

无外置偏压的向列相液晶盒中的呼吸子传输

朱叶青¹ 胡 巍²

¹南京师范大学泰州学院信息工程学院应用物理系, 江苏 泰州 225300

²华南师范大学光子信息技术广东省高校重点实验室, 广东 广州 510006

摘要 主要理论分析了(2+1)维呼吸子在一种预倾角为 $\pi/4$ 的无外置偏压的液晶盒中传输的情况。基于(2+1)维非局域非线性薛定谔方程利用格林函数法计算得出这种特殊液晶盒中光束传输时的响应函数,同时得到了这种情况下的非线性系数,结果表明通过一定的技术手段获得了更强的非线性效应。在平衡点处将势函数近似展开到二阶的情况下得到了一个近似的呼吸子解,另外通过势函数数值积分也得到了一个呼吸子解,将两种理论方法计算所得的呼吸子解的波动振幅、周期和最大(最小)束宽分别与数值模拟结果比较,得到数值积分的结果与数值模拟结果吻合更好。

关键词 非线性光学; 无外置偏压; 格林函数法; 响应函数; 非线性; 呼吸子

中图分类号 O437.5 文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201535.0919001

Propagation of Breathers in the Nematic Liquid Crystal Cell without Bias Voltage

Zhu Yeqing¹ Hu Wei²

¹Department of Applied Physics, Information Engineering College, Nanjing Normal University Taizhou College, Taizhou, Jiangsu 225300, China

²Key Laboratory of Photonic Information Technology of Guangdong Higher Education Institutes, South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510006, China

Abstract The propagation of the (2+1)-dimensional breathers in a nematic liquid crystal (NLC) cell is theoretically investigated, whose tilt angle is fixed to $\pi/4$ in anywhere without bias voltage. The reponse function of beam's propagation in such a special cell is obtained by the Green function which is based on a (2+1)-dimensional nonlocal nonlinear Schrödinger equation (NNLSE), and at the same time, the nonlinear coefficient in this case is obtained. The results show that the nonlinear effects can be stronger by certain technical means. On the balance point, the potential is approximate to the 2nd order, an approximate breather solution is presented. In addition, another breather solution is obtained by numerical integration. Respectively compared the breather amplitude fluctuations, period and the maximal (minimal) widths which are calculated by the two theoretical methods with the numerical simulations, it is obviously found that the results of numerical integration are more accurate.

Key words nonlinear optics; without bias voltage; Green function; response function; nonlinearity; breathers

OCIS codes 190.4360; 190.6135; 160.3710

1 引 言

全光开关、全光逻辑光路以及全光互连器件等全关信息处理器件在未来高速率大容量全光网络中起着至关重要的作用,相对于电子器件,称这种全光信息处理器件为光子信息处理器件,而实现光子信息处理器件的关键问题是全光控制技术,空间光孤子^[1]等则是实现全光控制技术的基础原理之一,所以近20多年来对空间光孤子的研究被大家所重视。非局域空间光孤子是空间光孤子中非常重要的一种,1997年,Snyder等^[2]提出了强

收稿日期: 2015-03-30; 收到修改稿日期: 2015-05-10

基金项目: 国家自然科学基金(11174090,11174091)

作者简介: 朱叶青(1983—),女,硕士,讲师,主要从事向列相液晶中空间光孤子及呼吸子方面的研究。

E-mail: zhuyeqingwin@163.com

非局域非线性介质中空间光孤子的线性模型,将空间光孤子推入一个新的研究热潮^[3-20]。向列相液晶(NLC)是第一个被发现的具有强非局域非线性介质^[8-9],接着,铅玻璃等也被证明是一种强非局域非线性材料^[10]。

本文主要理论讨论了光束在非线性介质向列相液晶中的传输,通常研究的液晶盒需加外电压才会使液晶预倾角的最大值为 $\pi/4$ ^[8-9,11-13],孤子的临界功率最低,这样液晶的热效应也小,文中液晶盒采用文献[14]中的技术手段从而实现了不需外加电压就可以使其内部的液晶分子以均匀 $\pi/4$ 取向,相比之前的液晶盒在实际中具有更大的潜在应用价值。当光束在液晶盒中传输,输入功率等于临界功率时,即衍射和非线性自聚焦效应达到平衡,光束就会以孤子状态传输,但是当功率不等于临界功率时,光束在液晶盒中不再以孤子的形式传输,而是以呼吸子的形式传输,也就是说束宽随着传输距离的变化而呈现周期性的变化。本文主要理论分析了液晶盒的对数响应函数以及呼吸子在此液晶盒中传输的情况。

2 向列相液晶的理论描述

2.1 无偏压液晶盒的响应函数

所用到的 NLC 盒结构如图 1 所示,上下 2 块平行玻璃片的间距是 $80\ \mu\text{m}$,在 $x-z$ 平面内,所有的液晶分子都排列均匀,且其液晶分子的主轴方向与 z 轴夹角为 $\pi/4$,激光偏振在 x 方向,在液晶中传输的是 e 光。在慢变包络近似和傍轴近似条件下,光束的传输可用非局域非线性薛定谔方程和重取向方程加以描述^[8],即

$$2ik\partial_z A + \nabla_{\perp}^2 A + k_0^2 \epsilon_a^{\text{op}} \sin(\theta + \theta_0) \sin(\theta - \theta_0) A = 0, \quad (1)$$

$$4K\nabla_{\perp}^2 \theta + \epsilon_0 \epsilon_a^{\text{op}} \sin 2\theta |A|^2 = 0, \quad (2)$$

