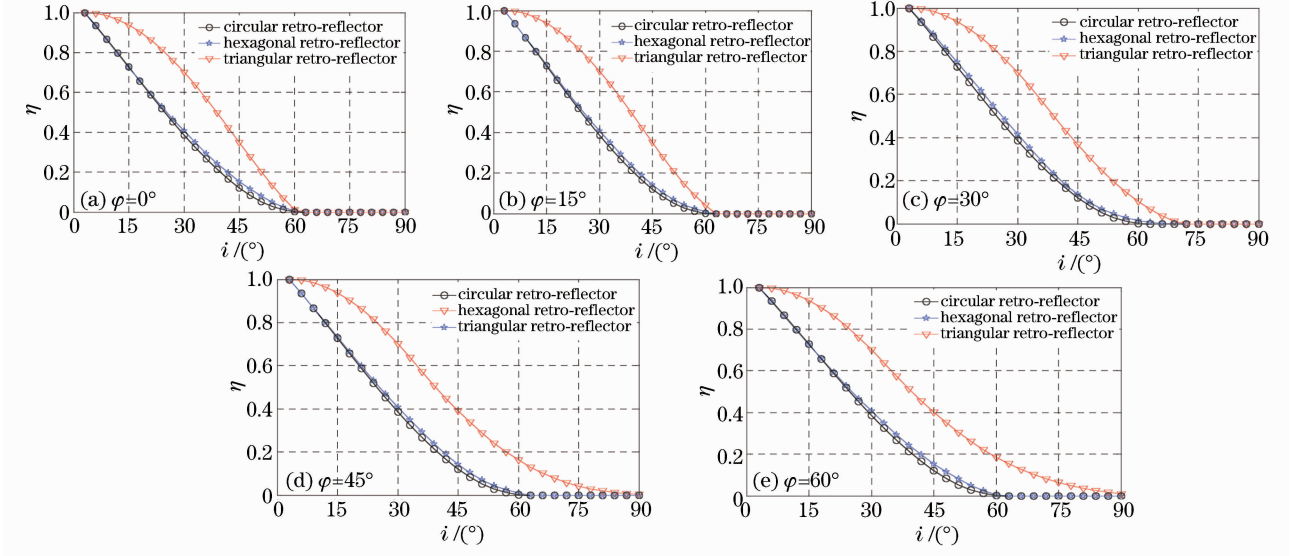


图 11 有效反射面积与入射角及方位角的关系

Fig. 11 Relationship between effective area and incident and azimuth angles

各类角反射器在不同的入射条件下, 相对有效反射面积数据如表 1 所示, 有效反射面积对比如图 12 所示。

表 1 不同入射条件下相对有效反射面积的对比

Table 1 Comparison of relative effective area on different incident conditions

n	$\varphi /(^{\circ})$	$i /(^{\circ})$	η		
			Triangle /%	Hexagon /%	Circular /%
1.463	0	0	100.00	100.00	100.00%
		15	90.35	65.93	65.67
		30	63.70	34.85	32.50
		45	27.60	11.47	8.42
		60	0.00	0.00	0.00
		75	0.00	0.00	0.00
		90	0.00	0.00	0.00
1.463	15	0	100.00	100.00	100.00
		15	90.35	66.49	65.67
		30	63.70	34.83	32.50
		45	27.86	10.38	8.42
		60	0.00	0.00	0.00
		75	0.00	0.00	0.00
		90	0.00	0.00	0.00
1.463	30	0	100.00	100.00	100.00
		15	90.35	68.24	65.67
		30	63.70	35.17	32.50
		45	30.53	9.89	8.42
		60	6.70	0.67	0.00
		75	0.00	0.00	0.00
		90	0.00	0.00	0.00

