

# 基于多毛细管 X 光透镜的数值模拟

彭诗棋<sup>1,2,3</sup> 刘志国<sup>1,2,3</sup> 孙天希<sup>1,2,3</sup> 王 镨<sup>1,2,3</sup> 易龙涛<sup>1,2,3</sup> 杨 魁<sup>1,2,3</sup> 陈 曼<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>北京师范大学射线束技术与材料改性教育部重点实验室, 北京 100875

<sup>2</sup>北京师范大学核科学与技术学院, 北京 100875

<sup>3</sup>北京市辐射中心, 北京 100875

**摘要** 为了优化多毛细管 X 光透镜的设计, 利用旋转坐标系的方法建立子管方程, 根据光线追迹原理建立了 X 射线在导管中传输的模型, 直接求解一元四次方程得到 X 射线每次反射时与管壁的交点, 从而追踪单根 X 射线的运动轨迹, 并由大量 X 射线的总的运动规律得到 X 射线在单根导管中的传输规律, 再由单根导管扩展到整个透镜。在此基础上编写程序, 实现了对 X 光透镜的传输效率和光斑的模拟计算。为了验证模拟的准确性, 对两个平行束透镜分别进行了实验测试和模拟。在 8.05 keV 下, 所测的传输效率为 13.0%, 模拟计算结果为 14.2%。在对光斑的模拟中, 模拟所得的光斑也与实验结果相符合。结果表明, 模型的建立是合理的, 在类似透镜的设计制造中有着潜在应用。

**关键词** X 射线光学; X 光透镜; 光线追踪; 数值模拟

中图分类号 O434.1 文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201535.0234001

## Numerical Simulation of Polycapillary X-ray Lens

Peng Shiqi<sup>1,2,3</sup> Liu Zhiguo<sup>1,2,3</sup> Sun Tianxi<sup>1,2,3</sup> Wang Kai<sup>1,2,3</sup> Yi Longtao<sup>1,2,3</sup>

Yang Kui<sup>1,2,3</sup> Chen Man<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Key Laboratory of Beam Technology and Material Modification of the Ministry of Education, Beijing Normal University, Beijing 100875, China

<sup>2</sup>College of Nuclear Science and Technology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China

<sup>3</sup>Beijing Radiation Center, Beijing 100875, China

**Abstract** To optimize the design and fabricate the X-ray lens, the method of rotating coordinate system is used to establish the equation of the tubes. Some mathematical transformations and formulae are used instead of iterative method to find out the intersection of the X-ray and the wall of the capillary, so that X-ray's trajectory can be traced. The transmission rule of the X-ray propagation in the X-ray lens can be got, after tracing a large number of X-ray beams. A program based on ray-tracing method is designed to simulate the transmission efficiency of the X-ray lens and the light spot gained from it. Two parallel lenses are tested to verify the rationalization of the model. As to the transmission efficiency, the experimental result is 13.0% and the simulation result is 14.2% when the energy of the photon is 8.05 keV. And there is a notable similarity between optical and simulated images of the light spot. The results show that the mathematical model is reasonable, and it has the potential of designing and fabricating X-ray lenses.

**Key words** X-ray optics; X-ray lens; ray-tracing; numerical simulation

**OCIS codes** 340.7470; 220.3630

收稿日期: 2014-09-03; 收到修改稿日期: 2014-09-26

基金项目: 北京师范大学自主科研基金重点项目(2012LZD07)、国家自然科学基金(11375027)、中央高校基本科研业务费专项资金(2014KJJCA03)

作者简介: 彭诗棋(1991—),女,硕士研究生,主要从事 X 光学器件的研制和 X 射线荧光分析等方面的研究。

E-mail: pengshiqibj@163.com

导师简介: 刘志国(1968—),男,博士,高级工程师,主要从事 X 射线光学器件研发和应用、核电子学与自动控制等方面的研究。E-mail: liuzhiguo512@126.com(通信联系人)

## 1 引 言

自X射线被发现以来,人们对X射线的认识不断加深,X射线也在许多领域得到了广泛的应用<sup>[1-3]</sup>,X光透镜也应运而生。随着研究的不断深入,人们对X光透镜的性能要求也不断提高,透镜也逐渐向着大型化的方向发展。通过研究X射线在导管中的传输规律,来研究X光导管的性能,从而改进X光透镜的制造工艺,成为了X光学的一个重要研究方向<sup>[4-8]</sup>。