式中 $\nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$, k 和 k_0 分别为液晶中和真空中的波矢大小,且 $k^2 = k_0^2 [n_{\parallel}^2 n_{\perp}^2 / (n_{\parallel}^2 \cos^2 \theta_0 + n_{\perp}^2 \sin^2 \theta_0)]$, n_{\parallel} 和 n_{\perp} 分别为 e 光和 o 光的主折射率, $\epsilon_a^{\text{op}} = n_{\parallel}^2 - n_{\perp}^2$, 是光频的介电各向异性, K 为液晶分子的平均弹性系数, ϵ_0 为真空介电常数, θ_0 是无激光场时液晶分子的最大预倾角,在此通过将液晶盒的玻璃基片做适当的处理使 $\theta_0 = \pi/4$, θ 是加上激光场后液晶分子总的偏向角, $\psi = \theta - \theta_0$, 是由激光场 A 引起的角度偏转。由液晶盒的边界条件,有 $\psi(-L/2, y) = \psi(L/2, y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \psi(x, y) = 0$, 其中 L 是向列相液晶盒的厚度,使液晶盒中各处初始角度偏转 $\theta_0 = \pi/4$ 是为了使形成孤子的临界功率最小,将激光场引起的角度变化 ψ 看作微扰,激光场 A 和液晶分子的偏向角 ψ 能够被以下的系统来描述^[8]:

$$2ik\partial_z A + \nabla_{\perp}^2 A + k_0^2 \epsilon_a^{\text{op}} \psi A = 0, \quad (3)$$

$$4K\nabla_{\perp}^2 \psi + \epsilon_0 \epsilon_a^{\text{op}} |A|^2 = 0. \quad (4)$$

(4)式是一个二维的 Poisson 方程,可以将液晶盒等效为以下的模型: y 方向在物理意义上来说是无限制的(其宽度为几厘米),而在 x 方向是有限的(其宽度 $L = 80\ \mu\text{m}$)。利用类似于文献[15]的方法即分离变量法和格林函数法,可以设定(4)式具有以下形式的解,若假设激光场激励为 $\delta(x-x', y-y')$, 则有

$$\psi(x, y, x', y') = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(y-y') \cos \frac{(2m+1)\pi x}{L} + \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(y-y') \cos \frac{(2m+2)\pi x}{L}, \quad (5)$$

式中 m 为正整数, $\psi_m(y-y')$, $\Phi_m(y-y')$ 为已知函数。将(5)式代入(4)式,可得到

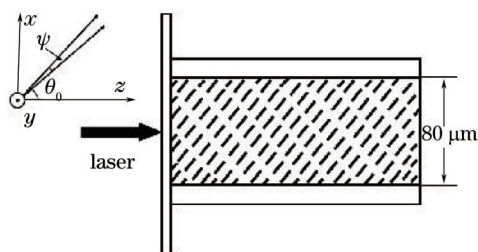


图 1 向列相液晶盒 $x-z$ 平面示意图

Fig.1 Diagram of NLC cell in $x-z$ plane

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_a^{\text{op}}}{4K} \left[\frac{\partial^2 \psi_m(y-y')}{\partial y^2} \cos \frac{x}{\omega_m} - \frac{1}{\omega_m^2} \psi_m(y) \cos \frac{x}{\omega_m} \right] + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_a^{\text{op}}}{4K} \left[\frac{\partial^2 \Phi_m(y-y')}{\partial y^2} \sin \frac{x}{\omega'_m} - \frac{1}{\omega'^2_m} \Phi_m(y) \sin \frac{x}{\omega'_m} \right] + \delta(x-x', y-y') = 0, \quad (6)$$

式中 $\omega_m = L/(2m+1)\pi$, $\omega'_m = L/(2m+2)\pi$, 利用函数正交性, 对(6)式进行积分, 则有

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_a^{\text{op}}}{4K} \left[\frac{\partial^2 \psi_m(y-y')}{\partial y^2} - \frac{1}{\omega_m^2} \psi_m(y) + 2\delta(y-y') \cos \frac{x'}{\omega_m} \right] = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_a^{\text{op}}}{4K} \left[\frac{\partial^2 \Phi_m(y-y')}{\partial y^2} - \frac{1}{\omega'^2_m} \Phi_m(y) + 2\delta(y-y') \sin \frac{x'}{\omega'_m} \right] = 0. \quad (8)$$

