

# 迭代加权质心法机理及多星定位误差特性研究

张 俊 郝云彩 刘 达

北京控制工程研究所, 北京 100080

**摘要** 提高星敏感器星点定位精度是高精度星敏感器关键技术之一。常规质心法和高斯拟合法定位最小均方误差在0.1 pixel左右,难以满足未来高精度定位需求。在自适应光学领域,为研究Shack-Hartmann传感器波前定位而提出的迭代加权质心算法(IWCOG),其定位误差优于前两种算法,但目前该算法的定位机理及多星定位误差特性未知。从Meanshift理论角度推出该算法定位机制,证明算法的收敛性;每个仿真采用蒙特卡罗方法随机生成10000个星点样本,通过分析星点参数、信噪比与定位误差的关系研究IWCOG算法在星敏感器多星定位的特点。模拟结果显示,在信噪比 $R=40$ 下,IWCOG法星点提取误差低于0.02 pixel的样本占44%,低于0.04 pixel的占72%,远高于质心法的0.8%和1.9%,基本满足甚高精度星敏感器的定位要求。

**关键词** 探测器;星敏感器;迭代加权质心算法;Meanshift;蒙特卡罗;定位精度;Shack-Hartmann

中图分类号 V448

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201535.0204001

## Investigation on the Mechanism and Positioning Error of Multi-Star Spots Extraction of Iteratively Weighted Center of Gravity algorithm

Zhang Jun Hao Yuncai Liu Da

Beijing Institute of Control and Engineering, Beijing 100080, China

**Abstract** Improving the positioning accuracy of star spots is still one of crucial technologies in high precision star trackers. The minimum meansquared error of the conventional center of gravity (COG) and Gaussian curve fitting (GCF) algorithm for positioning is about 0.1 pixel, hardly to meet the future demand for high-precision positioning. In the field of adaptive optics, an iteratively weighted center of gravity (IWCOG) is proposed for wave-front localization of Shack-Hartmann sensor with superior performance to the first two algorithms in locating accuracy. However, the positioning mechanism of IWCOG and the performance on the multi-star positioning accuracy are currently unknown. On the one hand, this paper introduces the positioning mechanism of the algorithm from a theoretical perspective of Meanshift and proves the convergence of the IWCOG algorithm. On the other hand, 10000 randomly star spots are generated with Monte Carlo method in every single simulation to study the influence of IWCOG algorithm on multi-star positioning accuracy in star tracker by studying relationship between the star point parameters, signal to noise ratio and positioning errors. The result shows that there are 44% samples with positioning error lower than 0.02 pixel and 72% with error lower than 0.04 pixel using IWCOG algorithm under signal to noise ratio  $R$  equal to 40, much better than the COG with only 0.8% and 1.9%, basically meeting the positioning requirements of super-high accuracy star tracker.

**Key words** detectors; star tracker; iteratively weighted center of gravity; Meanshift; Monte Carlo; positioning accuracy; Shack-Hartmann

**OCIS codes** 040.1520; 040.1880; 040.5160; 100.2000; 220.1080

收稿日期: 2014-08-19; 收到修改稿日期: 2014-09-18

基金项目: 国家自然科学基金(61174004, 61302177)

作者简介: 张俊(1984—),男,博士研究生,主要从事星敏感器方面的研究。E-mail: zhangjun208@mails.ucas.ac.cn

导师简介: 郝云彩(1966—),男,研究员,博士生导师,主要从事空间光学仪器与导航方面的研究。

E-mail: hyc502cast@163.com

## 1 引 言

高分辨率及超高分辨率遥感卫星、天文观测等任务对星敏感器星点定位技术提出了更高要求,目前国际上已有在轨使用的甚高精度星敏感器产品中,SIRTF使用的AST-301星跟踪器、Pléiades使用的SED36星跟踪器、Ball Aerospace公司的HAST等姿态定位精度均达到亚角秒量级,其关键技术之一是单星提取精度的提高,国际上报道的单星提取精度可达0.02 pixel<sup>[1]</sup>,这是传统定位算法很难获得的。目前已经研究的较为成熟的提取算法主要有以下两类:1)直接法,直接用星点的像素灰度直方图研究定位误差,如Stanton等<sup>[2]</sup>研究的质心法(COG)及带阈值的质心法和Trinder<sup>[3]</sup>研究的灰度平方加权法等,报道较好的均方误差(MSE)在0.1 pixel左右;2)间接法,以形貌拟合星点像素灰度直方图的方法提取质心,如Stone<sup>[4]</sup>研究的高斯曲面和抛物面拟合法和王海涌等<sup>[5]</sup>研究的简易高斯灰度扩散模型等,其MSE性能在低噪声下较质心法高,但计算量大,当星点分布偏离理想形貌时,所得误差也较大。

高斯形貌拟合法比常规质心法提取的精度要高,主要源于以下两点:1)形貌拟合保留了信号“曲线”信息,而质心法则暗示信号分布图应符合阶梯形貌;2)形貌拟合通过迭代方式修正与实际形貌偏差,当形貌与真实信号相同时迭代终止。而质心法只有足够的采样点情况下才能保证其为无偏估计,由于CCD探测器尺寸和光谱响应能力限制,实际星点采样一般仅覆盖少数像素,不满足无偏估计要求。曲面拟合法计算量大,不满足实时要求。为实现更高精度定位,在研究Shack-Hartmann传感器波前定位时,着重研究了迭代加权质心算法(IWCOG),如Nightingale等<sup>[6-7]</sup>用仿真方法研究了其定位误差与信号参数、信噪比的关系及算法运行效率,Baker等<sup>[8]</sup>研究了该算法过程参数随迭代次数的变化,Thomas等<sup>[9]</sup>详细推导了其定位误差与信号参数关系表达式。研究表明,该算法迭代方式更能逼近真实点源位置,计算简单,迭代次数可控。但是,上述研究并未给出算法最终来源和机理,由于Shack-Hartmann传感器波前定位的特殊性,上述研究也未从随机统计角度揭示其在多个点源定位中的特点,目前尚未发现该算法在星敏感器产品上直接应用的报道。