关于X射线在玻璃毛细管中传输理论计算模拟,有几种不同的典型算法<sup>[9-13]</sup>。美国的Ullrich等<sup>[14]</sup>提出的膜重力加速模型,实质是将X射线在三维毛细管中的传输,近似为X射线在毛细管子午面上的传输。比利时的Vincze等<sup>[15]</sup>和日本的Furuta等<sup>[16]</sup>分别提出基于光线追踪理论的计算模型,但他们建立的毛细管内壁方程和本文所提出的不同。例如,Vincze小组把弯管的曲面方程写成极坐标的形式。北京师范大学林晓燕等<sup>[17-18]</sup>也建立过自己的理论模型,但之前所建立的理论模型中,子管的方程式较为复杂,计算光线与毛细导管的交点时,使用的是迭代法,运算速度慢,效率低,无法支持子管数量较多的透镜的模拟。本文利用旋转坐标系的方法建立子管方程,用直接解方程的方法求交点,大大地减少了运算的时间,提高了运算效率,同时也为进行层数较多,子管数量较为庞大透镜的模拟提供了可能。

## 2 X射线的传输理论

### 2.1 X射线的全反射

X射线是一种电磁波,它在物质的界面上会发生反射和折射。但由于X射线波长很短,能量很高,在掠射角较大的情况下,它都会穿过界面,不发生反射。但当掠入射角小于某一临界值时,X射线在界面就会发生反射,而且能量损失较小,此时,可以近似认为X射线发生了全反射,而这个角度则被称为临界角,用 $\theta_c$ 表示。

临界角的大小与X射线的能量( $E_k$ )、介质的成分等因素都有关,但一般可以近似地认为<sup>[19]</sup>

$$\theta_c = \frac{30}{E_k} \text{ m rad} . \quad (1)$$

### 2.2 光线追迹原理

已知入射光线的传播方向 $u$ 和反射面的外法矢量 $n$ ,如图1所示,可以得到反射光线的传播方向 $r$ 。

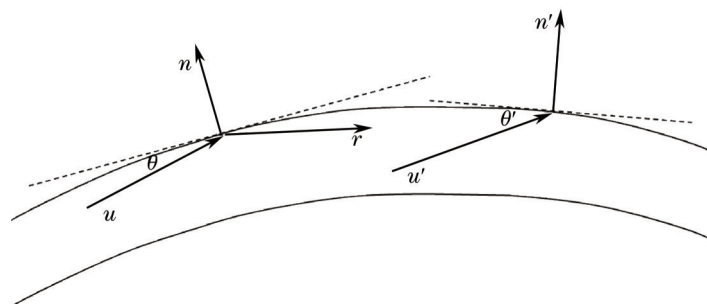


图1 光线追迹原理  $\theta < \theta_c, \theta' > \theta_c$

Fig.1 A diagram of ray-tracing method  $\theta < \theta_c, \theta' > \theta_c$

入射光线与管壁切面的夹角大小为 $\theta = \sin^{-1}(n \cdot r)$ ,若 $\theta \leq \theta_c$ ,则光线在管壁发生全反射,反射光的传播方向 $r = u - 2n \sin \theta$ ,若 $\theta > \theta_c$ ,则X光被吸收,传播截止。再把 $r$ 当作入射光线方向,迭代循环,即可得到光线的传播路径,实现光线追迹。

## 3 数学模型的建立

X光透镜是由许多玻璃毛细管按一定规律排列后拉制而成的,其中的每根管都可以看成是中心线服从二次曲线规律的弯管。要研究X光在透镜中的传输规律,就先要研究X光在单根弯管中的传输规律。

### 3.1 单根弯管的模拟

#### 3.1.1 光线追迹的数学模型

为方便后续的计算工作,此处单根弯管的横截面考虑为圆形,而同一截面处所有弯管直径近似相等,且

所有弯管内外径比都恒为 0.8。由于在整个透镜中玻璃毛细管都是紧密排列的,如图 2 所示,而透镜的尺寸是在不断变化的,因而其中单根弯管的外径也是随着  $z$  的变化而变化的。

