

非线性亥姆霍兹孤子守恒量及孤子特性研究

张冰志 陈志峰 邓荣标 黄 峰 郑艳华

广州大学 物理与电子工程学院, 广东 广州 510006

摘要 理论上详细推导了非线性亥姆霍兹方程的三个守恒量,其分别与傍轴近似下非线性薛定谔方程的三个守恒量(功率,哈密顿量,动量)对应。形式上,当忽略非线性亥姆霍兹方程中的非傍轴项时,其守恒量可自洽的简化到傍轴模型下的守恒量。另外,通过研究这些守恒量随着空间光孤子参数改变而变化特性,详细阐述了非傍轴非线性亥姆霍兹模型与傍轴非线性薛定谔模型的差异。特别发现非傍轴模型的引入可以有效地抑制傍轴模型下空间光孤子的哈密顿量与动量随着横向速度增大而发散的结果。

关键词 非线性光学; 守恒量; 光孤子; 非傍轴; 亥姆霍兹方程

中图分类号 O437 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201535.s119001

Study of Conserved Quantities and Characteristics of Nonlinear Helmholtz Solitons

Zhang Bingzhi Chen Zhifeng Deng Rongbiao Huang Feng Zheng Yanhua

School of Physics and Electric Engineering, Guangzhou University, Guangzhou, Guangdong 510006, China

Abstract Three conserved quantities of non-paraxial nonlinear Helmholtz equation are driven in theory, which are corresponding to the conserved quantities of nonlinear Schrödinger equation (power, Hamiltonian, momentum). Formally, these conserved quantities can be simplified as that of the paraxial model when the non-paraxial term is ignored. In addition, the difference between the non-paraxial nonlinear Helmholtz model and the paraxial nonlinear Helmholtz model by analyzing the variation characteristics of the conserved quantities with the change of parameters of optical spatial solitons is studied. Especially, it is found that the divergence results of the Hamiltonian and momentum of optical spatial solitons can be suppressed in the non-paraxial model when transverse speed increases in paraxial model.

Key words nonlinear optics; conserved quantities; optical solitons; non-paraxial; Helmholtz equation

OCIS codes 190.6135; 260.5950; 260.6042

1 引 言

早期人们利用非线性薛定谔方程模型研究克尔介质中光束自聚焦过程,发现(2+1)维光束自聚焦过程会导致光束灾难性的塌缩(焦点光强趋向无穷大),然而这个结果与实验结果并不相符^[1-3]。后来的研究表明这个塌缩是个非物理过程,原因来自于非线性薛定谔方程的傍轴近似在光束聚焦到很窄的时候已失效^[4-6]。自 Lax 等^[7]的关于非傍轴光传输的开创性工作以来,人们对非傍轴光束进行了深入研究。Lax 等引入一个非傍轴参数(光波长与光束宽度的比值),通过其幂指数级数展开来研究非傍轴光传输问题。当光束较宽时,可忽略此非傍轴参数,得到傍轴近似下的结果。而当光束的宽度与光的波长尺度相近时时候则将出现明显的非傍轴效应。例如,光束横向电场分量耦合到纵向电场分量,二维光束自聚焦过程光束坍塌的抑制等等。而近年来的研究发现,即使光束较宽,利用傍轴近似模型来研究非线性介质中光束以较大角度相互

收稿日期: 2015-01-18; **收到修改稿日期:** 2015-02-16

基金项目: 国家自然科学基金(11404071, 11204044)

作者简介: 张冰志(1983-),男,博士,副教授,主要从事非线性光学、光学信息处理方面的研究。

E-mail: zhang_bzh@gzhu.edu.cn

碰撞时也出现与非傍轴模型结果差异较大的结果^[8]。本文从非线性亥姆霍兹方程的守恒量出发,研究其大角度孤子守恒量与傍轴模型的大角度孤子的特性差异,并分析产生此差异的物理背景。

2 理论推导

在基于窄光束的非傍轴修正可以忽略,即麦克斯韦方程组中的光电场散度项可以忽略的情况下,而光电场对参考方向的二阶偏导项不忽略的情况下,便得到非线性亥姆霍兹方程^[9-10],如下:

$$\kappa \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + i \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + |u|^2 u = 0, \quad (1)$$

