

光场组合算符激发混沌场的量子特性

卢道明

武夷学院机电工程学院, 福建 武夷山, 354300

摘要 利用算符作用在光场态上构造新的量子态的方法,通过光场湮没和产生算符的线性组合作用构造了光场组合算符激发混沌场。通过对光场的两个正交分量涨落、二阶关联函数、Mandel Q 参量和 Wigner 函数的计算,研究了该量子态的压缩效应、反聚束效应、统计性质和 Wigner 函数的负性。讨论了算符叠加系数变化和平均光子数变化对其量子特性的影响。研究表明:光场不呈现压缩效应;随平均光子数增大它的反聚束效应、亚泊松分布性质和 Wigner 函数负性减弱;另一方面,随算符组合部分中产生算符的比重增大,光场反聚束效应和亚泊松分布性质增强。这表明增大算符组合部分中产生算符的比重对增强光场反聚束效应和亚泊松分布性质有利。

关键词 量子光学; 光场组合算符; 混沌场; 量子特性

中图分类号 O431.2

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201535.0727003

Quantum Properties of State via Operation of Light Field Combination Operator on Chaotic Field

Lu Daoming

College of Mechanic and Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China

Abstract Light field combination operator excited chaotic field is constructed by operation of light field combination operator on chaotic field. Its squeezing, antibunching effect, statistical property and negativity of Wigner function are analysed by calculating two orthogonal components of the light field fluctuations, second-order correlation function, Mandel Q parameters and Wigner function, respectively. The influences of superposition coefficient of operators and the average photon number of the field on quantum properties are discussed. Results show that the nonclassical property of the field is weakened with the increase of average photon number of the field. On the other hand, its antibunching effect and sub-poissonian statistical property are strengthened as the ratio of photon addition operator in superposition operation increases. The result shows that the increase of the ratio of photon addition operator in superposition operation can help strengthen antibunching effect and sub-poissonian distribution property.

Key words quantum optics; light combination operator; chaotic field; quantum property

OCIS codes 270.5585; 030.5290; 270.1670

1 引言

非经典光场在量子态传送、微弱信号检测和量子信息处理等领域具有重要作用。因此,量子态的构造和制备,及其在量子信息领域中的应用已成为量子光学领域研究的热点^[1-3]。在量子态构造方面,主要的方法是利用量子力学的态叠加原理和算符作用在光场态上来产生新的量子态。例如,在文献[2]中本课题组构建了相干态的任意叠加态,并研究了它的熵压缩性质。自从1991年 Agarwal 和 Tara 首次提出利用光子产生算符构造非经典态的方案以来^[3],利用算符产生非经典态的方案已有大量研究报道^[4-13]。例如,Gu 等^[4]研究了多光子增加双模压缩相干态的非经典性质。Xu 等^[5]引入了光子增加压缩热态,并讨论了它的统计性质。

收稿日期: 2014-12-29; 收到修改稿日期: 2015-02-13

基金项目: 福建省自然科学基金(2015J01020)

作者简介: 卢道明(1963—),男,硕士,教授,主要从事量子光学方面的研究。 E-mail:daominglu79@hotmail.com

Zhou 等^[6]构建了光子减双模压缩热态。文献[7]报道了光子减压缩相干态的构建。实验上,Zavatta 等^[14]实现了利用 Bose 产生算符作用激发相干态,从而产生单光子激发相干态。Lee 等^[15]研究了光场组合算符 $ta^+ + ra$ 作用将经典态转变为非经典态。本文将光场组合算符 $ra + qa^+$ 作用在混沌场上,构造了光场组合算符激发混沌场,并讨论湮没和产生算符的组合作用对其压缩效应、反聚束效应、统计性质和 Wigner 函数的影响。研究表明:光场组合算符激发混沌场不呈现压缩效应,随平均光子数增大,光场非经典性质减弱。另一方面,随 r 的减小,即增大算符组合部分中产生算符的比重,光场反聚束效应和亚泊松分布性质增强。