由于星敏感器部件工艺和工作环境的复杂性,星点图像多偏离理想状态,星点提取完成后要对星敏感器进行建模以做地面标定和在轨标定<sup>[10-13]</sup>,然而标定的前提仍然是较高的单星提取精度。本文以图像视觉领域经典的Meanshift算法<sup>[14-16]</sup>为基础,研究IWCOG算法机理,证明了IWCOG算法的收敛性,并采用蒙特卡罗法随机生成多个星点,分析大量随机采样下的算法运行特点,探索其应用于星敏感器星点提取的可能性。

## 2 迭代加权质心定位算法机理和仿真流程

### 2.1 经典的Meanshift理论

基于Meanshift理论的技术是解决图形聚类、分割、模态识别和非刚性物体跟踪等图像视觉问题的有力工具。Meanshift框架最早是由FuKunaga等<sup>[14]</sup>发明的一种无参估计算法,主要思想是沿着密度梯度的上升方向寻找概率分布的峰值。最初的Meanshift表达式为

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n s_i g}{\sum_{i=1}^n g}, \quad (1)$$

式中  $g = g(\|(x - s_i)/\sigma\|^2)$  是核函数,  $\|\cdot\|^2$  表示取2范数,  $s_i$  为样本点,  $n$  为样本数,  $\hat{m}(x)$  为估计的样本中心,  $\sigma$  为样本尺度。

样本点随距离样本中心的不同,其对均值  $\hat{m}(x)$  的贡献是不相同的。Cheng<sup>[15]</sup>最先考虑了这个因素,提出的更为一般的Meanshift表达式为

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n s_i g \omega(s_i)}{\left[ \sum_{i=1}^n g \omega(s_i) \right]}, \quad (2)$$

式中  $\omega(s_i)$  为权函数,其余参数定义同(1)式,以下类同。

按Cheng的算法原理,(2)式中的  $\omega(s_i)$  含义为离样本中心不同距离的样本点具有不同的权重,一般越近则权值越大,表示对均值  $\hat{m}(x)$  的贡献越多。Cheng的算法扩大了Meanshift算法的应用范围,解决了聚类、模态识别、图像分割等问题。但是Cheng并未指出如何选取  $\omega(s_i)$  和解释其物理含义。

Comaniciu 等<sup>[6]</sup>为解决非刚性物体的跟踪问题,使用 Bhattacharyya 系数定义了候选目标和跟踪目标的相似性,重新解释并导出了  $\omega(s_i)$  公式,成功解决了视觉跟踪问题。但是,目前上述算法研究主要集中在样本点比较大的情况。实际星点覆盖像素数有限,属于小样本,上述算法不能算出星点的真实位置,且原算法主要解决聚类与跟踪的问题,与星点定位并不相同。IWCOG 算法在点源定位上取得了成功,主要改变是 IWCOG 算法改进了(2)式加权方法,即将每步迭代的均值作为权函数新的中心点再次迭代计算(原算法是将窗口移动到每次迭代的中心点),最终得到星点真实位置。可见,加权函数  $\omega$  如何选取和解释是 Meanshift 算法能否扩展于其他应用的关键,以下结合 Meanshift 原理,通过形貌的互相关性研究,给出算法公式,重新阐释加权函数含义,并证明算法的收敛性。

## 2.2 IWCOG 算法原理

星点在探测器焦面成像后,覆盖若干像素形成固定形貌的灰度直方图,在星点形貌较为理想情况下,可假定其形貌符合  $\omega(x; s_i)$ , 然后不断移动  $\omega(x; s_i)$  中心位置逼近星点的灰度直方图,可知当二者互相关系数达到最大时,此中心即为所求。

设欲跟踪的实际星点形貌为  $g(s_i)$ , 离散化采样为  $g_i \in s(g)$ , 候选目标形貌为  $\omega(x; s_i)$ , 中心点为  $x$ , 离散化为  $\omega_i \in s(\omega)$ , 则跟踪形貌  $g(x; s_i)$  与目标形貌  $\omega(x; s_i)$  的互相关表示为  $\rho[s(g), s(\omega)] = \text{cov}[s(g), s(\omega)]$ ,  $\text{cov}(\cdot, \cdot)$  为求协方差, 其意义是使得跟踪形貌和目标形貌中心点一致, 可通过迭代并令每步迭代后的星点与目标形貌的一阶原点矩满足  $E_g(s_i) = E_\omega(s_i) = m(x)$ , 则可得

$$\text{cov}[s(g), s(\omega)] = E\{[s_i - E_g(s_i)][s_i - E_\omega(s_i)]\} = \sum_{i=1}^n [s_i - m(x)][s_i - m(x)]g_i\omega_i, \quad (3)$$

式中  $E(\cdot)$  为求数学期望。为使二者相似度最大, 只需  $\partial \text{cov}[s(g), s(\omega)] / \partial m(x) = 0$ , 从而得到

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n s_i g \omega(s_i)}{\left[ \sum_{i=1}^n g \omega(s_i) \right]}. \quad (4)$$

比较(1)~(4)式可知, (4)式中的  $\omega(x; s_i)$  物理含义为目标形貌, 脱离了 Meanshift 算法原本的定义, 质心法相当于跟踪  $\omega(x; s_i) = 1$  的目标形貌。迭代含义即令  $\hat{m}(x) \rightarrow x$  进行下一次计算, 也即跟踪形貌  $g(x; s_i)$  通过目标形貌  $\omega(x; s_i)$  不断追踪逼近。

按 Cheng<sup>[15]</sup>的推导, 影子核  $\hat{q}_k(x)$  取得最大值即得到灰度直方图最大密度点, 此时  $\hat{m}(x) - x \approx 0$ ,  $x$  即为所求。这要求  $\omega(x; s_i)$  满足

$$\arg \max \left[ \hat{q}_k(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(x; s_i) \omega(x; s_i) \right], \quad (5)$$

式中  $K(x; s_i) = c_{k,d} k \left( \left| \frac{x - s_i}{\sigma} \right|^2 \right)$ , 其中  $c_{k,d}$  为归一化系数,  $k$  为核函数,  $d$  为  $k$  的维数,  $K$  为  $k$  的影子核<sup>[15-16]</sup>, 利用施瓦兹不等式可得

$$\sum_i K(x; s_i) \omega(x; s_i) \leq \left[ \sum_i K^2(x; s_i) \right]^{1/2} \cdot \left[ \sum_i \omega^2(x; s_i) \right]^{1/2}, \quad (6)$$