求解(7)式和(8)式, 并将结果代入(5)式, 同时利用格林函数法, 可得光束在此向列相液晶盒中的响应函数为

$$R(x, y, x', y') = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_a^{\text{op}}}{16\pi K} \ln \left| \frac{1 + \exp \left[\frac{i\pi(x+x') - \pi(y-y')}{L} \right]}{1 - \exp \left[\frac{-i\pi(x-x') - \pi(y-y')}{L} \right]} \right| + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_a^{\text{op}}}{16\pi K} \ln \left| \frac{1 + \exp \left[\frac{-i\pi(x+x') - \pi(y-y')}{L} \right]}{1 - \exp \left[\frac{i\pi(x-x') - \pi(y-y')}{L} \right]} \right|. \quad (9)$$

由(9)式可以看出, 由于边界效应, 此处的响应函数与液晶盒的厚度和源点 (x', y') 的位置有关, 且在源点处的响应趋近于无穷大。这就说明了不同的源点所激发的响应是不相同的, 即响应函数不具有平移不变性, 并且在源点处的响应是奇异的, 图2也很明显地体现了这一点。根据(9)式的结果, 可以定义 x 和 y 方向的非线性非局域的一般特征长度^[13]为 $w_m = L/\pi$, 故向列相液晶的非局域程度取决于其厚度, 虽然这两个方向的特征长度相同, 但是从图2中明显可以看到响应函数在这两方向的特性是不同的。图2为响应函数在 x 方向和 y 方向的平移关系图, 图2(a)中实线为源点 $(x'=0, y'=0)$ 在 x 方向的响应, 虚线为其在 y 方向的响应, 由图可见响应函数在源点附近 x 和 y 方向是基本重合的, 均趋于无穷大, 当 $x = \pm 0.5L$ 时, 在 x 方向的响应函数为0; 而在 y 方向, 如图2(c)所示, 实线为源点 $(x'=0, y'=0)$ 在 y 方向的响应, 虚线为源点 $(x'=0, y'=0.4L)$ 在 y 方向的响应, 当 $y \rightarrow \pm 2L$ 时, 其响应趋于0, 基本可以忽略; 图2(b)中实线为源点 $(x'=0, y'=0)$ 在 x 方向的响应, 虚线为源点 $(x'=0.2L, y'=0)$ 在 x 方向的响应, 由于边界的影响, 从图中可见响应函数在 x 方向不具有平移不变性。而因为样品截面纵横比相对较大, 所以 y 方向边界的影响是可以忽略的, 如图2(c)所示, 由于当 $y \rightarrow \pm 1L$ 时, 源点激发的响应已经很小, 因此可以近似认为满足平移不变性, 此结论与文献^[15]一致, 原因是铅玻璃和向列相液晶同属于强非局域介质。

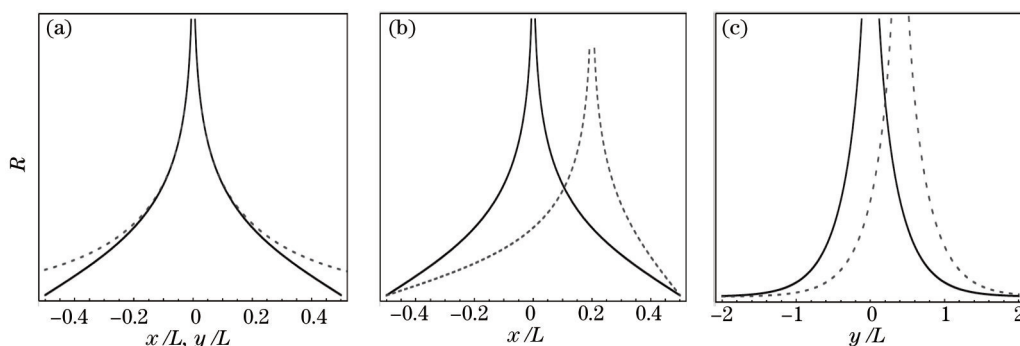


图2 响应函数 $R(x, y, x', y')$ 的示意图

Fig.2 Schematics of the response function $R(x, y, x', y')$

2.2 无偏压液晶盒的非线性系数

利用格林函数法结合(5)式的构造解结果可得到(4)式的解, 将其代入(3)式中同时与局域非线性薛定谔方程作比较, 结合(9)式的结果, 通过对比两式中第3项系数^[16], 可以得到此处的非线性系数 n_2 为

$$n_2 = \frac{(\varepsilon_a^{\text{op}})^2 L^2 \sum_{m=1}^{\infty} 1/m^3}{\pi^3 c n_0^2 K}, \quad (10)$$

式中线性折射率 $n_0 \approx [n_{\perp}^2 + \varepsilon_a^{\text{op}} \sin^2 \theta_0]^{1/2}$, c 为真空中光速。液晶盒中填充的是液晶样品 TEB30A, 其折射率和介电各向异性分别为 $n_{//} = 1.6924$, $n_{\perp} = 1.5221$ 和 $\varepsilon_a^{\text{op}} = 0.5474$, $K \approx 10^{-11}$ N, 预倾角 $\theta = \pi/4$ 。将此与之前得到的 $n_2 = 2^{1/3} (\varepsilon_a^{\text{op}})^2 L^2 / (16\pi c n_0^2 K)$ ^[16] 进行比较, 发现(10)式中的非线性系数约是原来结果的 1.55 倍, 说明对液晶盒采取相应技术手段之后获得了更强的非线性。利用文献[13]中的方法, 用 w_0/w_m 的比值来体现液晶盒的非局域程度。对于此液晶盒, 其厚度 $L = 80 \mu\text{m}$, 根据前面的定义, 所以可得到 NLC 盒的非线性非局域的一般特征长度为 $w_m = 25.5 \mu\text{m}$ 。在实验中光束束宽 w_0 一般为 $2 \sim 3 \mu\text{m}$, 即光束束宽与特征长度的比值在 $10^{-1} \sim 10^{-2}$ 数量级, 所以可认为这种情况为强非局域情况。