先将  $x$  轴上的一排毛细管单独考虑来计算管径的变化情况,排列情况如图 3 所示。

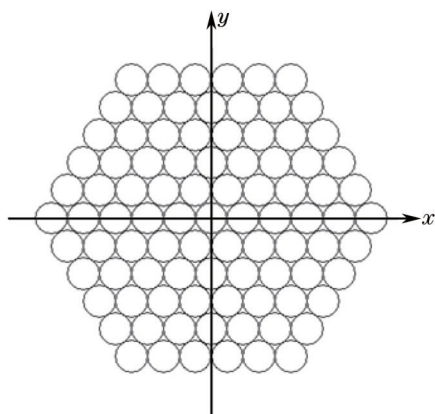


图 2 X 射线透镜截面示意图

Fig.2 Cross-section view of X-ray lens

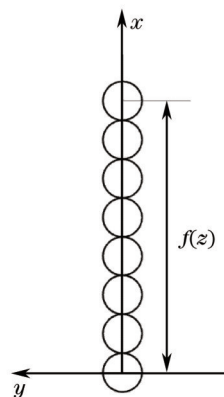


图 3  $z=z_1$  处透镜横截面  $x$  轴上管子排布

Fig.3 Cross-section view of the capillaries on the  $x$ -axis ( $z=z_1$ )

设透镜入口截面处玻璃毛细管外径为  $R_0$ ,  $x$  轴上总共有  $n+1$  根管,其中最外层管的中心线可拟合二次曲线,方程为  $f(z) = a_0 z^2 + b_0 z + c_0$ ,在任意  $z$  处,此根弯管的横截面中心坐标在  $x=f(z)$  处。又因为同一横截面上各管管径相等,可得:

$$R_{out}(z) = \frac{f(z)}{2n} = \frac{a_0 z^2 + b_0 z + c_0}{2n}, \quad (2)$$

而在入口截面处,同理可得:

$$R_0 = \frac{f(0)}{2n} = \frac{c_0}{2n}, \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式可得:

$$R_{out}(z) = R_0 \frac{a_0 z^2 + b_0 z + c_0}{c_0}. \quad (4)$$

如图 4 所示,建立坐标系,光源到管入口长度为  $D$ ,管长  $L$ ,设  $x$  轴上任意管的中心线方程为  $x = f(z) = az^2 + bz + c$ 。又由于管内外径比为 0.8,可得管内壁方程为

$$[x - f(z)]^2 + y^2 = [0.8 \times R_{out}(z)]^2, \quad (5)$$

即

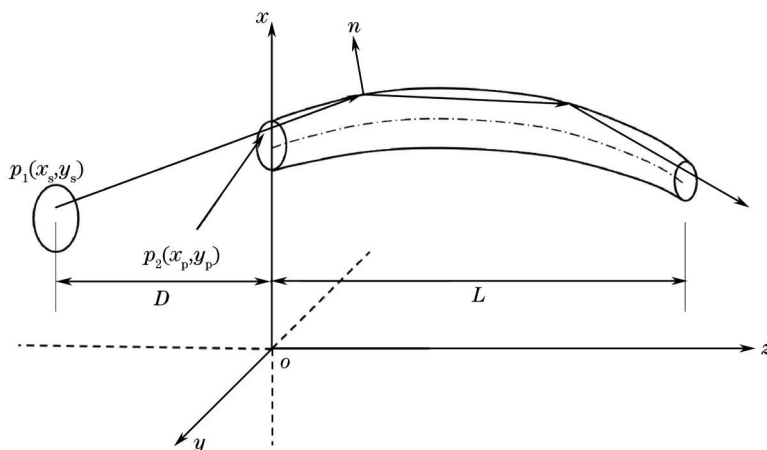


图 4 X 射线单根弯管中传输的示意图

Fig.4 Diagram of X-ray transmission in a bended capillary

$$\left[ x - (az^2 + bz + c) \right]^2 + y^2 = 0.64 \cdot R_0^2 \cdot \left( \frac{az^2 + bz + c}{c} \right)^2. \quad (6)$$