2 光场组合算符激发混沌场的构建

混沌光场的密度算符为^[16]

$$\rho_0 = [1 - \exp(-\lambda)] \exp(-\lambda a^+ a), \quad (1)$$

对于温度为 T_0 的混沌场,它的哈密顿 $H = \hbar\omega a^+ a$, 式中参数 $\lambda = \frac{\hbar\omega}{k_B T_0}$, k_B 为玻尔兹曼常数,其平均光子数为

$$\bar{n} = [\exp(\lambda) - 1]^{-1} = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T_0}\right) - 1 \right]^{-1},$$

$$\exp(\lambda) = 1 + \frac{1}{\bar{n}}. \quad (2)$$

现在将光场组合算符 $ra + qa^+$ 作用在(1)式表示的混沌光场上,构建光场组合算符激发混沌光场。那么,它的密度算符为

$$\rho = N(ra + qa^+) \exp(-\lambda a^+ a) (ra^+ + qa), \quad (3)$$

式中 N 为归一化常数。为简单起见,设算符组合系数 r 、 q 为实数,它们满足 $r^2 + q^2 = 1$ 。下面利用有序算符积分技术,导出归一化常数。利用 $\text{tr}\rho = 1$ 和相干态的完备性 $\int \frac{d^2z}{\pi} |z\rangle\langle z| = 1$, 有

$$\text{tr}\rho = N \int \frac{d^2z}{\pi} \langle z | (ra + qa^+) \exp(-\lambda a^+ a) (ra^+ + qa) | z \rangle = 1, \quad (4)$$

式中 tr 表示求迹, $|z\rangle$ 表示相干态。利用 Baker-Hausdorff 公式^[17]

$$\exp(A)B \exp(-A) = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \dots, \quad (5)$$

导出

$$a \exp(-\lambda a^+ a) = \exp(-\lambda) \exp(-\lambda a^+ a) a,$$

$$\exp(-\lambda a^+ a) a^+ = \exp(-\lambda) a^+ \exp(-\lambda a^+ a), \quad (6)$$

利用(6)式和算符公式 $\exp(\lambda a^+ a) = : \exp[(e^\lambda - 1)a^+ a] :$ ^[18], 这里 $::$ 表示算符正规排序,可将密度算符表示成正规排序,并利用积分公式 $\int \frac{d^2z}{\pi} z^n z^k \exp(\lambda |z|^2) = \delta_{n,k} (-1)^{k+1} k! \lambda^{-(k+1)}$, 求得

$$N = \frac{[1 - \exp(-\lambda)]^2}{r^2 \exp(-2\lambda) + r^2 \exp(-\lambda)[1 - \exp(-\lambda)] + q^2}. \quad (7)$$

3 压缩效应

由于压缩态光场可以在某个正交分量上具有比相干态更小的量子噪声,因而在光通信和引力波检测中有潜在的应用。为了描述新构建光场的压缩效应,定义光场的两个正交分量为

$$F_1 = \frac{1}{2}(a + a^+),$$

$$F_2 = \frac{1}{2i}(a - a^+), \quad (8)$$

它们满足对易关系

$$[F_1, F_2] = \frac{i}{2}, \quad (9)$$

定义描述压缩程度的变量

$$Y_1 = \frac{1}{4}[\langle a^2 + a^{+2} \rangle + 2\langle a^+ a \rangle] - \frac{1}{4}\langle a + a^+ \rangle^2, \\ Y_2 = \frac{1}{4}[-\langle a^2 + a^{+2} \rangle + 2\langle a^+ a \rangle] + \frac{1}{4}\langle a - a^+ \rangle^2. \quad (10)$$

那么, $Y_l < 0$ ($l=1,2$)表示 F_l 分量被压缩。表明 F_l 分量具有比相干态更小的量子噪声。利用(3)式,求得

$$\langle a \rangle = \text{tr}(a\rho) = \langle a^+ \rangle = 0, \\ \langle a^+ a \rangle = \frac{N}{[1 - \exp(-\lambda)]^3} \{2r^2 \exp(-3\lambda) + 2r^2 \exp(-2\lambda)[1 - \exp(-\lambda)] + 2q^2 \exp(-\lambda) + q^2[1 - \exp(-\lambda)]\}, \\ \langle a^2 \rangle = \langle a^{+2} \rangle = \frac{2Nr q}{(1 - e^{-\lambda})^3} \{ \exp(-3\lambda) + 2 \exp(-2\lambda)[1 - \exp(-\lambda)] + \exp(-\lambda)[1 - \exp(-\lambda)] \}. \quad (11)$$