2.3 无偏压液晶盒的孤子解

根据第 2.1~2.2 节的分析, 由于向列相液晶的强非局域响应的特性, 激光束在液晶中引起的扰动范围远大于激光场的分布范围, 所以可将激光场引起的角度变化 ψ 看作微扰, 将它进行二阶展开, 有

$$\psi = \psi_0 - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_a^{\text{op}}}{16K} |A(r=0, z)|^2 r^2, \quad (11)$$

式中 ψ_0 是 $r=0$ 处的重取向角。将(11)式代入(3)式, 可得到液晶中的孤子方程^[9]为

$$2ik \partial_z A + \nabla_{\perp}^2 A + k_0^2 \varepsilon_a^{\text{op}} \psi_0 A - \frac{k_0^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_a^{\text{op}})^2}{16K} |A(r=0, z)|^2 r^2 A = 0. \quad (12)$$

可以发现, (12)式中最后一项的值是与传输轴上的光强 $|A(r=0, z)|^2$ 有关的, 当光束以孤子形式传输的时候, 轴上光强为一个定值, (12)式可以简化为线性方程, 且方程中最后一项为常数, 因此可以假设(12)式的孤子解为

$$A = \frac{A_0}{w_0} \exp[i\theta(z)] \exp\left(-\frac{r^2}{2w_0^2}\right), \quad (13)$$

式中 A_0 为一常数值, $\theta(z)$ 是复振幅的相位, 将(13)式代入(12)式, 通过整理 r 的各阶系数, 可得

$$|A_0|^2 = \frac{16K}{k_0^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_a^{\text{op}})^2}, \quad (14)$$

$$\theta(z) = \frac{k_0^2 \varepsilon_a^{\text{op}} \psi_0 z}{2k} - \frac{z}{kw_0^2}. \quad (15)$$

同时, 也可以求出孤子的临界功率, 为

$$P_c = \frac{8\pi n_0 c K}{k_0^2 (\varepsilon_a^{\text{op}})^2 w_0^2}. \quad (16)$$

通过对比, 发现这里的孤子解和临界功率与之前研究的需要加外电压使得液晶分子的预倾角为 $\pi/4$ 的结果一致^[8-9, 11-13], 说明了在实验中不需要加电压就可以获得最大的非局域效应, 这就足以体现这种模型的方便性和实用性。

3 无偏压液晶盒中的呼吸子解

3.1 在平衡点位置将势函数展开求解法

实际中, 很多都是功率不等于临界功率的情况, 此时光束会以呼吸子的形式传输, 则轴上光强不再是一个固定不变的量, 即(12)式中最后一项不再是常数, 因此就不能简化为线性方程, 即(12)式代表 NLC 的重取向非线性并且也是呼吸子解的简化模型。但当输入功率和临界功率相差很小时, 可以近似地认为轴上光强为一常数, 这就是 Conti 等^[9]在输入功率和临界功率相差不是很远的时候所采用的近似, 从而将本来不是线性方程的非线性方程化为了一个线性方程。这种方法将一个非线性问题简化成了线性问题, 从而可以套用 Snyder 等^[2]提出的方法, 很容易算出呼吸子的周期与输入功率之间的关系等。但实际上这种方法是极其不精密的, 因此提出一种更好的方法: 考虑轴上光强不是常数的情况下, 求出呼吸子的周期。为了能够详细地了

解光束在液晶盒中的演化情况,设定呼吸子的试探解为

$$A = \frac{A_0}{w(z)} \exp[i\theta(z)] \exp\left[-\frac{r^2}{2w(z)} + ic(z)r^2\right], \quad (17)$$

式中 $w(z)$ 是光束在位置 z 处的束宽, $A_0/w(z)$ 是光场的振幅, $\theta(z)$ 是试探解的相位复振幅, $c(z)$ 是光束的相前曲率。

将(17)式代入(12)式并根据 r 的各阶系数关系,可分别得到有关 $w(z)$, $\theta(z)$ 和 $c(z)$ 的方程组,求解方程组则可得到关于 $w(z)$ 的方程为

$$k^2 \frac{d^2 w(z)}{dz^2} - \frac{1}{w(z)^3} + \frac{k_0^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_a^{\text{op}})^2 A_0^2}{16Kw(z)} = 0. \quad (18)$$