在光源上任选一点 $(x_s, y_s)$ ,在入口截面上任取一点 $(x_p, y_p)$ ,由这两点确定入射光线方向向量:

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = \frac{(x_p - x_s, y_p - y_s, z_p - z_s)}{d_0}, \quad (7)$$

式中  $d_0 = \sqrt{(x_p - x_s)^2 + (y_p - y_s)^2 + (z_p - z_s)^2}$ 。

由管壁(4)式可得,弯管的外法线为

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) = \left( \frac{m_x}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}}, \frac{m_y}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}}, \frac{m_z}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}} \right), \quad (8)$$

式中  $m_x = 2(x - az^2 - bz - c)$ ,  $m_y = 2y$ ,  $m_z = 2(x - az^2 - bz - c)(-2az - b) - 2 \cdot \frac{R_0^2}{c^2} (az^2 + bz + c)(2az^2 + bz)$ 。入射线与弯管的夹角为

$$\theta = \sin^{-1}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = \sin^{-1}(u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z), \quad (9)$$

由此可得,反射光线的方向向量为

$$\mathbf{r} = (u_x - 2n_x \sin \theta, u_y - 2n_y \sin \theta, u_z - 2n_z \sin \theta), \quad (10)$$

再令 $\mathbf{r}$ 为新的入射方向,由此迭代循环,便可追踪任意一条光线的传输路径。

### 3.1.2 光线和管壁交点的求法

在整个模拟过程中,最关键的部分是求光线与管壁的交点。只有精确快速地求出入射光线与管壁的交点,才能得到准确的管壁外法线方向向量,进而求出反射光的方向。设入射光线的起始点为 $(x_s, y_s, z_s)$ ,光线与管壁的交点为 $(x_c, y_c, z_c)$ ,可知入射光线所在的直线方程为

$$\frac{x - x_s}{u_x} = \frac{y - y_s}{u_y} = \frac{z - z_s}{u_z}, \quad (11)$$

与管壁方程(6)式联立可得

$$\left[ x_s + \frac{u_x}{u_z}(z - z_s) - (az^2 + bz + c) \right]^2 + \left[ y_s + \frac{u_y}{u_z}(z - z_s) \right]^2 = \frac{R_0^2}{c^2} (az^2 + bz + c)^2, \quad (12)$$

化简可得一个一元四次方程:

$$z^4 + b_p z^3 + c_p z^2 + d_p z + e_p = 0. \quad (13)$$

现有的数学公式尚无法求解一元四次方程,但是可以利用配方法将一元四次方程转化为一元二次方程与一元三次方程求解。

(13)式移项后可写为

$$z^4 + b_p z^3 = -c_p z^2 - d_p z - e_p, \quad (14)$$

引入一个新参数 $t$ , (10)式等号左右两边同时加上  $\frac{1}{4}b^2 z^2 + \left( z^2 + \frac{1}{2}b_p z \right)t + \frac{1}{4}t^2$ , 整理得:

$$\left[ \left( z^2 + \frac{1}{2}b_p z \right) + \frac{1}{2}t \right]^2 = \left( \frac{1}{4}b_p^2 - c_p + t \right) z^2 + \left( \frac{1}{2}b_p t - d_p \right) z + \frac{1}{4}t^2 - e_p, \quad (15)$$

令:

$$f(z) = \left( \frac{1}{4}b_p^2 - c_p + t \right) z^2 + \left( \frac{1}{2}b_p t - d_p \right) z + \frac{1}{4}t^2 - e_p, \quad (16)$$

再令(14)式的判别式 $\Delta=0$ ,即:

$$\left( \frac{1}{2}b_p t - d_p \right)^2 - 4 \left( \frac{1}{4}b_p^2 - c_p + t \right) \left( \frac{1}{4}t^2 - e_p \right) = 0, \quad (17)$$