当且仅当  $K(x; s_i) = C\omega(x; s_i)$  ( $C$  为常数) 时等号成立。所以, 当  $\omega(x; s_i) = K(x; s_i)$  时, 通过(4)式计算即可找到星点真实位置。

对于高斯星点形貌  $g(s_i)$ , 其影子核函数  $K$  (或  $\omega$ ) 仍然为高斯函数。由于星点灰度直方图是  $g(s_i)$  积分近似, IWCOG 算法以星点灰度直方图灰度值代替它。

对于理想情况  $\omega(x; s_i) = K(x; s_i)$  时, 算法的收敛性证明参见定理 1。

定理 1 若  $K(x; s_i)$  为凸函数,  $x_{j+1} \neq x_j$ , 其中  $j$  表示第  $j$  次迭代, 则  $\hat{q}_k(x_{j+1}) > \hat{q}_k(x_j)$ ,  $\hat{q}_k(x)$  收敛于一点。

证明: 当  $\omega(x; s_i) = CK(x; s_i)$  时,  $\hat{q}_k(x) = \frac{C}{n} \sum_{i=1}^n K^2(x; s_i)$ , 则有

$$\hat{q}_K(x_{j+1}) - \hat{q}_K(x_j) = \frac{C c_{k,d}^2}{n \sigma^{2d}} \left[ \sum_{i=1}^n k^2 \left( \left\| \frac{x_{j+1} - s_i}{\sigma} \right\|^2 \right) - \sum_{i=1}^n k^2 \left( \left\| \frac{x_j - s_i}{\sigma} \right\|^2 \right) \right]. \quad (7)$$

由凸函数性质  $\hat{q}_K(x_{j+1}) - \hat{q}_K(x_j) \geq \hat{q}'_K(x_j)(x_{j+1} - x_j)$ , 可令

$$t \left( \left\| \frac{x_j - s_i}{\sigma} \right\|^2 \right) = k \left( \left\| \frac{x_j - s_i}{\sigma} \right\|^2 \right) \cdot k' \left( \left\| \frac{x_j - s_i}{\sigma} \right\|^2 \right). \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}'_K(x_j)(x_{j+1} - x_j) &= \frac{C c_{k,d}^2}{n \sigma^{2d+2}} \sum_i t \left( \left\| \frac{x_j - s_i}{\sigma} \right\|^2 \right) \left( \|x_j - s_i\|^2 - \|x_{j+1} - s_i\|^2 \right) = \\ &= \frac{C c_{k,d}^2}{n \sigma^{2d+2}} \sum_i t \left( \left\| \frac{x_j - s_i}{\sigma} \right\|^2 \right) \left( |x_j|^2 - 2x_j s_i - |x_{j+1}|^2 + 2x_{j+1} s_i \right) = \\ &= \frac{C c_{k,d}^2}{n \sigma^{2d+2}} \left[ \sum_i t \left( \left\| \frac{x_j - s_i}{\sigma} \right\|^2 \right) |x_j|^2 - 2x_j x_{j+1} \sum_i t \left( \left\| \frac{x_j - s_i}{\sigma} \right\|^2 \right) + |x_{j+1}|^2 \sum_i t \left( \left\| \frac{x_j - s_i}{\sigma} \right\|^2 \right) \right] = \\ &= \frac{C c_{k,d}^2}{n \sigma^{2d+2}} \left[ \sum_i t \left( \left\| \frac{x_j - s_i}{\sigma} \right\|^2 \right) \right] \left( |x_j| - |x_{j+1}| \right)^2 > 0, \end{aligned} \quad (9)$$

由此可得

$$\hat{q}_K(x_{j+1}) - \hat{q}_K(x_j) \geq \hat{q}'_K(x_j)(x_{j+1} - x_j) > 0, \hat{q}_K(x_{j+1}) > \hat{q}_K(x_j). \quad (10)$$

同样可证

$$\hat{q}_K(x_{j+m}) > \hat{q}_K(x_j), \hat{q}_K(x) = \frac{C}{n} \sum_{i=1}^n K^2(x; s_i) < \frac{C}{n} \sum_{i=1}^n \max[K^2(x; s_i)]. \quad (11)$$

可知,  $\hat{q}_K(x)$  单调递增有上限必收敛。

### 2.3 蒙特卡罗仿真流程

IWCOG算法流程如下:

- 1) 选择  $\omega$  函数及  $x = x_j$  的初始参数  $x_0, \sigma, j$  为整数;
- 2) 计算加权系数  $\omega_i = \omega(x; s_i)$ ;
- 3) 更新  $x_{j+1} = \sum_i x_i g_i \omega_i / \sum_i g_i \omega_i$ ,  $g_i$  为直方图;
- 4) 若  $|x_{j+1} - x_j| \leq \Delta$ , 其中  $\Delta$  为迭代终止条件, 停止迭代, 否则令  $x = x_{j+1}$ , 重复步骤 2)~4)。

实际星点的位置(相位  $\mu$ )、PSF尺度( $\sigma$ )、信噪比( $R$ )及计算窗口大小( $M$ )等是算法定位误差主要影响因素, 本文采用蒙特卡罗法随机生成星点灰度直方图, 按一定信噪比加入一定读出噪声(高斯), 然后分别采用COG算法、高斯拟合法(GCF)<sup>[17]</sup>、IWCOG算法计算质心, 最后减去真实的质心计算样本的误差, 系统分析各参数对定位误差的影响。

定义信号为  $g(I; x; \mu) = I_0 / \sqrt{2\pi} \sigma \exp[-(x - \mu)^2 / 2\sigma^2]$ , 加权函数为  $\omega(x; \mu) = \exp[-(x - \mu)^2 / 2\sigma^2]$ , 信噪比  $R = I_0 / (\sqrt{M} \sigma_n)$ , 其中  $I_0$  和  $\sigma_n$  分别为信号强度和噪声方差, 设第  $i$  个星点仿真真实的质心为  $\mu_{\text{real},i}$ , 使用算法计算的质心为  $\mu_{\text{calc},i}$ , 则单星定位误差为  $\varepsilon_i = |\mu_{\text{real},i} - \mu_{\text{calc},i}|$ ,  $N$  次蒙特卡罗法仿真所得的定位误差(本文误差均指  $\delta$  或  $\varepsilon$ )定义为