令 $\beta = P_c/P_0$, 因为孤子的临界功率 $P_c = 8\pi n_0 cK / [k_0^2 (\varepsilon_a^{\text{op}})^2 w_0^2]$, 输入功率 $P_0 = (1/2)\pi n_0 c \varepsilon_0 A_0^2$, $w_0 = w(0)$ 是光束在 $z=0$ 处的束宽,即初始束宽,同时引入归一化变量 $W = w(z)/w_0$, $\zeta = z/z_R$, 其中 $z_R = kw_0^2$ 为瑞利距离,则(18)式可化为

$$\frac{d^2 W}{d\zeta^2} - \frac{1}{W^3} + \frac{1}{\beta W} = 0. \quad (19)$$

(19)式与经典力学里的牛顿第二定律相似,就相当于一个一维粒子在合外力 $F(W) = 1/W^3 - 1/(\beta W)$ 作用下运动,而粒子的质量为1,根据 $F(W) = -dV(W)/dW$ 可得到该系统的势函数 $V(W)$ 为

$$V(W) = \frac{1}{2W^2} - \frac{1}{2} + \frac{\ln W}{\beta}, \quad (20)$$

此处的积分常数由初始条件决定,在入射点 $\zeta=0$ 处, $V(1)=0$ 。另外,在束腰处入射,即 $dW/d\zeta|_{\zeta=0} = 0$, 粒子的动能可表示为 $1/2(dW/d\zeta)^2$, 则在初始入射点处的动能也为0。而在传输过程中粒子的总能量是守恒的,由于在初始位置粒子的势能和动能均为0,所以粒子的初始总能量为0,则有

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\zeta} \right)^2 + \frac{1}{2W^2} - \frac{1}{2} + \frac{\ln W}{\beta} = 0, \quad (21)$$

这里的势函数 $V(W)$ 所描述的曲线并不是抛物线,而在经典力学中,只有抛物线势阱中的粒子才做简谐振动,否则只能是周期性振动,并且很难得到解析解。为了能够求解(21)式,可以用一个抛物线的势函数近似地表示(21)式中的势函数,求势函数 $V(W)$ 最小值的位置,即平衡点位置,对势函数 $V(W)$ 求一阶导,可得平衡点的位置 $W_0 = \sqrt{\beta}$, 把 $V(W)$ 在平衡点展开到二阶,则有

$$V(W) \approx V(W_0) + \frac{1}{2} V''(W_0)(W - W_0)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{\beta} \ln \sqrt{\beta} + \frac{1}{\beta^2} (W - \sqrt{\beta})^2. \quad (22)$$

利用平衡点处构造的抛物线型势函数,同时结合初始的边界条件,再将归一化结果代入到液晶中,可得

$$w(z) = \sqrt{\beta} w_0 + (1 - \sqrt{\beta}) w_0 \cos \frac{\sqrt{2}}{\beta k w_0^2} z. \quad (23)$$

从(23)式中可以看出光束束宽此时是作周期性谐振动的,且振荡周期为 $\Gamma_1 = \sqrt{2} \pi z_R \beta$ 。当 $\beta > 1$ 时,衍射效应大于非线性效应,光束先展宽后压缩;当 $\beta < 1$ 时,光束先压缩到最小束宽再展宽,即以呼吸子状态传输;而当 $\beta = 1$ 时,归一化束宽 $W \equiv 1$, 此时衍射效应和非线性效应平衡,则会形成孤子。同样可知,最大(最小)束宽表达式为 $W_{\text{m1}} = 2\sqrt{\beta} - 1$, 归一化束宽始终在1和 W_{m1} 之间振荡。当 $\beta = 1$ 时, $V(W)$ 只有一个零点 $W = 1$, 当 $\beta \neq 1$ 时,有两个零点[其中一个为 $V(1)=0$], 另一个大于或者小于1,输入功率越接近临界功率,则这个零点越接近于1,构造的抛物线势阱就越能更好地替代 $V(W)$ 所形成的势阱。所以上面求出的公式适用于临界功率附近,且越靠近临界功率,结果则会越精确。

将(23)式代入前面所得到的有关系数 $c(z)$ 和 $\theta(z)$ 的表达式,则有

$$c(z) = \frac{(\sqrt{\beta} - 1) \sin \frac{\sqrt{2}}{\beta k w_0^2} z}{\sqrt{2} \beta w_0^2 \left[\sqrt{\beta} + (1 - \sqrt{\beta}) \cos \frac{\sqrt{2}}{\beta k w_0^2} z \right]}, \quad (24)$$

$$\theta(z) = \frac{k_0^2 \varepsilon_a^{\text{op}} \psi_0}{2k} z - \frac{\beta \sqrt{2\beta} \arctan \left[\sqrt{2\sqrt{\beta} - 1} \tan \left(\frac{z}{\sqrt{2\beta} k w_0^2} \right) \right]}{(2\sqrt{\beta} - 1)^{3/2}} + \frac{\beta(1 - \sqrt{\beta}) \sin \left(\frac{\sqrt{2} z}{\beta k w_0^2} \right)}{\sqrt{2}(2\sqrt{\beta} - 1) \left[\sqrt{\beta} + (1 - \sqrt{\beta}) \cos \left(\frac{\sqrt{2} z}{\beta k w_0^2} \right) \right]}. \quad (25)$$