这样,便可将等式右边 $f(z)$ 也配成完全平方式,进而可以将(15)式化简为两个一元二次方程进行求解。易知,

(17)式为一元三次方程,其解法详见参考文献[20-21]。光线在管中传输时,光线所在的直线至少与管壁有两个交点,也就是说一元四次方程式至少有两个解。从理论上讲,只有大于光路起点 $z_s$ 的 $z$ 值,才有可能为光线的终点。由于入射光所在的直线与管壁相交,有些交点是直线穿透管壁而形成的,如图5所示,因而所有大于 $z_s$ 的 $z$ 值中,最小值才是光线与管壁的实际交点。

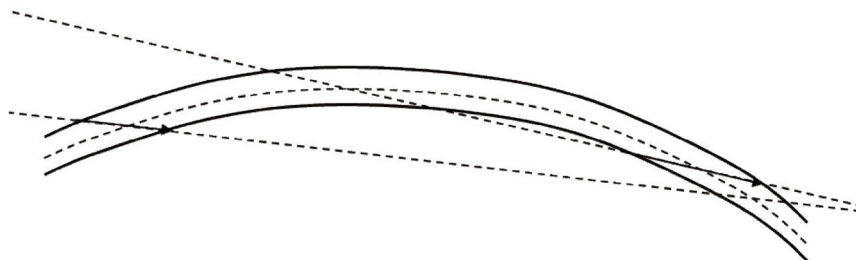


图5 交点取舍示意图

Fig.5 Demonstration of the intersection

### 3.1.3 传输效率与光斑模拟

在光源内和透镜入口截面上分别随机取 $N$ 个点,把它们一一对应相连得到方向和位置都任意的 $N$ 条入射光线,那么进入弯管的总的光线数为 $N$ ,假设每条光线的光强归一化为1,则进入弯管的总光强为

$$I_0 = N, \tag{18}$$

经过 $N$ 次上述追迹过程,可得,出射光光强为

$$I_1 = \sum_1^N \prod_1^M [1 \times R_m(\theta_m)], \tag{19}$$

式中 $M$ 表示反射次数, $R(\theta_m)$ 表示第 $m$ 次反射时的反射系数。传输效率可表示为

$$\eta = \frac{I_1}{I_0}. \tag{20}$$

要模拟光斑,就需要计算每一条光线的传输路径,根据全反射条件判断它最终能否出管,打在屏上。记光线在管内的最后一次反射的反射光方向向量为 $\mathbf{u}_n$ ,起点为 $(x_{sn}, y_{sn}, z_{sn})$ ,屏到管出口端的距离为 $f$ ,可以得到光线打在屏上的坐标为

$$\begin{aligned} x_f &= x_{sn} + \frac{u_{nx}}{u_{nz}}[(L+f) - z_{sn}], \\ y_f &= y_{sn} + \frac{u_{ny}}{u_{nz}}[(L+f) - z_{sn}], \end{aligned} \tag{21}$$

$\mathbf{u}_n$ 可由(9)式和(10)式计算得到。

### 3.2 透镜的模拟

透镜是由许多弯管按一定规律排布起来的,一般管子都是按六边形分布。并不是所有的导管中心都在

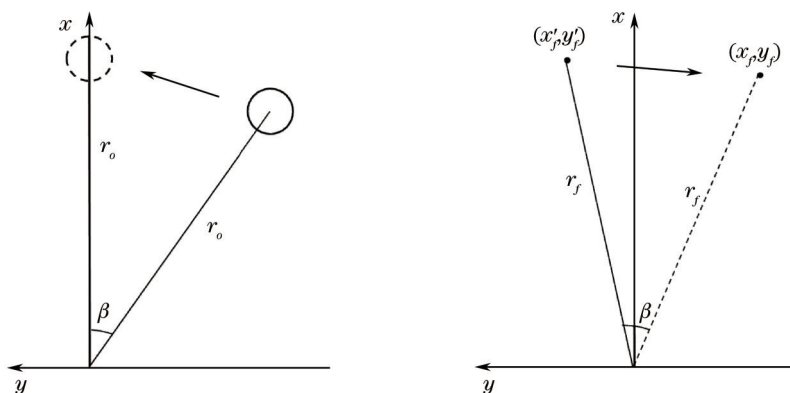


图6 坐标变换示意图

Fig.6 Demonstration of spinning the coordinate axis

$x$ 轴上,也就是说,不是所有导管的管壁方程都满足(4)式。但是,如图6所示,可以通过坐标变换的方法将管道沿着坐标原点旋转到 $x$ 轴上,同时将光源上所选取的点也沿着同样的方向旋转相同的角度。这样就能保证每根管都能满足(4)式,简化了计算。在得到最终的 $(x_f, y_f)$ 之后,再将该点以相反的方向转回原位置即可。