式中 ζ 和 ξ 分别是光束传输的纵向 z 和横向 x 的归一化尺度,满足

$$\zeta = \frac{z}{L_D}, \quad \xi = \frac{\sqrt{2}x}{\omega_0}, \quad u(\zeta, \xi) = \sqrt{\frac{kn_2 L_D}{n_0}} E, \quad (2)$$

ω_0 是参考光束的光斑半径,衍射长度 $L_D = k\omega_0^2/2$ 。波矢 $k = n_0 2\pi/\lambda$, n_0 是介质的线性折射率, n_2 是介质的克尔系数,其中参数 $\kappa = 1/(k\omega_0)^2 = (\lambda/\omega_0)^2/(4\pi^2 n_0^2)$, λ 是光束的真空波长。可以看出非线性亥姆霍兹方程形式上仅仅比非线性薛定谔方程多了第一项。

非线性薛定谔方程所描述的是无限维的可积哈密顿系统,对应的具有无穷多的守恒量(这里守恒量的概念是光场的某个物理量不随着传输距离 ζ 的变化而变化),其中的最低阶的几个守恒量是^[11]: 功率: $P = \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 d\xi$, 哈密顿量: $H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|^2 - |u|^4 \right) d\xi$, 动量: $M = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right) d\xi$ 。

这些守恒量在研究光传输过程中起着重要的作用,例如研究空间孤子的稳定性、孤子碰撞中动量交换情况以及测试数值计算算法的稳定性等方面。

为了更深入理解非线性亥姆霍兹方程描述非傍轴光束传输的物理意义,首先研究在此模型下光束在传输过程中的守恒量。为了得到其守恒量,需对(1)式进行一些变换:

首先利用 $(1) \times u^* - (1)^* \times u$ 可以得到[“(1)”表示(1)式,“*”表示共轭]:

$$i \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\kappa}{i} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} \right) + |u|^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right) = 0, \quad (3)$$

根据连续性方程理论,很容易知道

$$P' = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\kappa}{i} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} \right) + |u|^2 \right] d\xi, \quad (4)$$

是方程的一个守恒量。因为光传输过程中,如果不考虑吸收、散射等因素的损耗,光功率 P 理论上是严格守恒的。这一点对于非线性薛定谔方程描述的很好,而对于非线性亥姆霍兹方程来说却是 P' 守恒。如果这种模型仅有数学上的 P' 守恒,而物理上实际的守恒量 P 不守恒,那么这种模型也是有缺陷的。为了更清楚地理解

新守恒量 P' , 令 $u = |u| \exp(i\varphi)$, 得到 $P' = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\kappa \partial \varphi}{\partial \zeta} + 1 \right) |u|^2 d\xi$ 。明显的,如果 $\kappa = 0$, P' 自动简化成 P 。另外,形式上 P' 中含有光传输方向坐标 ζ 的函数 $\partial \varphi / \partial \zeta$, 所以如果非线性相移 φ 是传输方向坐标 ζ 的线性函数或常函数,则 P' 的守恒同样可以得到 P 是守恒的。就目前发现的非线性亥姆霍兹方程的解析解来看,非线性相移 φ 是 ζ 的线性函数。而对于其他形式的解是否存在暂时还不得而知,只有通过数值计算的方法来验证。

再利用 $(1) \times \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + (1)^* \times \frac{\partial u}{\partial \zeta}$ 可以得到

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\kappa \left| \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right|^2 + \frac{1}{2} |u|^4 - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \right] = 0, \quad (5)$$

同样根据连续性方程理论得到

$$H' = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\kappa \left| \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right|^2 + \frac{1}{2} |u|^4 - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|^2 \right) d\xi, \quad (6)$$

也是方程的一个守恒量。

最后利用(1) $\times \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + (1)^* \times \frac{\partial u}{\partial \xi}$ 可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\kappa \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} \right) - \frac{i}{2} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{i}{2} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|^2 + |u|^4 - \left| \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right|^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

再根据连续性方程理论得到

$$M' = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\kappa \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} \right) - \frac{i}{2} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right) \right] d\xi, \quad (8)$$