(25)式成立的条件是 $\beta > 1/4$,所以在临界功率附近此条件同样满足,在临界功率附近, ψ_0 变化不大,在以上求相位的处理中把 ψ_0 看成常数,把求出的 $w(z)$ 、 $c(z)$ 和 $\theta(z)$ 代入(17)式即可得出临界功率附近的呼吸子解。由(23)~(25)式可知,当 $\beta = 1$ 时,有 $w(z) = w_0$, $\theta(z) = [k_0^2 \varepsilon_a^{\text{op}} \psi_0 w_0^2 / 2 - 1](z/z_R)$, $c(z) = 0$,此时的解刚好可以退化成前面的孤子解。

将(23)~(25)式代入(17)式,可以获得(12)式满足初始条件的解,呼吸子呼吸的最大($\beta > 1$)或者最小($\beta < 1$)周期可以表示为

$$\Gamma_1 = \sqrt{2} \beta \pi k w_0^2, \quad (26)$$

同时,呼吸子的最大(最小)束宽可以表示成

$$w_{M1} = (2\sqrt{\beta} - 1)w_0. \quad (27)$$

3.2 将势函数数值积分求解法

(26)式和(27)式分别表示呼吸子周期和最大(或最小)束宽,是将 $V(W)$ 在 $dV(W)/dW = 0$ 处做抛物线近似展开到二阶以后得到的近似解。它们只是近似结果,且当 $\beta \leq 1/4$ 时,光束束宽小于或等于0,显然已经没有物理意义了,为了得到一个精确的解,需借助于经典力学的知识。在一维的直角坐标系中(也就是 x 方向),一个一维的运动系统的拉格朗日量可表示为 $L = (m'/2)(dx/dt)^2 - V(x)$,根据能量守恒定律有

$$\frac{1}{2} m' \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) = E, \quad (28)$$

式中 E 是系统的总能量, m' 是粒子质量。(28)式是一个一阶的微分方程,很容易积分求解,即将(28)式化成 $dx/dt = \sqrt{2[E - V(x)]/m'}$ 的形式,积分就可得到

$$t = \sqrt{\frac{m'}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} + C, \quad (29)$$

式中常数 C 由运动系统的初始条件决定。只要知道该系统的初始条件,则可用该系统的总能量和势能来表示它的周期函数,即

$$T(E) = \sqrt{2m'} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \quad (30)$$

式中的 $x_1(E)$ 和 $x_2(E)$ 是函数 $E = V(x)$ 在给定 E 的情况下的两个根,假设 $x_1(E) < x_2(E)$ 。(21)式和(28)式相似,其中 $(dW/d\xi)^2/2$ 相当于 $m'(dx/dt)^2/2$,而 $1/2 - 1/2W^2 - \ln W/\beta$ 相当于 $E - V(x)$,因此能得到向列相液晶盒中呼吸子的周期,即

$$\Gamma_2(\beta) = \left| \sqrt{2} \int_1^{W(\beta)} \frac{dW}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2W^2} - \frac{\ln W}{\beta}}} \right|, \quad (31)$$

式中 $W(\beta)$ 和 1 是方程 $1/2 - 1/2W^2 - \ln W/\beta = 0$ 的两个根,但此方程是一个超越方程且不能求出 $W(\beta)$ 的值,因此(31)式也就不能积分,但可对此方程进行数值解,从而解出 $W(\beta)$ 的数值,再将其代入(31)式中数值积分得到呼吸子的周期,而最大($\beta > 1$)或者最小($\beta < 1$)束宽则可表示为

$$w_{M2} = W(\beta)w_0. \quad (32)$$

通过以上分析,利用经典力学的知识,用数值解以及数值积分的方法可求出呼吸子的周期以及束宽的极值。

4 理论结果和数值结果的比较

根据第3节的讨论已经得到通过2种不同方法计算出的2个不同的结果,其中一个结果是输入功率在临界功率附近的条件下通过将势函数做抛物线近似得到的一个近似结果,另一个是将势函数通过数值积分得到的解。为了确定不同结果的精确度,进行数值模拟得到一个模拟结果,得到不同输入功率下的呼吸子束宽随着传输距离 z 而变化的曲线,取出具有代表性的3条曲线和前面2种结果进行比较,结果如图3所示。图3中虚线是(23)式的理论结果,实线是由(31)式得到的数值积分结果,实心三角和实心方块是数值模拟的结果。初始束宽为归一化束宽,从图3中可以看出,当 $P_0 = P_c$ 时,束宽保持不变;当 $P_0 < P_c$ 时,束宽先衍射至最大束宽,然后压缩至初始束宽,再衍射,这样做周期性的波动;当 $P_0 > P_c$ 时,束宽先压缩至最小束宽,然后衍射至初始束宽,再压缩,同样做周期性的波动。虽然图3中理论结果和数值结果整体比较符合,但是仍存在一些偏差。由数值模拟结果可明显看出,当 $P_0 = P_c$ 时,束宽始终在初始束宽附近抖动,并不是很稳定;当 $P_0 \neq P_c$ 时,束宽同样做周期性振荡,但老是回不到初始位置,主要是因为前面将激光场引起的角度变化 ψ 近似展开到二阶引起的,其实此时的呼吸子解的形式并不是严格的 Gauss 型函数,而是介于 Gauss 和 Sech 之间的波形^[1],同时也说明了向列相液晶的非局域程度并未达到 Snyder 等^[2]所指的那种强非局域程度。