六边形为一个旋转对称图形,因而只需要计算出如图7所示的一个三角形区域的管中心坐标,使其旋转 $j \cdot \sqrt{3}\pi$ 角度,即可得到所有的子管中心坐标。设中心管为第0级管,外面每一层管分别为第1级、第2级以此类推,每一层管中 $x$ 轴上的管为第0根。

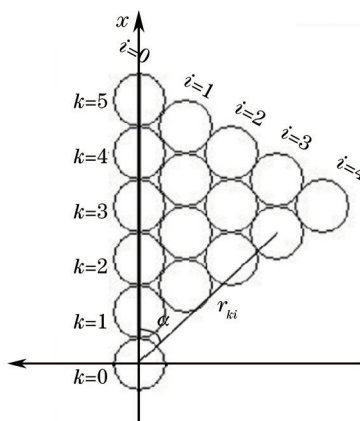


图7 透镜子管中心坐标及每根管的 $abc$ 值

Fig.7 Center coordinates and values of  $abc$  of each tube

易知,第 $k$ 级第 $i$ 根管中心坐标为

$$\begin{aligned} x_{ki} &= (2k - i)R_0, \\ y_{ki} &= -i\sqrt{3}R_0, \end{aligned} \quad (22)$$

管中心到原点的距离为

$$r_{ki} = \sqrt{x_{ki}^2 + y_{ki}^2}, \quad (23)$$

中心和原点的连线与 $x$ 轴之间的夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{y_{ki}}{x_{ki}}. \quad (24)$$

子管旋转到 $xoz$ 平面上后,需要知道它的中心线二次方程的系数,才能进行进一步的计算。易知,常数项系数 $c_{ki}=r_{ki}$ ,而 $a_{ki} = \frac{c_{ki}}{c_0}a_0$ ,  $b_{ki} = \frac{c_{ki}}{c_0}b_0$ 。  $a_0$ 、 $b_0$ 如之前所述,都是 $x$ 轴上最外层管中心线方程的系数。得到了每根管的中心线方程系数,代入(4)式就可以得到管壁方程,继而模拟光线在其中的传播。

### 3.3 运算时间

在每根子管模拟光线数恒定的情况下,子管的根数直接决定了运算的次数和模拟计算的时间。而一个透镜的子管数 $n$ 直接取决于透镜的层数 $k$ (同样假定中心单管为第0层),并与层数有着如下的关系:

$$n = 1 + k \cdot \frac{k+1}{2} \cdot 6. \quad (25)$$

通常情况下,一个透镜内有20~60万根子管,如果使用迭代法求交点,运算速度会非常慢。如果使用本文中所述的数学变换直接求交点,运算速度会大幅提升,运算时间也会相应地缩短。

## 4 结果和讨论

### 4.1 传输效率理论值和实验结果比较

在北京师范大学低能核物理研究所X光学实验室,进行了平行束透镜的传输效率的实验测量。实验使用铜靶微焦斑光源,实验条件如下:X射线能量 $E=8.05$  keV,透镜入口端尺寸6.4 mm,出口端尺寸8.1 mm,透镜长 $L=46.4$  mm,子管层数为285层(子管总数有244531根),入口焦距66.5 mm。得到传输效率的理论值为14.2%,

通过实验,得到该透镜传输效率的实验值为13.0%。可以看出理论结果和实验结果非常接近。

#### 4.2 光斑的模拟结果和实验结果比较

为了验证模拟的准确性,除了对比传输效率的理论值和实验值之外,还对透镜所形成的光斑进行了模拟验证。实验使用的是铜靶微焦斑光源,实验条件为9 kV,200  $\mu$ A,照射胶片25 min;为了使光斑的清晰可分辨在光斑的实验和模拟中使用层数较少的透镜,模拟光斑所用的透镜及实验条件为:X射线能量 $E=8.05$  keV,透镜入口端尺寸6.24 mm,出口端尺寸7.16 mm,透镜长 $L=52.1$  mm,子管层数为24层(透镜子管数为1801根),每根单管模拟200个光子。图8给出了在上述实验条件下,出口截面上,光斑的模拟结果,和用X光胶片拍照所得的实验结果。可以看出,模拟结果与实验结果符合得比较好。