同样是方程的一个守恒量。从三个守恒量 (P' , H' , M') 的形式可以看出, 积分项中都比傍轴模型下的守恒量 (P , H , M) 中多了一部分; 且当参数 $\kappa = 0$ 时, 可以自洽的简化到傍轴模型下的守恒量。另外, 这个结果也表明, 即使选择参考光束较宽 (参数 κ 较小) 的比例尺, 如果此时的传输光场 u 的参数变化比较明显, 同样会对守恒量有着显著的影响。下面以孤子光束的结果来具体分析守恒量随着孤子参数变化而变化的特性。

非线性薛定谔方程的一个亮孤子解析解是

$$u(\xi, \zeta) = \eta \operatorname{sech}[\eta(\xi + V\zeta)] \exp\left[-iV\xi + i\left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{V^2}{2}\right)\zeta\right], \quad (9)$$

式中 η, V 分别是表示孤子的振幅和横向速度的参数 (参数 V 取正, 则孤子偏向 ξ 负半轴; 反之则偏向其正半轴。此坐标系下孤子传输方向与 ζ 轴角度满足 $\tan \theta = V$)。非线性亥姆霍兹方程的一个亮孤子解析解是^[9]

$$u(\xi, \zeta) = \eta \operatorname{sech}\left[\frac{\eta(\xi + V\zeta)}{\sqrt{1 + 2\kappa V^2}}\right] \exp\left[i\sqrt{\frac{1 + 2\kappa\eta^2}{1 + 2\kappa V^2}}(-V\xi + \frac{\zeta}{2\kappa})\right] \exp\left(-\frac{i\zeta}{2\kappa}\right), \quad (10)$$

当 $\kappa \rightarrow 0$ 时, 此亮孤子解可以自洽的过渡到非线性薛定谔方程的亮孤子解。通过直接把亮孤子解析解带入三个守恒量 (P' , H' , M') 中, 验证了上面理论推导的正确性。下面对于傍轴近似的结果即 $\kappa = 0$ 的情况, 直接采用非线性薛定谔方程来计算。通过计算非线性亥姆霍兹方程与傍轴近似的结果表明, 即使基于窄光束的非傍轴修正可以忽略, 而光电场对参考方向的二阶偏导项不忽略的情况下, 这种亥姆霍兹模型的非傍轴与傍轴近似的差异也是明显的。

3 计算结果

从图 1 可以看出, 当孤子光束横向速度为零, 其沿着纵向光轴传输时, 随着孤子振幅 η 的增大, 孤子的功率 P' 随之增大, 而且非傍轴与傍轴模型 ($\kappa = 0$) 的差异也越来越大。由前面的理论分析知道, 这种差异来自于非线性亥姆霍兹模型中的光电场对参考方向的二阶偏导项, 并不是来自于光束与 ζ 方向夹角偏大。具体在守恒量 P' 中体现的就是 P' 的积分项中多了一项 $2\kappa |u|^2 \partial \varphi / \partial \zeta$, 它体现了孤子非线性相移 φ 纵向梯度对 P' 的贡献。当参数 κ 选定以后, 随着孤子振幅的增大, 非线性相移的纵向梯度变大, 非傍轴与傍轴孤子的功率大小的差异也越来越明显。值得提出的是, 从图 1 的结果也可以看出, 如果 $\kappa \rightarrow 0$, 或者 φ 纵向变化足够慢, 那么 P' 都

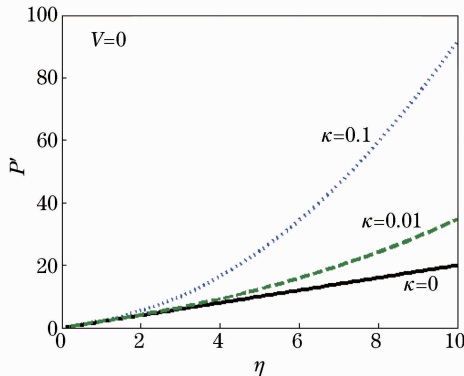


图 1 $V=0$ 时, 不同非傍轴参数 κ 对应的孤子振幅 η 与 P' 的关系

Fig. 1 Relationship between soliton amplitude η and P' with different non-paraxial parameter κ when $V=0$