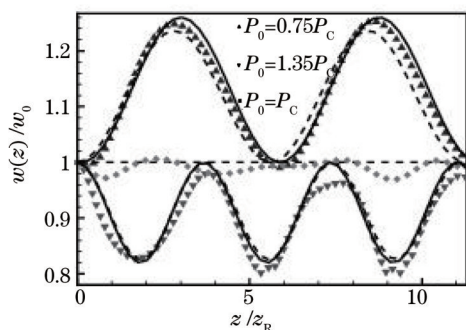


图3 呼吸子在液晶中传输时的束宽变化图

Fig.3 Autocorrelation image of the beam width of breathers propagation in nematic liquid crystals

图4(a)演示了不同输入功率下的呼吸子周期以及由3种方法得到的结果的比较,在临界功率附近3个结果符合很好,但当输入功率偏离临界功率较远时,数值积分结果和数值模拟结果(一般被认为是精确结果)符合得更好。利用同样的方法得到了如图4(b)所示的呼吸子最大(或最小)束宽随着输入功率的变化关系图,且结果跟图4(a)类似。从图4(b)中可明显看出,理论结果和数值结果很好地吻合,尤其是在临界功率附近,而当 $P_0 \neq P_c$ 时,理论结果和数值结果逐渐分开,但数值积分的方法计算出来的呼吸子的最大(或最小)束宽比将势函数做抛物线近似计算出来的结果更加精确。

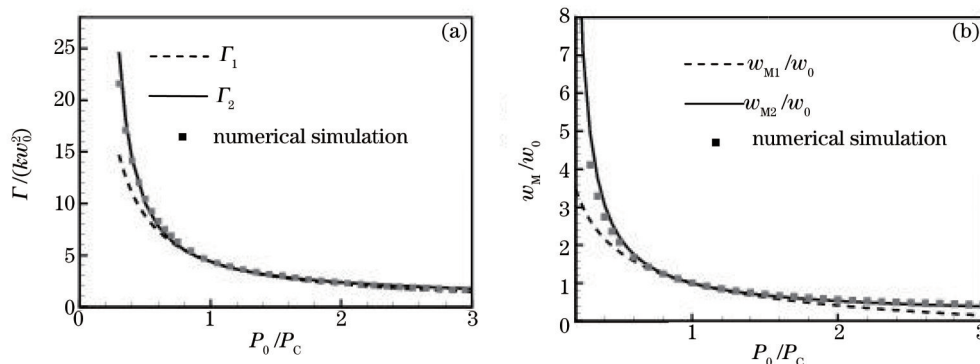


图4 (a) 呼吸子的振荡周期随输入功率的变化图; (b) 呼吸子的最大(最小)束宽随输入功率的变化图

Fig.4 (a) Autocorrelation image of the period because of the input powers;

(b) autocorrelation image of the maximal (minimal) beam width because of the input powers

通过将理论结果和数值模拟结果进行比较,可以很明显的看到光束束宽、呼吸子的振荡周期和最大(或最小)束宽的变化趋势与数值模拟结果基本一致,因此证明了文中理论的合理性。但与此同时,也可以很明显的

看到当输入功率远离临界功率时,第一种理论结果和数值模拟结果会分开,原因是利用这种方法得到的结果是通过将势函数展开到二阶,做过近似处理得到的,在这种范围时所构造的抛物线势阱已经不能更好地替代势函数所形成的势阱。所以,相比较而言数值积分结果适用范围更广且与数值模拟结果基本吻合。

5 结 论

介绍了一种无需外置偏压就可使得液晶分子预倾角为 $\pi/4$ 均匀取向的液晶盒,从理论上对此液晶盒中(2+1)维呼吸子的传输情况进行了讨论。利用格林函数法得到了液晶盒中的响应函数,并做了全面的分析与讨论,同时得到了非线性系数、孤子解以及临界功率。通过设定高斯形式的试探解,利用2种方法理论计算出呼吸子解,将所得结果与数值模拟结果作比较,发现临界功率附近时2种方法都适用,但当范围更广时第一种方法会失效而第二种数值积分的结果依然适用。无外置偏压控制的非局域空间光孤子的传输为实现集成化全关开关、全光互联器件和全光逻辑门等提供了更易实现的途径,具有潜在的应用价值。