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2} / N = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\mu_{\text{calc},i} - \mu_{\text{real},i})^2} / N. \quad (12)$$

图 1 为全文的仿真流程图, \*代表采用蒙特卡罗采样。表 1 是全文仿真中使用的参数和取值范围。其中, 像素尺度单位为 1,  $N = 10000$  是为得到稳定  $\delta$ 。本文以  $\sigma, \mu, M$  及  $R$  等为自变量, 以  $\delta$  或  $\varepsilon$  为因变量进行蒙特卡罗仿真, 若不加说明, 模拟参数和结果均按表 1 和图 1 执行。

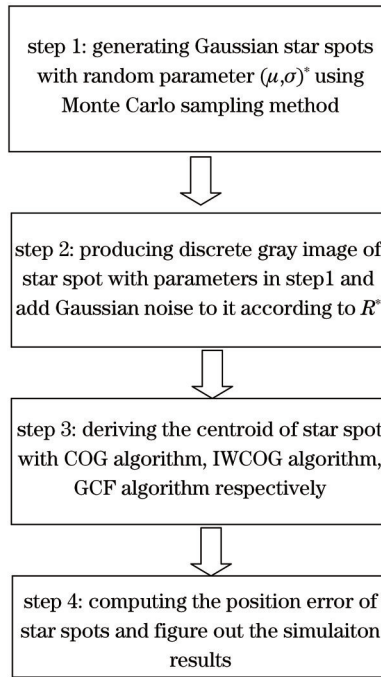


图1 星点提取蒙特卡罗仿真流程实施图

Fig.1 Implementation of Monte Carlo simulation for star spot extraction

表1 星点提取蒙特卡罗仿真参数和取值范围

Table 1 Parameters and values of star spot extraction in Monte Carlo simulation

Parameter	Range of value	Parameter	Range of value
$I_0$	100	$\Delta$ /pixel	$10^{-3}$
$\sigma$ /pixel	[0.6, 1.3]	$M$ /pixel	3、5、7 or more
$\mu$ /pixel	[-0.5, 0.5]	Gaussian noise	$\mu_n = 0, \sigma_n$
$R$	[2, 100] or without noise	$N$	10000

### 3 仿真过程与讨论

#### 3.1 $R$ 和 $M$ 对定位误差的影响

用蒙特卡罗法随机给出  $(\mu, \sigma)$  模拟生成 10000 个星点灰度直方图, 改变  $R$  和  $M$  值, 仿真结果如图 2 所示。由图 2 可知, 质心法提取误差曲线呈现  $\delta_{M=3 \text{ pixel}} \gg \delta_{M=5 \text{ pixel}} > \delta_{M=7 \text{ pixel}}$ , IWCOG 算法提取误差呈现  $\delta_{M=3 \text{ pixel}} \gg \delta_{M=5 \text{ pixel}} \approx \delta_{M=7 \text{ pixel}}$ ,

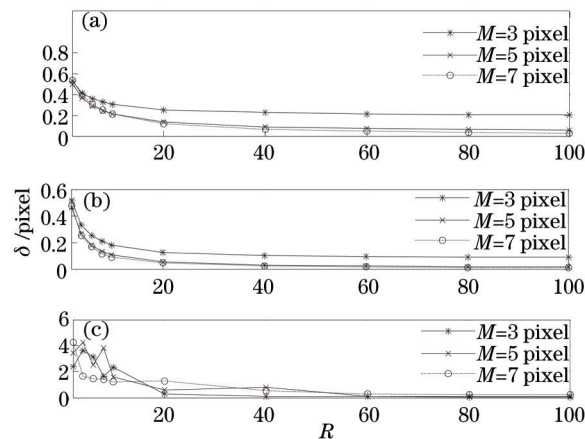


图2  $M$  和  $R$  对星点定位精度的影响(随机  $\sigma$  和  $\mu$ )。(a) COG;(b) IWCOG;(c) GCF

Fig.2 Influence of  $M$  and  $R$  on positioning accuracy of star spot(with random  $\sigma$  and  $\mu$  ). (a) COG; (b) IWCOG; (c) GCF

高斯拟合算法(GCF)提取误差呈现  $\delta_{M=3 \text{ pixel}} < \delta_{M=5 \text{ pixel}} < \delta_{M=7 \text{ pixel}}$  ( $R \geq 20$ )。同等窗口下,IWCOG算法提取误差最小, $R < 6$ 时IWCOG算法提取误差低于质心法1.5~2倍,在 $R > 6$ 时IWCOG算法提取误差低于质心法2.5~3.5倍,当 $R=40$ 、 $M=3 \text{ pixel}$ 时,IWCOG算法提取误差为0.1 pixel,质心法为0.22 pixel, $M=5 \text{ pixel}$ 时分别为0.026、0.089 pixel, $M=7 \text{ pixel}$ 时分别为0.02、0.068 pixel,由此可知增加计算窗口大小能明显降低这两种算法的提取误差,但当 $M \geq 5 \text{ pixel}$ 时这种趋势变缓,IWCOG算法表现尤其明显,说明当达到 $M=5 \text{ pixel}$ 时,IWCOG算法提取精度对窗口大小依赖程度不大。而高斯拟合法只在 $R > 60$ 且 $M=3 \text{ pixel}$ 时优于质心法,在信噪比较低和窗口太大时算法受到的干扰很大。

为了解样本分布特点,固定参数 $M=5 \text{ pixel}$ ,分别对 $R=10$ 、40、100再进行仿真,将图1中的样本分布展开,可得图3~5。其中图3~5(a)~(c)为样本点质心误差情况(只显示前500个样本点),(d)~(f)为对应的质心误差直方图,以下类同。