将退化到 P ，这与前面的理论分析是自洽的。另外，计算了不同孤子横向速度 V 的结果，发现当其他条件相同时， P' 的值不随 V 的变化而变化，即 $\partial P'/\partial V = 0$ 。这个结论与傍轴模型的结果是一致的，这也体现了该守恒量在物理上的正确性，光束整体功率不会随着光束传播方向的变化而改变。

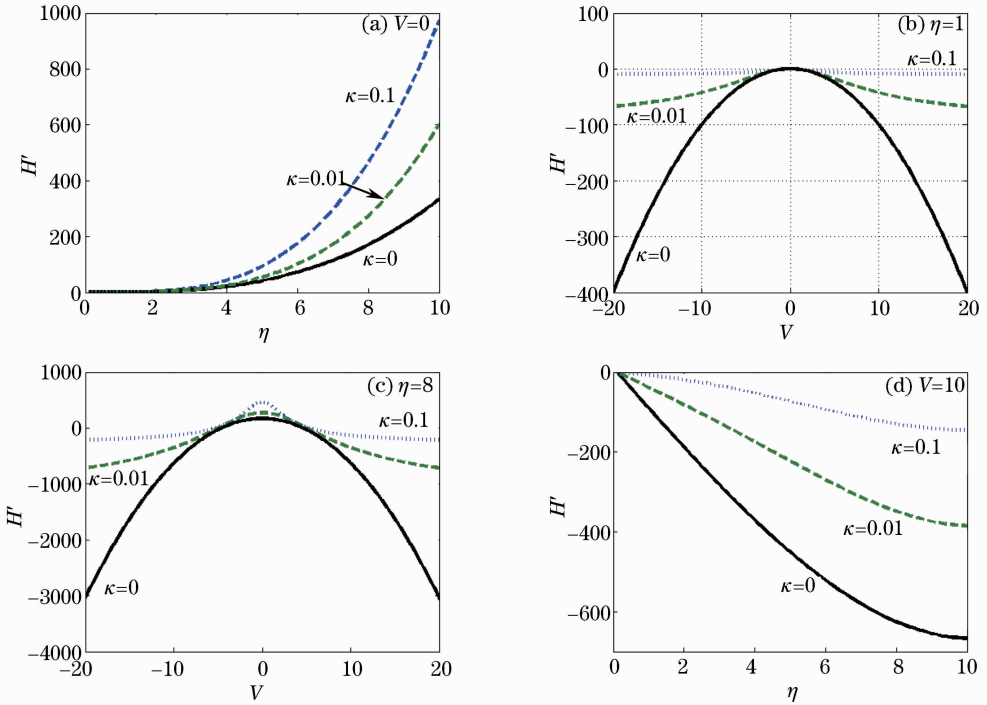


图 2 (a) $V = 0$ 时, 不同非傍轴参数 κ 对应的 η 与 H' 的关系; (b) $\eta = 1$ 时, 孤子横向速度 V 与 H' 的关系; (c) $\eta = 8$ 时, V 与 H' 的关系; (d) $V = 10$ 时, η 与 H' 的关系

Fig. 2 (a) Relationship between η and H' with different κ when $V=0$; (b) relationship between V and H' when $\eta=1$; (c) relationship between V and H' when $\eta=8$; (d) relationship between η and H' when $V=10$