参 考 文 献

- 1 G I Stegeman, M Segev. Optical spatial solitons and their interactions: Universality and diversity[J]. Science, 1999, 286(5444): 1518-1523.
- 2 A W Snyder, D J Mitchell. Accessible solitons[J]. Science, 1997, 276(5318): 1538-1541.
- 3 Zhang Jiefang, Zhao Bi, Hu Wencheng, *et al.*. Interaction propagation of optical vortex solitons in inhomogeneous nonlinear waveguides[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(4): 0419001.
张解放, 赵 辟, 胡文成, 等. 非均匀非线性波导中涡旋光孤子的相互作用传播[J]. 光学学报, 2013, 33(4): 0419001.
- 4 Dai Zhiping, Yang Zhenjun, Zhang Shumin, *et al.*. Propagation of hyperbolic-cosine Gaussian beams in strongly nonlocal media[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(8): 0819002.
戴志平, 杨振军, 张书敏, 等. 双曲余弦高斯光束在强非局域介质中的传输[J]. 光学学报, 2014, 34(8): 0819002.
- 5 Chen Jilong, Shi Zhiwei, Li Huagang. Nonparaxial spatial optical solitons in the nonlocal nonlinear media[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(3): 0302005.
陈继龙, 石智伟, 李华刚. 非局域非线性介质中的非傍轴空间光孤子[J]. 中国激光, 2014, 41(3): 0302005.
- 6 Liu Jiannan, Xu Siliu. Research of spatial-soliton transmission characteristics in nonlocal nonlinear medium[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2013, 50(4): 040602.
刘建南, 徐四六. 非定域非线性介质中空间光孤子传输特性的研究[J]. 激光与光电子学进展, 2013, 50(4): 040602.
- 7 Bai Dongfeng, Wang Yi, Hua Xianli. Variational investigation of beam propagation in nonlocal optical lattice[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2013, 50(11): 111901.
白东峰, 王 毅, 华显立. 非局域光学格子中光束传输的变分研究[J]. 激光与光电子学进展, 2013, 50(11): 111901.
- 8 C Conti, M Peccianti, G Assanto. Route to nonlocality and observation of accessible solitons [J]. Phys Rev Lett, 2003, 91(7): 073901.
- 9 C Conti, M Peccianti, G Assanto. Observation of optical spatial solitons in a highly nonlocal medium[J]. Phys Rev Lett, 2004, 92(11): 113902.
- 10 C Rotschild, O Cohen, O Manela, *et al.*. Solitons in nonlinear media with an infinite range of nonlocality: First observation of coherent elliptic solitons and of vortex-ring solitons[J]. Phys Rev Lett, 2005, 95(21): 213904.
- 11 M Peccianti, C Conti, G Assanto. Interplay between nonlocality and nonlinearity in nematic liquid crystals[J]. Opt Lett, 2005, 30(4): 415-417.
- 12 M Peccianti, C Conti, G Assanto, *et al.*. Routing of anisotropic spatial solitons and modulational instability in liquid crystals[J]. Nature, 2004, 432(7018): 733-737
- 13 W Hu, T Zhang, Q Guo, *et al.*. Nonlocality-controlled interaction of spatial solitons in nematic liquid crystals[J]. Appl Phys Lett, 2006, 89(7): 071111.
- 14 J T K Wan, O K C Tsui, H S Kwok, *et al.*. Liquid crystal pretilt control by inhomogeneous surfaces[J]. Phys Rev E, 2005, 72(2): 021711.
- 15 Liang Yanbin, Zheng Yajian, Yang Pingbao, *et al.*. Investigation of propagation of spatial soliton in nonlocal nonlinear medium of finite-size[J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(9): 5690-5698.
梁炎斌, 郑亚建, 杨平保, 等. 有界非局域非线性介质中空间光孤子传输的研究[J]. 物理学报, 2008, 57(9): 5690-5698.

- 16 Zhu Yeqing, Long Xuewen, Hu Wei, *et al.*. The influence of nonlocality on solitons in nematic liquid crystals[J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, 57(4): 2260–2265.
朱叶青, 龙学文, 胡 巍, 等. 非局域程度对向列相液晶中空间光孤子的影响[J]. *物理学报*, 2008, 57(4): 2260–2265.
- 17 M Peccianti, C Conti, G Assanto. All-optical switching and logic gating with spatial solitons in liquid crystals[J]. *Appl Phys Lett*, 2002, 81(18): 3335–3337.
- 18 Zhu Yeqing, Hu Wei, Cao Longgui. (1+1)-D breathers solution in nematic liquid crystals [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, 30(10): 3000–3004.
朱叶青, 胡 巍, 曹龙贵. 向列相液晶中的(1+1)维呼吸子解[J]. *光学学报*, 2010, 30(10): 3000–3004.
- 19 Xuan Wentao, Zheng Yajian, Cao Weiwen, *et al.*. Investigation of z-scan for strongly nonlocal nonlinear medium[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, 30(4): 1117–1121.
宣文涛, 郑亚建, 曹伟文, 等. 强非局域非线性介质的z扫描研究[J]. *光学学报*, 2010, 30(4): 1117–1121.
- 20 Zhang Xiaping. Propagation of elegant Hermite-Gaussian beams in strongly nonlocal media[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, 31(11): 1119002.
张霞萍. 强非局域非线性介质中复宗量厄米-高斯光束的传输[J]. *光学学报*, 2011, 31(11): 1119002.

栏目编辑: 史 敏