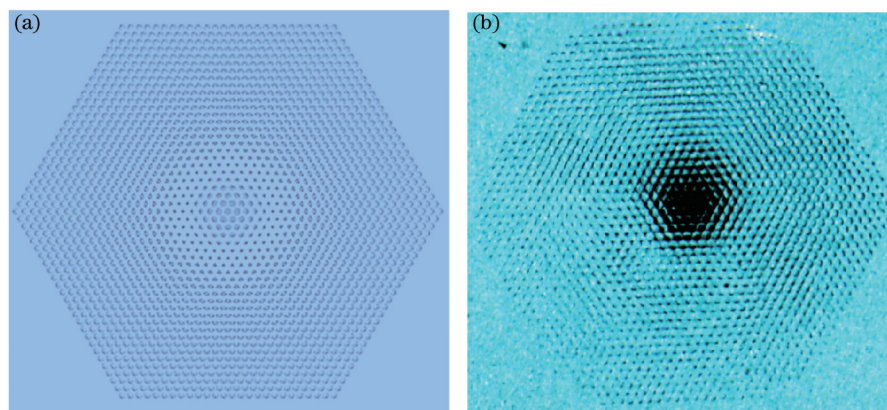


图8 (a)模拟结果与(b)实验结果对比图

Fig.8 (a) Simulation results and (b) experimental results

## 5 结 论

虽然X射线是电磁波,但透镜中子管的内径远远大于X射线的波长,满足了几何光学的近似条件。本文经过几何光学近似,用光线追迹的方法,建立了大型毛细管X光透镜的数值模型,模拟了X光通过透镜后的光斑并得到了传输效率的理论值。理论结果和实验结果符合,说明数学模型的建立是合理的,另外,利用四次方程计算交点的方法所得结果优于以往的迭代法,使得计算速度更快,精度更高,也使得在普通的计算机上实现更大型更复杂的透镜的模拟成为可能。

### 参 考 文 献

- 1 Sun Tianxi, Liu Zhiguo, Peng Song, *et al.*. Study on resolution limit of total-reflection X-ray optics with heisenberg uncertainty principle [J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(12): 1217001.  
孙天希, 刘志国, 彭松, 等. 利用海森堡不确定性原理研究全反射X射线光学器件的焦斑极限 [J]. 中国激光, 2013, 40(12): 1217001.
- 2 Sun Tianxi, Liu Hehe, Liu Zhiguo, *et al.*. Application of confocal micro X-ray fluorescence technique based on polycapillary X-ray lens in analyzing medicine with capsule [J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(1): 0134001.  
孙天希, 刘鹤贺, 刘志国, 等. 毛细管X光透镜共聚焦微束X射线荧光技术在胶囊类药品分析中的应用[J]. 光学学报, 2014, 34(1): 0134001.
- 3 Xiao Tiqiao, Xie Honglan, Deng Biao, *et al.*. Progresses of X-ray imaging methodology and its applications at shanghai synchrotron radiation facility[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(1): 0100001.  
肖体乔, 谢红兰, 邓彪, 等. 上海光源X射线成像及其应用研究进展[J]. 光学学报, 2014, 34(1): 0100001.
- 4 Teng Yuepeng, Sun Tianxi, Liu Zhiguo, *et al.*. New type moncapillary X-ray optical device [J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(2): 542-545.  
滕玥鹏, 孙天希, 刘志国, 等. 一种新型单毛细管X光学器件[J]. 光学学报, 2010, 30(2): 542-545.
- 5 Tan Yewu, Ding Xunliang. Experimental research on the transmission efficiency of straight guiding moncapillaries [J]. Journal of Beijing Normal University (Natural Science), 1995, 31(1): 71-74.