平均光子数 \bar{n} 分别取 0.2 和 0.4 时, 压缩参量 Y_2 随 r 的演化如图 1 所示。从图中可见, 曲线始终大于零, 这表明光场的 Y_2 分量不呈现压缩效应。另一方面, 根据(11)式, 因为 $[1 - \exp(-\lambda)] > 0$, 所以推导出 $\langle a^+ a \rangle > 0$ 和 $\langle a^2 \rangle > 0$, 结合(10)式, 可判断 $Y_1 > 0$ 。这表明光场不呈现压缩效应。

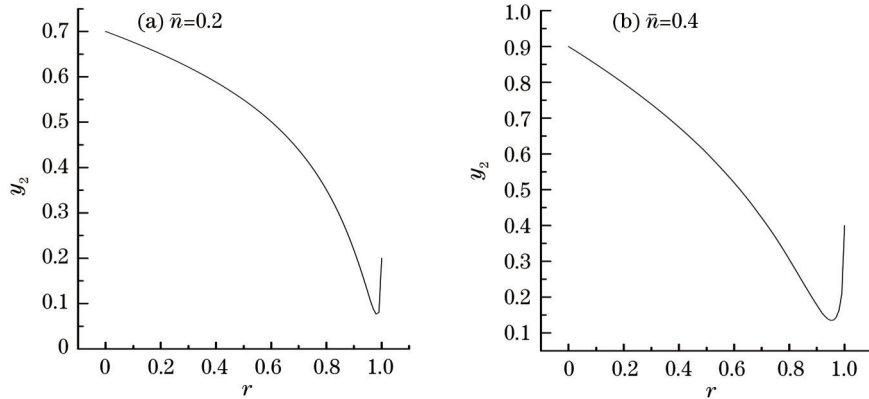


图 1 Y_2 随参数 r 的演化。(a) $\bar{n}=0.2$; (b) $\bar{n}=0.4$

Fig.1 Evolution of Y_2 with parameter r . (a) $\bar{n}=0.2$; (b) $\bar{n}=0.4$

4 反聚束效应

光场的二阶关联函数反映了光场的聚束和反聚束性质。在量子理论中, 描述光场的二阶关联函数定义为

$$g^2 = \frac{\langle a^{+2} a^2 \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2}. \quad (12)$$

定义 $G = g^2 - 1$, 若 $G < 0$, 则称光场呈现出反聚束效应。利用(3)式, 求得

$$\langle a^{+2} a^2 \rangle = N \left[6r^2 \exp(-4\lambda) \frac{1}{[1 - \exp(-\lambda)]^4} + 6r^2 \exp(-3\lambda) \frac{1}{[1 - \exp(-\lambda)]^3} + 6q^2 \exp(-2\lambda) \frac{1}{[1 - \exp(-\lambda)]^4} + 4q^2 \exp(-\lambda) \frac{1}{[1 - \exp(-\lambda)]^3} \right]. \quad (13)$$

利用(13)式和(11)式中 $\langle a^+ a \rangle$, 能够计算二阶关联函数 G 。平均光子数 \bar{n} 分别取 0.2、0.4、0.6、0.8 时, G 随叠加系数 r 的演化曲线如图 2 所示。从图 2 中可见: 从图(a)到图(d), 平均光子数 \bar{n} 逐渐增大, 二阶关联函数 G 呈现负值的深度和出现负值的区域均减小。这一现象表明光场的反聚束效应随混沌场平均光子数增大而减弱。另一方面, 从 G 随 r 的演化曲线可见, 随 r 的减小, 即算符组合部分中产生算符的比重增加, 光场的反聚束效应增强。这说明增大算符组合部分中产生算符的比重, 对改善光场的反聚束效应有利。