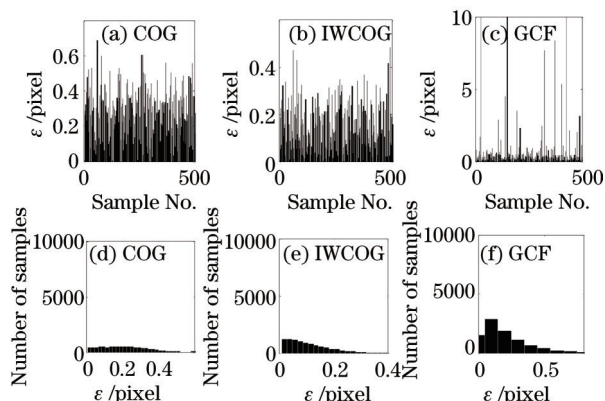


图3  $R=10$ 对星点定位精度的影响(随机 $\sigma$ 和 $\mu$ )。(a)~(c)样本点质心提取误差;(d)~(f)样本点质心误差直方图

Fig.3 Influence of  $R=10$  on positioning accuracy of star spot (with random  $\sigma$  and  $\mu$ ). (a)~(c) Graph of centroid errors of sample points; (d)~(f) histogram of centroid errors of sample points

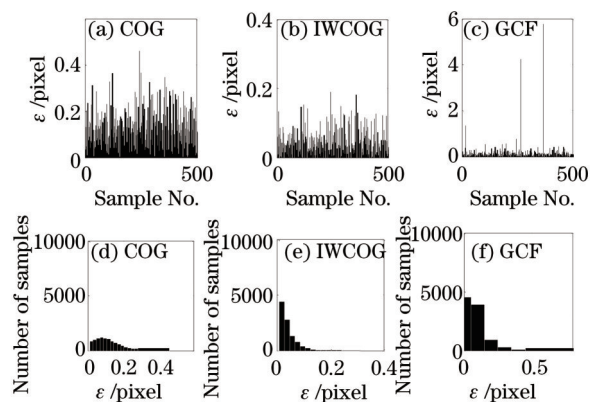


图4  $R=40$ 对星点定位精度的影响(随机 $\sigma$ 和 $\mu$ )。(a)~(c)样本点质心提取误差;(d)~(f)样本点质心误差直方图

Fig.4 Influence of  $R=40$  on positioning accuracy of star spot (with random  $\sigma$  and  $\mu$ ). (a)~(c) Graph of centroid errors of sample points; (d)~(f) histogram of centroid errors of sample points

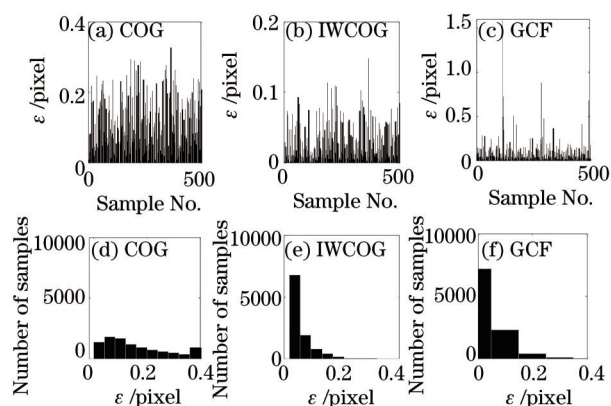


图5  $R=100$ 对星点定位精度的影响(随机 $\sigma$ 和 $\mu$ )。(a)~(c)样本点质心提取误差;(d)~(f)样本点质心误差直方图

Fig.5 Influence of  $R=100$  on positioning accuracy of star spot (with random  $\sigma$  and  $\mu$ ). (a)~(c) Graph of centroid errors of sample points; (d)~(f) histogram of centroid errors of sample points

由于是蒙特卡罗采样,三种算法的样本误差分布较为均匀,图3~5(a)~(c)充分显示了这一特点。同时,从直方图分布(d)~(f)可以看出,质心法误差呈泊松形貌,IWCOG算法呈L形貌,高斯拟合算法介于二者之间,可见IWCOG算法更利于实现更高精度。具体分析可知,随着信噪比的提高,三种算法提取的低误差样本数增加明显,尤其以IWCOG算法增加最为显著,在 $R=100$ 时,IWCOG算法提取误差低于0.02 pixel的样本数占比达73%,而质心法不足14%; $R=40$ 时低于0.02 pixel误差的样本占比分别为44%、0.8%,低于0.04 pixel误差的

样本占比分别为72%、1.9%,从概率上讲,IWCOG算法在多星定位中具有很大优势,如 $R=40$ 时使用IWCOG法提取5颗星,误差同时高于0.04 pixel的概率为 $(1-72\%)^5=0.17\%$ ,而质心法为 $(1-1.9\%)^5=90.9\%$ ,误差同时高于0.02 pixel的概率为 $(1-44\%)^5=5.5\%$ ,质心法为 $(1-0.8\%)^5=96.1\%$ 。

### 3.2 $\sigma$ 和 $M$ 对定位误差的影响

用蒙特卡罗法随机给出 $(\mu, R)$ 模拟生成10000个星点灰度直方图,改变星点PSF尺度 $\sigma$ 和 $M$ ,仿真结果如图6所示。

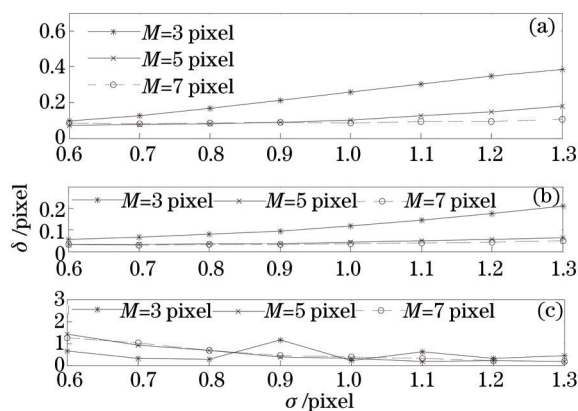


图6  $M$  和  $\sigma$  对星点定位精度的影响(随机  $R$  和  $\mu$ )。 (a) COG; (b) IWCOG; (c) GCF