从图 2(a) 可以看出, 对于 $V=0$ 的孤子光束, 随着孤子振幅 η 的增大, 孤子的哈密顿量 H' 也随之增大, 同样的, 非傍轴与傍轴模型的差异也越来越大。非傍轴模型下的 H' 要大于傍轴模型下的结果。从守恒量 H' 的形式分析看出, H' 的积分项中多了一项 $\kappa |\partial u/\partial \zeta|^2$ 。它体现了孤子光场的纵向梯度强度同时决定了对 H' 的贡献。因为 $V=0$, 孤子振幅分布不随着传播方向改变, 所以 $|\partial u/\partial \zeta|^2$ 项中, 仅孤子非线性相移 φ 纵向梯度强度对系统的哈密顿量 H' 有贡献, 这个结果和图 1 的结果 φ 纵向变化对系统的功率 P' 贡献是类似的。而当孤子光束与 ζ 方向呈一定夹角时, 即 $V \neq 0$ 时, $|\partial u/\partial \zeta|^2$ 项中, 孤子光场的纵向梯度强度(包括了场的振幅和 ϕ) 同时起作用。从图 2(b) 与 (c) 可以看出, 对于 $\eta=1, \eta=8$ 的孤子, 孤子光束偏离 ζ 方向很大角度, 其哈密顿量 H' 并没有像傍轴模型下那么明显的变化, 而是随着 V 的增加, 哈密顿量接近饱和。而傍轴模型的情况, 孤子的哈密顿量随着 V 的变化, 接近二次变化关系。已验证不同振幅孤子, 亥姆霍兹孤子的 H' 随着 V 的增加均接近饱和趋势。另外, 对于较大角度的孤子光束, 随着孤子振幅 η 的增大, 孤子的哈密顿量 H' 也随之减小, 但亥姆霍兹孤子的变化相对缓慢, 如图 2(d) 所示。这点与 $V=0$ 的情况完全不同。

从图 3(a) 与 (d) 可以看出, 当横向速度参数 $V=-1$ 时, 随着孤子振幅 η 的增大, 孤子的动量 M' 也随之增大。同样的, 非傍轴与傍轴模型的差异也越来越大, 非傍轴模型下的 M' 要大于傍轴模型下的结果。从守恒量 M' 的形式分析看出, M' 的积分项中多了一项 $\kappa (\partial u^*/\partial \xi \cdot \partial u/\partial \zeta + \partial u/\partial \xi \cdot \partial u^*/\partial \zeta)$ 。另外, 类似哈密顿量的结果, 从图 3(b) 与 (c) 中也可以看出, 孤子光束偏离 ζ 方向很大角度, 系统的动量 M' 并没有像傍轴模型下那么明显的变化, 而是随着 V 的增加, 动量 M' 接近饱和。而傍轴模型的情况, 孤子的 M' 随着 V 的变化, 接近线性变化关系。因动量 M' 有方向性, 所以不同符号的 V 对应不同符号的 M' 值。也已验证不同振幅孤子, 非傍轴模型下孤子的 M' 随着 V 的增加均接近饱和趋势。