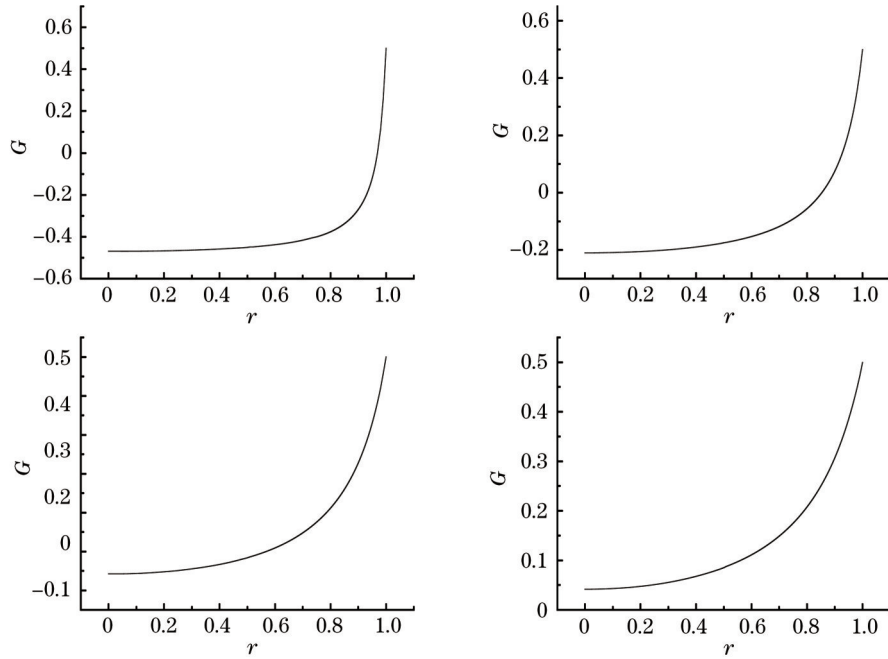


图2 G 随参数 r 的演化。(a) $\bar{n}=0.2$; (b) $\bar{n}=0.4$; (c) $\bar{n}=0.6$; (d) $\bar{n}=0.8$
 Fig.2 Evolution of G with parameter r . (a) $\bar{n}=0.2$; (b) $\bar{n}=0.4$; (c) $\bar{n}=0.6$; (d) $\bar{n}=0.8$

5 光场的统计性质

亚泊松光子统计是通过光子数的统计分布对泊松分布的偏离程度来表现光场的非经典性质。光场的亚泊松分布可用 Mandel Q 函数描述。Mandel Q 参量定义为

$$Q = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle} - 1 = \frac{\langle (a^+ a)^2 \rangle - \langle a^+ a \rangle^2}{\langle a^+ a \rangle} - 1, \quad (14)$$

$Q=0, Q>0, Q<0$ 分别表示光子统计分布处于泊松分布、超泊松分布和亚泊松分布。利用 $(a^+ a)^2 = a^{+2} a^2 + a^+ a$ ，以及(11)和(13)式的结果，可求得

$$\begin{aligned} \langle (a^+ a)^2 \rangle = & N[6r^2 \exp(-4\lambda) \frac{1}{(1-e^{-\lambda})^4} + 8r^2 \exp(-3\lambda) \frac{1}{(1-e^{-\lambda})^3} + 2r^2 \exp(-2\lambda) \frac{1}{[1-\exp(-\lambda)]^2} + \\ & 6q^2 \exp(-2\lambda) \frac{1}{[1-\exp(-\lambda)]^4} + 6q^2 \exp(-\lambda) \frac{1}{[1-\exp(-\lambda)]^3} + q^2 \frac{1}{[1-\exp(-\lambda)]^3}] \end{aligned} \quad (15)$$

结合(15)式和(11)式，可计算出 Mandel Q 参量。平均光子数 \bar{n} 分别取 0.2、0.4、0.6 和 0.8 时，Mandel Q 参量随叠加系数 r 的演化曲线如图 3 所示。从图 3 可见：它的演化规律与二阶关联函数 G 的演化规律类似，随混沌场平均光子数 \bar{n} 逐渐增大，光场呈现亚泊松分布的性质减弱。另一方面，随 r 的减小，光场的亚泊松分布性质增强。这说明增大算符组合部分中产生算符的比重，对改善光场的亚泊松分布性质有利。

6 Wigner 函数

Wigner 函数是位相空间中的准几率分布函数，它的部分负值性实际上是量子态的非经典特性的一个很好的表征。下面利用光场的 P 表示来计算它的 Wigner 函数。利用相干态的超完备性，对于用密度算符 ρ 表示的光场，可将其密度算符表示为

$$\rho = \int \frac{d^2 z}{\pi} P(z) |z\rangle \langle z|, \quad (16)$$

式中函数 $P(z)$ 称为 P 表示^[19]。利用公式 $a^+ \exp(-\lambda a^+ a) = e^\lambda \exp(-\lambda a^+ a) a^+$ ， $\exp(-\lambda a^+ a) a = e^\lambda a \exp(-\lambda a^+ a)$ ，以及反正规表示