Fig.6 Influence of  $M$  and  $\sigma$  on positioning accuracy of star spot (with random  $R$  and  $\mu$ ). (a) COG; (b) IWCOG; (c) GCF

由图6可知,同等窗口下,IWCOG算法提取误差最小, $M=3, 5, 7$  pixel时IWCOG算法提取误差分别低于质心法2、3、2.5倍。由于星点信噪比一般高于10, $M=5, 7$  pixel时定位误差为0.031、0.028 pixel,同比质心法误差高达0.104、0.087 pixel。

为了解样本分布特点,分别就 $\sigma = 0.8$  pixel, $M=3, 5, 7$  pixel和 $\sigma = 1.2$  pixel, $M=5$  pixel进行仿真,结果如图7~10所示。

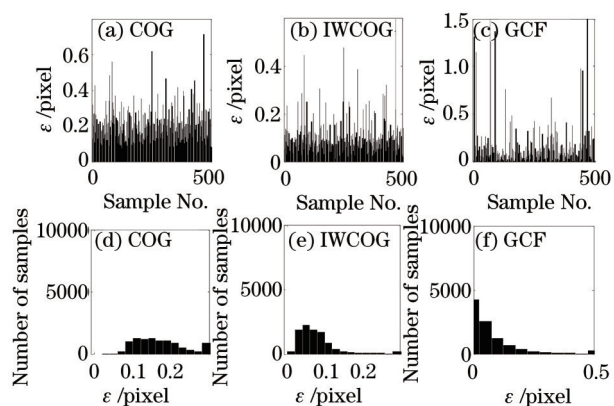


图7  $M=3$  pixel和 $\sigma = 0.8$  pixel对星点定位精度的影响(随机  $R$  和  $\mu$ )。 (a)~(c)样本点质心提取误差;(d)~(f)样本点质心误差直方图  
Fig.7 Influence of  $M=3$  pixel and  $\sigma = 0.8$  pixel on positioning accuracy of star spot (with random  $R$  and  $\mu$ ). (a)~(c) Graph of centroid errors of sample points; (d)~(f) histogram of centroid errors of sample points

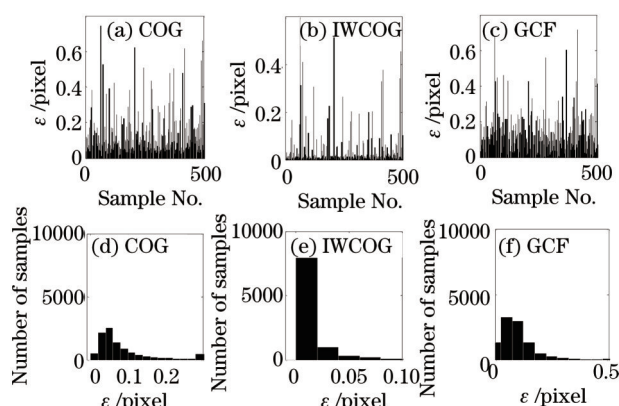


图8  $M=5$  pixel和 $\sigma = 0.8$  pixel对星点定位精度的影响(随机  $R$  和  $\mu$ )。 (a)~(c)样本点质心提取误差;(d)~(f)样本点质心误差直方图  
Fig.8 Influence of  $M=5$  pixel and  $\sigma = 0.8$  pixel on positioning accuracy of star spot (with random  $R$  and  $\mu$ ). (a)~(c) Graph of centroid errors of sample points; (d)~(f) histogram of centroid errors of sample points

从图7~10(a)~(c)可以看出,蒙特卡罗采样下三种算法样本点提取误差分布较为均匀;误差直方图分布(d)~(f)显示,不论星点PSF大小和 $M$ 数如何,质心法误差灰度直方图均呈泊松形貌,而IWCOG算法提取误差在 $M=3$  pixel时近似泊松形貌, $M=5, 7$  pixel时为典型的L形貌,高斯拟合算法提取误差在 $M=3$  pixel时为L形貌, $M=5, 7$  pixel时逐渐转为泊松形貌。由此可见,随着计算窗口数 $M$ 的增加,IWCOG算法用于星点提取所得较大

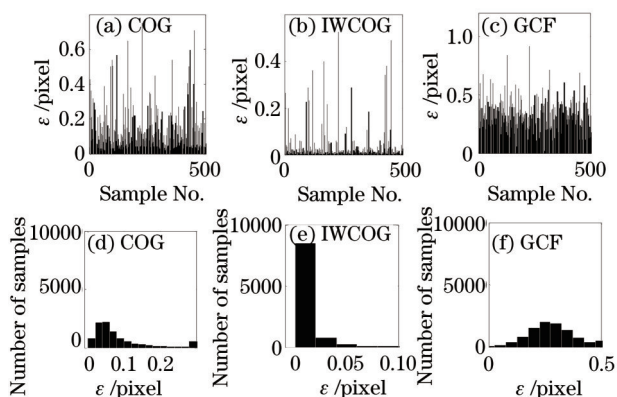


图9  $M=7$  pixel 和  $\sigma=0.8$  pixel 对星点定位精度的影响(随机  $R$  和  $\mu$ )。 (a)~(c) 样本点质心提取误差; (d)~(f) 样本点质心误差直方图  
Fig.9 Influence of  $M=7$  pixel and  $\sigma=0.8$  pixel on positioning accuracy of star spot (with random  $R$  and  $\mu$ ). (a)~(c) Graph of centroid errors of sample points; (d)~(f) histogram of centroid errors of sample points