- 谭业武, 丁训良. X光直单管传输特性的实验研究[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 1995, 31(1): 71-74.
- 6 Mroczka R, Żukociński G, Kuczumow A. Geometrical description of the X-ray capillaries with assumed reflection features [J]. Journal of alloys and compounds, 2004, 382(1): 311-319.
- 7 Sun Tianxi, Ding Xunliang, Liu Zhiguo, *et al.*. Experimental investigation of properties of polycapillary X-ray lens [J]. Acta Optica Sinica, 2005, 25(10): 1436-1440.  
孙天希, 丁训良, 刘志国, 等. 整体X光透镜性能实验研究[J]. 光学学报, 2005, 25(10): 1436-1440.
- 8 Li Yude, Lin Xiaoyan, Pan Qiuli, *et al.*. Study on the transmission characteristics of a tapered X-ray Capillary [J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(1): 310-314.  
李玉德, 林晓燕, 潘秋丽, 等. 圆锥形X光导管的传输特性研究[J]. 光学学报, 2010, 30(1): 310-314.
- 9 Niu Shengli, Peng Yu, Wang Jianguo, *et al.*. Simulation of X-ray transmission through mono-capillaries by Monte-Carlo method [J]. High Power Laser and Particle Beams, 2005, 16(12): 1513-1517.  
牛胜利, 彭玉, 王建国, 等. X光导管传输特性的蒙特卡罗模拟[J]. 强激光与粒子束, 2005, 16(12): 1513-1517.
- 10 R Huang, D H Bilderback. Simulation of microfocussed image size from a one-bounce glass capillary [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2001, 467-468(part2): 978-981.
- 11 A Liu. Simulation of X-ray beam collimation by polycapillaries[J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms, 2005, 234(4): 555-562.
- 12 R Mroczka, G Żukociński, A Kuczumow. Investigations of different trajectories of X-rays in capillaries [J]. Journal of Alloys and Compounds, 2004, 362(1): 88-95.
- 13 L Alianelli, M Sánchez del Río, K J S Sawhney. Ray-tracing simulation of parabolic compound refractive lenses [J]. Spectrochimica Acta Part B: Atomic Spectroscopy, 2007, 62(6): 593-597.
- 14 J B Ullrich, V Kovantsev, C A MacDonald. Measurements of polycapillary X-ray optics [J]. J Appl Phys, 1993, 74(10): 5933-5939.
- 15 L Vincze, K Janssens, F Adams, *et al.*. Interpretation of capillary generated spatial and angular distributions of X rays: Theoretical modeling and experimental verification using the European Synchrotron Radiation Facility Optical beam line [J]. Rev Scienti Instrum, 1998, 69(10): 3494-3503.
- 16 K Furuta, Y Nakayama, M Shoji, *et al.*. Theoretical consideration of intensity of an X-ray microbeam formed by a hollow glass pipe [J]. Rev Scienti Instrum, 1993, 64(1): 135-142.
- 17 Lin Xiaoyan. Simulation of X-ray Transmission Through a Capillary [D]. Beijing: Beijing Normal University, 2005.  
林晓燕. X射线在毛细导管中传输规律的研究[D]. 北京: 北京师范大学, 2005.
- 18 X Lin, A Liu, Y Li, *et al.*. A Matlab programming for simulation of X-ray capillaries [J]. Appl Math Comput, 2006, 172(1): 188-197.
- 19 D Hampai, S B Dabagov, G Cappuccio, *et al.*. PolyCAD: a new X-ray tracing code for polycapillary Optics [C]. X-Ray and Neutron Capillary Optics II. International Society for Optics and Photonics, 2005, 5943: 7-14.
- 20 Fan Shengjin. A new extracting formula and a new distinguishing means on the one variable cubic equation [J]. Journal of Hainan Normal University (Natural Science), 1989, 2: 91-98.  
范盛金. 一元三次方程的新求根公式与新判别法[J]. 海南师范学院学报(自然科学版), 1989, 2(2): 91-98.
- 21 Yan Yanli. Application of identical transformation in cubic equation and quartic equation [J]. The Guide of Science & Education, 2013, (28): 204-205.  
闫艳丽. 变换与恒等式在一元三次, 四次方程求根中的应用[J]. 科教导刊, 2013, (28): 204-205.

栏目编辑: 张雁