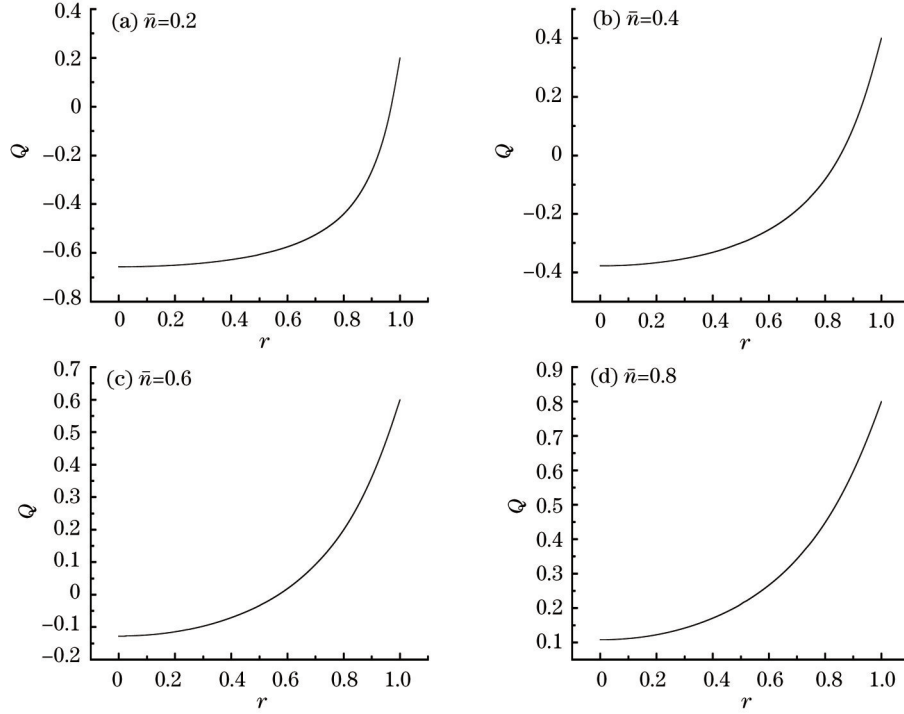


图 3 Q_1 随参数 r 的演化。(a) $\bar{n}=0.2$; (b) $\bar{n}=0.4$; (c) $\bar{n}=0.6$; (d) $\bar{n}=0.8$

Fig.3 Evolution of Q_1 with parameter r . (a) $\bar{n}=0.2$; (b) $\bar{n}=0.4$; (c) $\bar{n}=0.6$; (d) $\bar{n}=0.8$

$$\exp(\lambda a^+ a) = -\exp(-\lambda) : \exp\{[1 - \exp(-\lambda)] a a^+\} :, \quad (17)$$

式中 $: \cdot :$ 表示反正规排序, 可将(3)式表示的密度算符写成反正规表示

$$\begin{aligned} \rho = & -N \exp(\lambda) \{ r^2 : a \exp\{[1 - \exp(\lambda)] a a^+\} a^+ : + r q \exp(\lambda) : a^2 \exp\{[1 - \exp(\lambda)] a a^+\} : + r q \exp(\lambda) \times \\ & : \exp\{[1 - \exp(\lambda)] a a^+\} a^{+2} : + q^2 \exp(2\lambda) : a \exp\{[1 - \exp(\lambda)] a a^+\} a^+ : - q^2 \exp(\lambda) : \exp\{[1 - \exp(\lambda)] a a^+\} : \}. \end{aligned} \quad (18)$$

利用(18)式, 可得出光场组合算符激发混沌场的 P 表示为

$$P(z) = -N \exp(\lambda) \{ r^2 |z|^2 + r q \exp(\lambda) z^2 + r q \exp(\lambda) z^{*2} + q^2 |z|^2 \exp(2\lambda) - q^2 \exp(\lambda) \} \exp\{[1 - \exp(\lambda)] |z|^2\}. \quad (19)$$

利用态的负 P 表示, 它的 Wigner 函数为^[20]

$$W(\alpha, \alpha^*) = \int \frac{d^2 z}{\pi^2} P(z) \exp(-2|z - \alpha|^2), \quad (20)$$