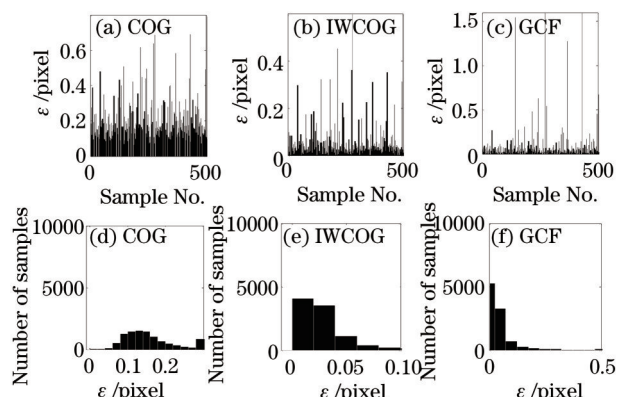


图10  $M=5$  pixel 和  $\sigma=1.2$  pixel 对星点定位精度的影响(随机  $R$  和  $\mu$ )。 (a)~(c) 样本点质心提取误差; (d)~(f) 样本点质心误差直方图  
Fig.10 Influence of  $M=5$  pixel and  $\sigma=1.2$  pixel on positioning accuracy of star spot (with random  $R$  and  $\mu$ ). (a)~(c) Graph of centroid errors of sample points; (d)~(f) histogram of centroid errors of sample points

定位误差概率极小。 $M=5, 7$  pixel 时质心法和 IWCOG 算法的低误差样本数增加明显, 尤其以 IWCOG 算法增加最为显著,  $M=5$  pixel 时 IWCOG 算法提取误差低于  $0.02$  pixel 的样本数占比达  $79\%$ , 而质心法不足  $0.5\%$ ;  $M=7$  pixel 时两种算法提取误差低于  $0.02$  pixel 的样本占比分别为  $85\%、0.85\%$ 。

另外, 当  $M$  大于  $3\sigma$  时, 质心法与 IWCOG 算法提取误差总体对 PSF 尺度不太敏感, 而当  $M$  与  $3\sigma$  相近时 (如  $\sigma=0.9$  pixel,  $M=3$  pixel), 高斯拟合算法提取误差低于  $0.05$  pixel 的样本数最为密集, 这显示其对 PSF 大小不同的依赖特性。由于本文模拟的平均  $R \approx 50$ , 高斯拟合算法总体误差依然最高, 从图 6 可以看出。

### 3.3 $R$ 和 $\sigma$ 对相位误差的影响

用蒙特卡罗法随机给出  $(\sigma, R)$  模拟生成 10000 个星点灰度直方图 (包括无噪声情况), 改变相位  $\mu$ , 步长  $0.05$  pixel, 模拟的结果如图 11 所示。

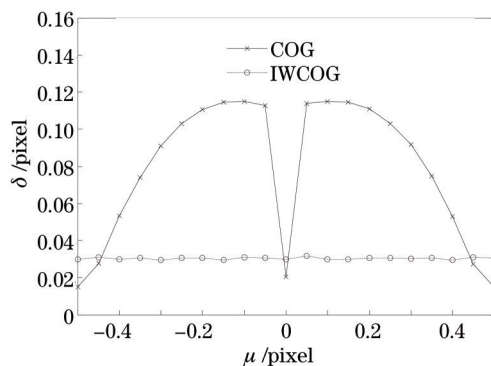


图 11 不同相位  $\mu$  的相位误差(随机  $R$  和  $\sigma$ )

Fig.11 Phase error of different  $\mu$  (with random  $R$  and  $\sigma$ )

用蒙特卡罗法随机给出  $\sigma$  模拟生成 10000 个星点灰度直方图, 分别对无噪声 (运算一次即可)、 $R=10、40、100$  再进行仿真, 质心法和 IWCOG 算法仿真结果如图 12 所示。最后固定信噪比参数, 分别就无噪声和  $R=10$  进行仿真 (增加  $\sigma=0.3$  pixel 作对比) 研究 PSF 尺度  $\sigma$  对相位误差的影响, 仿真结果如图 13~15 所示。

由图 11 可知, 在随机  $R$  和 PSF 尺度下, 质心法提取的相位误差呈近似正弦规律, 波动幅度为  $0.1$  pixel, 周期为  $1/2$  pixel, IWCOG 算法提取的相位误差为  $0.03$  pixel。从图 12 可知, 高斯噪声大小对两种算法提取的相位误差形貌影响较小, 对相位误差波动幅度影响较大, 随着信噪比的降低, 质心法提取的相位误差波动幅度明显拉窄。而从图 13~15 可知, 在相同的  $R$  和算法下, 不同的 PSF 尺度其算法提取的相位误差形貌有很大差



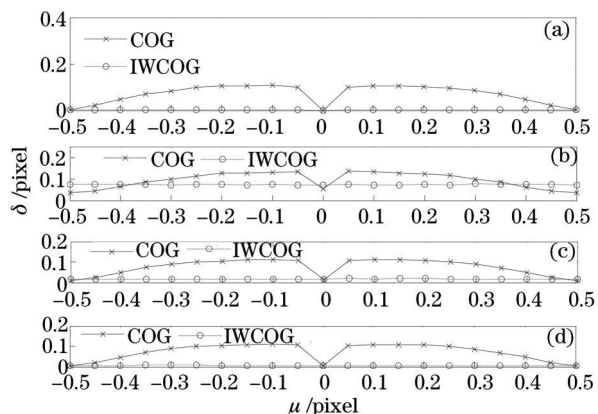


图 12  $R$  对相位误差的影响(随机  $\sigma$ )。 (a) 无噪声; (b)  $R = 10$ ; (c)  $R = 40$ ; (d)  $R = 100$

Fig.12 Influence of  $R$  on phase error(with random  $\sigma$ ). (a) without noise; (b)  $R = 10$ ; (c)  $R = 40$ ; (d)  $R = 100$

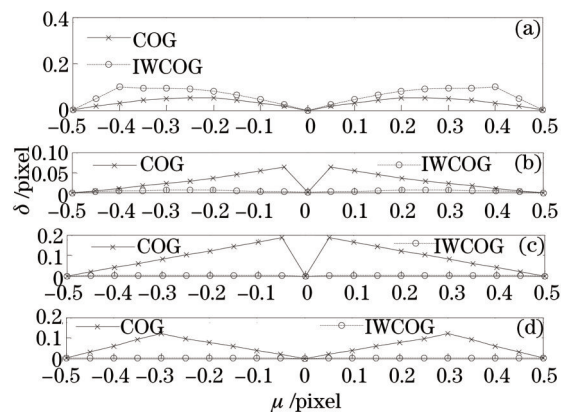


图 13  $\sigma$  对相位误差的影响(不含噪声)。 (a)  $\sigma = 0.3$  pixel; (b)  $\sigma = 0.6$  pixel; (c)  $\sigma = 0.9$  pixel; (d)  $\sigma = 1.2$  pixel