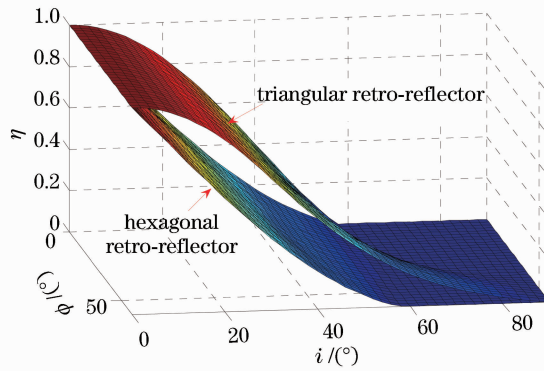


图 12 有效反射面积对比

Fig. 12 Comparison of effective areas

7 结 论

- 1) 角反射器的最大入射角与折射率 n 成正比关系, n 越大, 最大入射角越大;
- 2) 圆形角反射器的最大入射角与入射光线的方位角无关;
- 3) 对于三角形角反射器, 当方位角大于 42° 时, 入射角可达 90° ;
- 4) 假设入射光线在底面的投影经过底面中心, 对于三角形与正六边形角反射器, 当投影垂直于底面边时, 最大入射角最小, 当经过某边的端点时, 最大入射角最大, 即从垂直于底面某边的方位角到经过某边端点的方位角, 最大入射角逐渐增大;
- 5) 同一入射条件下, 三角形角反射器的有效反射面积远大于正六边形角反射器的有效反射面积, 正六边形角反射器的有效反射面积大于圆形角反射器的有效反射面积;
- 6) 圆形与正六边形角反射器的有效反射面积随入射角的变化剧烈, 接近于线性变化, 三角形角反射器的有效反射面积随入射角的变化较平缓;
- 7) 方位角对三角形角反射器的有效反射面积的影响较大, 对正六边形角反射器的影响较小, 对圆形角反射器没有影响。

参 考 文 献

- 1 Minott P O. Measurement of the lidar cross sections of cube corner arrays for laser ranging of satellites[J]. Unknow, 1974, 75: 20707.
- 2 Bender P, Currie D, Dicke R, *et al.*. The lunar laser ranging experiment[J]. Science, 1973, 182(4109): 229-238.
- 3 Ye Yidong, Peng Yong, Chen Tianjiang, *et al.*. Numerical simulating of cube corner retroreflector[J]. Acta Optica Sinica, 2003, 23(4): 485-490.
叶一东, 彭 勇, 陈天江, 等. 角锥后向反射器的数值模拟研究[J]. 光学学报, 2003, 23(4): 485-490.
- 4 Liu Wanli, Ouyang Jianfei, Qu Xinghua. Effect of incident laser beam angle varying on cube corner retro-reflector measurement accuracy [J]. Optics and Precision Engineering, 2008, 17(2): 286-291.
刘万里, 欧阳健飞, 曲兴华. 激光光束入射角度变化对角锥棱镜测量精度的影响[J]. 光学 精密工程, 2009, 17(2): 286-291.
- 5 Zhou Hui, Li Song, Zheng Guoxing. Structural design for common satellite retroreflector array[J]. Infrared and Laser Engineering, 2009, 38(4): 692-697.
周 辉, 李 松, 郑国兴. 常用卫星角反射器阵列的结构设计[J]. 红外与激光工程, 2009, 38(4): 692-697.
- 6 Nie Hui, Weng Xingtao, Li Song, *et al.*. The far-field diffractive characteristics of cube-corner prism[J]. Acta Optica Sinica, 2003, 23(12): 1470-1474.
聂 辉, 翁兴涛, 李 松, 等. 角锥棱镜的远场衍射特性[J]. 光学学报, 2003, 23(12): 1470-1474.
- 7 Li Song, Liu Bo. The calculation of the active reflecting area of the cube corner prism[J]. Journal of Geomatics, 2002, 27(4): 25-26, 27.
李 松, 刘 博. 角锥棱镜有效使用面积的计算[J]. 测绘信息与工程, 2002, 27(4): 25-26, 27.
- 8 声 远. 关于角体合作目标性质的理论计算[J]. 激光与红外, 1973, 3(12): 1-15.
- 9 扈荆夫, 李 鑫, 杨福民, 等. 星载激光反射器阵列的有效反射面积分布的计算 [J]. 中国科学 G 辑: 物理学、力学、天文学, 2004, 34(1): 114-120.
- 10 Arnold D A. Method of Calculating Retroreflector-Array Transfer Functions[R]. SAO Special Report, 1979: 382.