将(19)式代人(20)式, 通过积分求得

$$\begin{aligned} W(\alpha, \alpha^*) = & -N \frac{\exp(\lambda)}{[1 + \exp(\lambda)]^3} \exp\left[2 \frac{1 - \exp(\lambda)}{1 + \exp(\lambda)} |\alpha|^2\right] \\ & \left\{ [r^2 + q^2 \exp(2\lambda)] [1 + \exp(\lambda) + 4|\alpha|^2] + 4r q \exp(\lambda) (\alpha^2 + \alpha^{*2}) - q^2 \exp(\lambda) [1 + \exp(\lambda)]^2 \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

利用 $\alpha = \frac{(x + ip)}{\sqrt{2}}$, 那么以坐标 x 和动量 p 为自变量的 Wigner 函数表示为

$$\begin{aligned} W(x, p) = & -N \frac{\exp(\lambda)}{[1 + \exp(\lambda)]^3} \exp\left[\frac{1 - \exp(\lambda)}{1 + \exp(\lambda)} (x^2 + p^2)\right] \times \\ & \left\{ [r^2 + q^2 \exp(2\lambda)] [1 + \exp(\lambda) + 2x^2 + 2p^2] + 4r q e^\lambda (x^2 - p^2) - q^2 e^\lambda (1 + e^\lambda)^2 \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

r 分别取 0.2 和 0.8, 初始平均光子数 $\bar{n} = 0.2, 0.5, 0.8$ 时, Wigner 函数分布曲线如图 4 所示。图 4(a)、(b) 和 (c), 与 $r = 0.2, \bar{n} = 0.2, 0.5, 0.8$ 相对应, 而 (d)、(e) 和 (f) 与 $r = 0.8, \bar{n} = 0.2, 0.5, 0.8$ 相对应。比较相同 r 值, 不同 \bar{n} 值的 Wigner 函数分布曲线可见, 随平均光子数增大 Wigner 函数的负值区域和最大负值深度都在减小。例如, $r = 0.2, \bar{n} = 0.2$, Wigner 函数的最大负值深度为 -0.35; $r = 0.2, \bar{n} = 0.5$, Wigner 函数的最大负值深度为 -0.25; $r =$