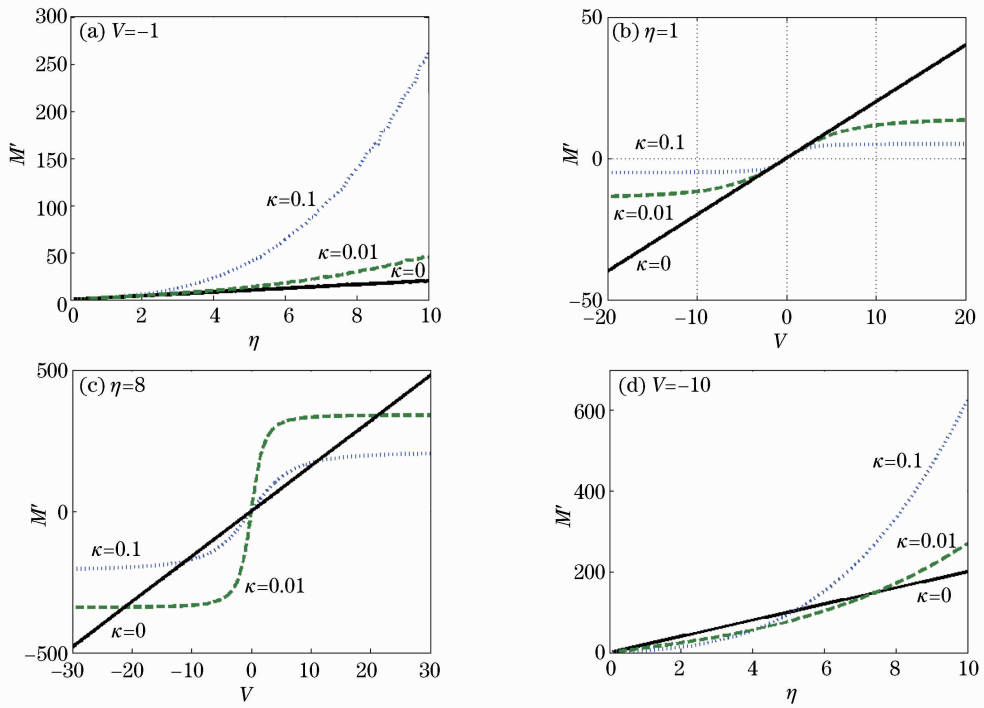


图 3 (a) $V=-1$ 时,不同非傍轴参数 κ 对应的 η 与 M' 的关系;(b) $\eta=1$ 时, V 与 M' 的关系;(c) $\eta=8$ 时, V 与 M' 的关系;
(c) $\eta=8$ 时, V 与 M' 的关系;(d) $V=-10$ 时, η 与 M' 的关系

Fig. 3 (a) Relationship between η and M' with different κ when $V=0$; (b) relationship between V and M' when $\eta=1$;
(c) relationship between V and M' when $\eta=8$; (d) relationship between η and M' when $V=10$

4 结 论

理论上详细推导了非线性亥姆霍兹方程的三个守恒量,其分别与傍轴近似下非线性薛定谔方程的三个守恒量(功率,哈密顿量,动量)对应。总结上述三个守恒量随孤子参数变换规律不难发现,对于非傍轴的亥姆霍兹孤子,固定横向速度的孤子光束功率,动量均随着孤子振幅的增大而迅速增大,增长的速度明显与非傍轴参数 κ 有正向关系[如图 1,图 3(a)、(d)]。对于哈密顿量,其随孤子振幅变化的特性对于不同横向速度的孤子是不同的,然而相同条件下,非傍轴参数越大的孤子光束,其哈密顿量越大[如图 2(a)、(d)]。另外,对于固定振幅的亥姆霍兹孤子光束,其哈密顿量,动量均随着横向速度的增大而趋向饱和,而傍轴孤子光束则趋向发散[见图 2(b)、(c)与图 3(b)、(c)]。这些守恒量变化特性对孤子传输及孤子碰撞的动力学特性具有一定的指导意义。

参 考 文 献

- 1 P L Kelley. Self-focusing of optical beams[J]. Phys Rev Lett, 1965, 15(26): 1005-1008.
- 2 J H Marburger, E L Dawes. Dynamical formation of a small-scale filament[J]. Phys Rev Lett, 1968, 21(8): 556-558.
- 3 E L Dawes, J H Marburger. Computer studies in self-focusing[J]. Phys Rev, 1969, 179(3): 862-868.
- 4 M D Feit, J A Jr Fleck. Beam nonparaxiality, filament formation, and beam breakup in the self-focusing of optical beams[J]. J Opt Soc Am B, 1988, 5(3): 633-640.
- 5 N Akhmediev, A Ankiewicz, M J Soto-Crespo. Does the nonlinear Schrödinger equation correctly describe beam propagation? [J]. Opt Lett, 1993, 18(6): 411-413.
- 6 S Chi, Q Guo. Vector theory of self-focusing of an optical beam in Kerr media[J]. Opt Lett, 1995, 20(15): 1598-1600.
- 7 M Lax, W H Louisell, W B McKnight. From Maxwell to paraxial wave optics[J]. Phys Rev A, 1975, 11(4): 1365-1370.
- 8 P Chamorro-Posada, G S McDonald. Spatial Kerr soliton collisions at arbitrary angles[J]. Phys Rev E, 2006, 74(3): 036609.
- 9 P Chamorro-Posada, G S McDonald, G H C New. Exact soliton solutions of the nonlinear Helmholtz equation; communication[J]. J Opt Soc Am B, 2002, 19(5): 1216-1217.
- 10 Chen Jilong, Shi Zhiwei, Li Huagang. Nonparaxial spatial optical solitons in the nonlocal nonlinear media[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(3): 0302005.
- 陈继龙,石智伟,李华刚. 非局域非线性介质中的非傍轴空间光孤子[J]. 中国激光, 2014, 41(3): 0302005.
- 11 N N Akhmediev. Spatial solitons in Kerr and Kerr-like media[J]. Optical and Quantum Electronics, 1998, 30(7-10): 535-569.