0.2, $\bar{n}=0.8$, Wigner函数的最大负值深度为-0.20。这表明随平均光子数增大光场的非经典性质减弱。

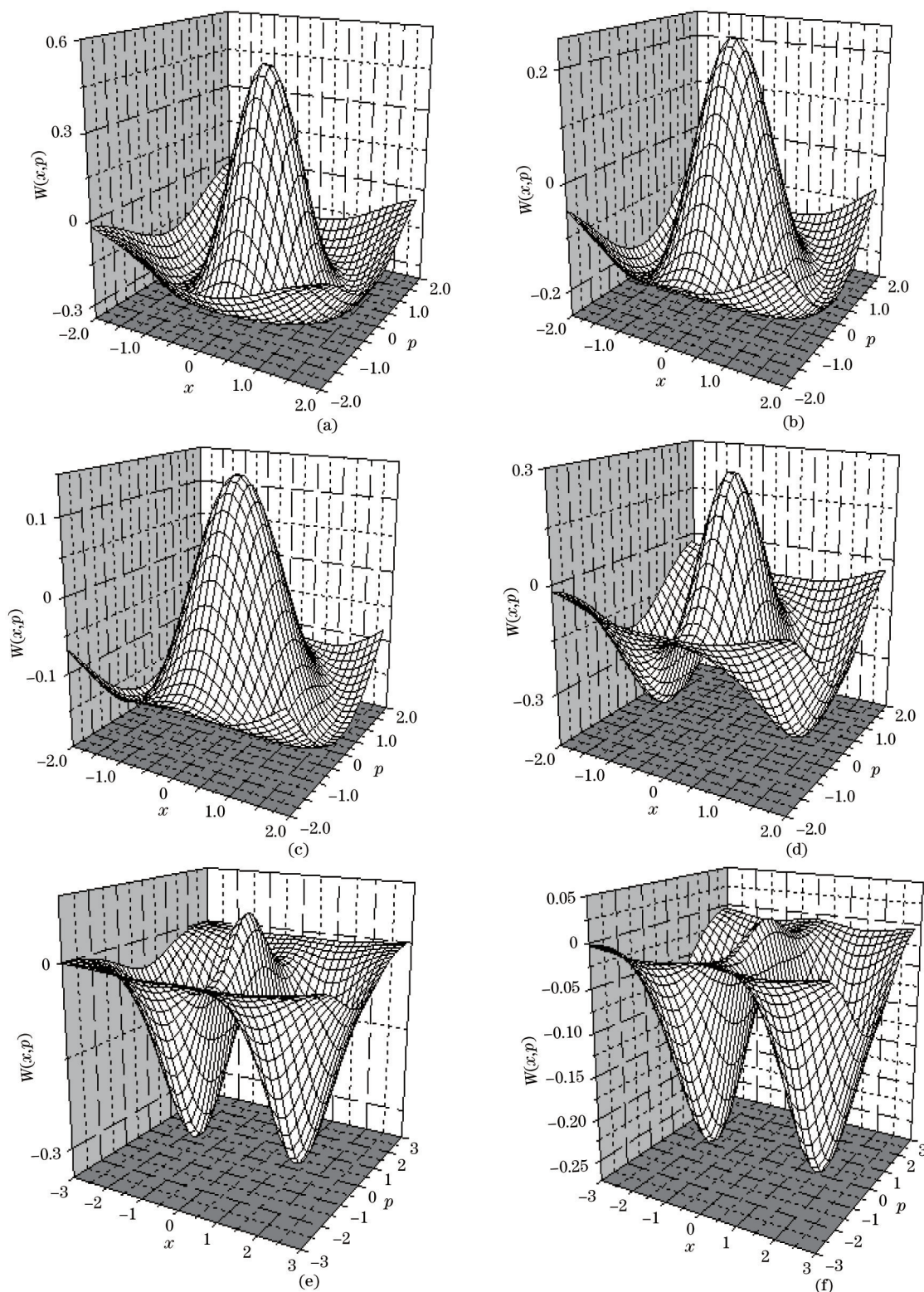


图4 Wigner函数的变化图

Fig.4 Evolution of Wigner function

7 Wigner函数负部体积的演化

Wigner函数在相空间中的负部体积的大小反映了态非经典性质的强弱,它定义为

$$V(t) = \frac{1}{2} \iint [W(\alpha, \alpha^*) - W(\alpha, \alpha^*)] d\alpha d\alpha^* = \frac{1}{2} \iint [W(x, p) - W(x, p)] dx dp . \quad (23)$$

结合(22)式和(23)式, r 取0.2,负部体积 $V(t)$ 随初始平均光子数 \bar{n} 的演化的数值计算结果如图5所示。从图5中可见,随初始平均光子数 \bar{n} 的增大,Wigner函数负部体积逐渐减小。这也表明随平均光子数增大光场的非经典性质减弱。

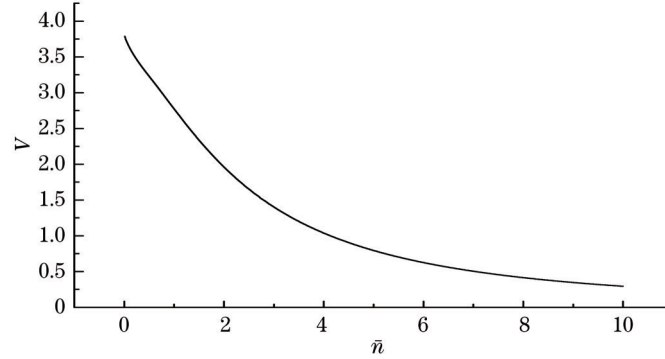


图5 Wigner函数负部体积 V 随平均光子数 \bar{n} 的演化
Fig.5 Evolution of the negative volume of Wigner function with \bar{n}

7 结 论

将单模光场组合算符 $ra + qa^+$ 作用在混沌场上,构造了光场组合算符激发混沌场。通过数值计算,研究了该量子态的压缩效应、反聚束效应、统计性质和 Wigner函数。讨论了叠加系数 r 变化和混沌场初始平均光子数的变化对量子特性的影响。研究表明:该量子态不呈现压缩效应,但其反聚束效应和亚泊松分布性质随混沌场平均光子数增大而减弱。同样,它的 Wigner函数负性和负部体积都随平均光子数增大而减弱。另一方面,随组合系数 r 的减小,光场的反聚束效应和亚泊松分布性质增强。这表明增大算符组合部分中产生算符的比重对增强光场反聚束效应和亚泊松分布性质有利。

参 考 文 献

- 1 Janszky J, Domokos P, Adam P. Coherent states on a circle and quantum interference[J]. Physical Review A, 1993, 48(3): 2213-2129.
- 2 Lu D M. The entropic squeezing of superposition of two arbitrary coherent states[J]. Chinese Physics B, 2008, 17(2): 618-623.
- 3 Agarwal G S, Tara K. Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state[J]. Physical Review A, 1991, 43(1): 492-497.
- 4 Gu Y W, Shi G D, Sun Y Q, *et al.* Nonclassical properties of multiple-photon-added two-mode squeezed coherent states[J]. International Journal Theoretical Physics, 2014, 53(5): 1784-1796.
- 5 Xu X X, Hu L Y, Fan H Y. Photon-added squeezed thermal states: statistical properties and its decoherence in a photon-loss channel[J]. Optics Communications, 2010, 283(9): 1801-1809.
- 6 Zhou J, Fan H Y, Song J. Photon-subtracted two-mode squeezed thermal state and its photon-number distribution[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2012, 51(5): 1591-1599.
- 7 Lee S Y, Nha H. Quantum state engineering by a coherent superposition of photon-subtraction and addition[J]. Physical Review A, 2010, 82(5): 053812.
- 8 Xu X X, Yuan H C, Fan H Y. Decoherence of photon-subtracted squeezed vacuum state in dissipative channel[J]. Chinese Physics B, 2011, 20(2): 024203.
- 9 Hu L Y, Xu X X, Wang Z S, *et al.* Photon-subtracted squeezed thermal state: nonclassicality and decoherence [J]. Physical Review A, 2010, 82(4): 043828.
- 10 Zhou J, Fan H Y, Song J. Photon-subtracted two-mode squeezed thermal state and its photon-number distribution[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2012, 51(5): 1591-1599.
- 11 Zhou J, Song J, Yuan H, *et al.* The statistical properties of a new type of photon-subtracted squeezed coherence state[J]. Chinese Physics Letters, 2012, 29(5): 050301.

- 12 Meng Xiangguo, Wang Jisuo, Liang Baolong. Phase properties for the photon-added even and odd coherent states[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, 27(4): 721-726.
孟祥国, 王继锁, 梁宝龙. 增光子奇偶相干态的相位特性[J]. *光学学报*, 2007, 27(4): 721-726.
- 13 Lu D M. New entangled state representation and its characteristics for the three compatible operators[J]. *Optoelectronics Letters*, 2013, 9(5): 397-400.
- 14 Zavatta A, Parigi V, Kim M S, *et al.*. Experimental demonstration of the bosonic commutation relation via superpositions of quantum operations on thermal light fields[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 103(14): 140406.
- 15 Lee S Y, Ji S W, Kim H J, *et al.*. Enhancing quantum entanglement for continuous variables by a coherent superposition of photon subtraction and addition[J]. *Physical Review A*, 2011, 84(1): 012302.
- 16 Fan H Y, Zhou J, Xu X X, *et al.*. Photon distribution of a squeezed chaotic state[J]. *Chinese Physics Letters*, 2011, 28(4): 040302.
- 17 Fan Hongyi, Hu Liyun. Entangled State Representation Theory of Open System in Dissipation Environment[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2010: 28-31.
范洪义, 胡利云. 开放系统量子退相干的纠缠态表象论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2010: 28-31.
- 18 Fan Hongyi, Yuan Hongchun. From Coherent to Squeezing State[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2012: 12-15.
范洪义, 袁洪春. 从相干态到压缩态[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2012: 12-15.
- 19 Ye Qian, Chen Qianfan, Fan Hongyi. Integral-form solution of the Caldeira-Leggett density operator equation obtained by virtue of thermo entangled state representation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(21): 210301.
叶 骞, 陈千帆, 范洪义. 利用热纠缠态表象获得 Caldeira-Leggett 密度算符方程的积分形式解[J]. *物理学报*, 2012, 61(21): 210301.
- 20 Fan Hongyi. Quantum Mechanics Representation and Conversion Theory[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2012: 136-139.
范洪义. 量子力学表象与变换论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2012: 136-139.

栏目编辑: 刘丰瑞