Fig.13 Influence of  $\sigma$  on phase error (without noise). (a)  $\sigma = 0.3$  pixel; (b)  $\sigma = 0.6$  pixel; (c)  $\sigma = 0.9$  pixel; (d)  $\sigma = 1.2$  pixel

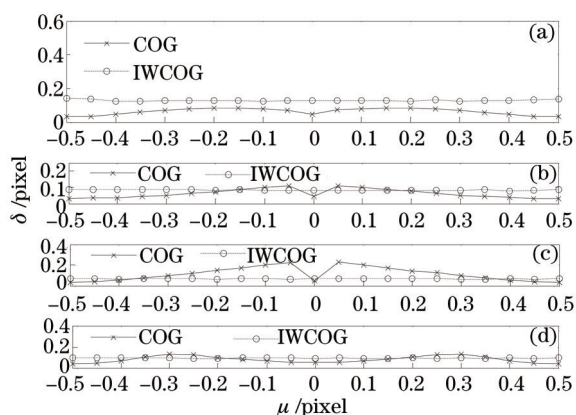


图 14  $R=10$ 时  $\sigma$  对相位误差的影响。 (a)  $\sigma = 0.3$  pixel; (b)  $\sigma = 0.6$  pixel; (c)  $\sigma = 0.9$  pixel; (d)  $\sigma = 1.2$  pixel

Fig.14 Influence of  $\sigma$  on phase error with  $R=10$ . (a)  $\sigma = 0.3$  pixel; (b)  $\sigma = 0.6$  pixel; (c)  $\sigma = 0.9$  pixel; (d)  $\sigma = 1.2$  pixel

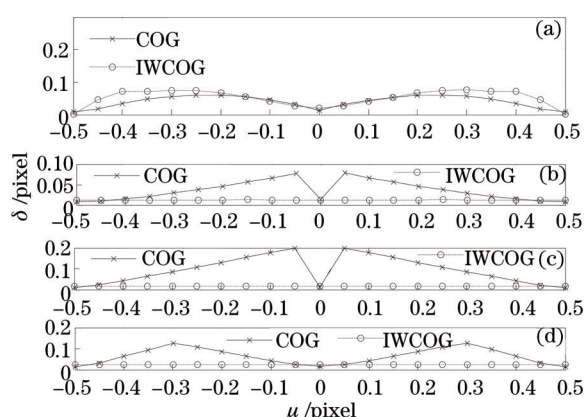


图 15  $R=40$ 时  $\sigma$  对相位误差的影响。 (a)  $\sigma = 0.3$  pixel; (b)  $\sigma = 0.6$  pixel; (c)  $\sigma = 0.9$  pixel; (d)  $\sigma = 1.2$  pixel

Fig.15 Influence of  $\sigma$  on phase error with  $R=40$ . (a)  $\sigma = 0.3$  pixel; (b)  $\sigma = 0.6$  pixel; (c)  $\sigma = 0.9$  pixel; (d)  $\sigma = 1.2$  pixel

异,而在相同的 PSF 尺度、不同的  $R$  下各算法提取相位误差形貌基本相同,综合图 11~15 可知,相位误差波动幅度主要受噪声影响,而相位误差形貌主要受 PSF 尺度  $\sigma$  的影响。图 11 中质心法提取的相位误差波动幅度相当于图 12 中三种  $R$  曲线的线性叠加,而质心法的形貌相当于图 13~15 中同样  $R$  下形貌的叠加效果,这个结论同样适用于 IWCOG 算法。因而,如何降低噪声是降低相位误差的根本路径,研究 PSF 形貌则有助于做精确有效的补偿算法。由于 IWCOG 算法相位误差波动幅度与 PSF 相关性较小,因而更易补偿。

从图 11~15 可以看出, IWCOG 算法的相位误差同比最小;随着信噪比提高,两类算法误差呈下降趋势,在  $R=40$  时, IWCOG 算法提取的相位误差为 0.018 pixel, 质心法提取的相位误差波动幅度为 0.1 pixel; 无噪声时最大相位误差分别为 0.001、0.1 pixel, 这与 Nightingale 等<sup>[6]</sup>的仿真结果基本相同,印证了 IWCOG 算法优于质心法的特点。

由图 13~15 可知,  $\sigma \geq 0.6$  pixel 时 IWCOG 算法提取的相位误差同比最低,呈常值分布,  $\sigma = 0.3$  pixel 时 IWCOG 算法提取误差稍高于质心法,主要因为 PSF 尺度较小时,星点所占像素数不到 2 pixel,灰度值基本由中心点占据,由于 IWCOG 算法加权函数的衰减性导致计算外围灰度值更低,只有相比质心法向外移才能达到收敛条件,模拟同时表明, PSF 尺度大于 5 时,星点采样数足够, IWCOG 算法同样不再有优势,这表明该算法的误差降低与 PSF 尺度关系很大,  $\sigma = 0.6 \sim 1.2$  pixel 时 IWCOG 算法与质心法相比,相位误差下降更快,因而更适合高精度单星提取。

### 3.4 算法运行效率

固定  $\mu = 0, \sigma = 1$  pixel, 随机采样  $R$ , 改变  $M$  数为 3~17 pixel, 分别运行质心法、IWCOG 算法、高斯拟合算法  $10^6$  次, 计算三种算法的运行时间(单位为 1, 比例尺=100:100:1, 即图 16 中高斯拟合算法实际运行时间为标称值的 100 倍), 仿真结果如图 16 所示。

由图 16 可以看出, 无论参与运算的窗口数量多少, 高斯拟合算法最为耗时, 是其他算法的 10 倍以上, 随着窗口数增加, 质心法和高斯拟合算法计算时间缓慢增加, IWCOG 算法增加较快, IWCOG 算法在  $M$  为 3~11 pixel 时, 耗时为一阶矩的 2~5 倍, 但从图 2~15 来看, IWCOG 算法的精度、易于补偿的特性是其他算法无法比拟的, 因而与其他算法相比, 更适合高精度定位。

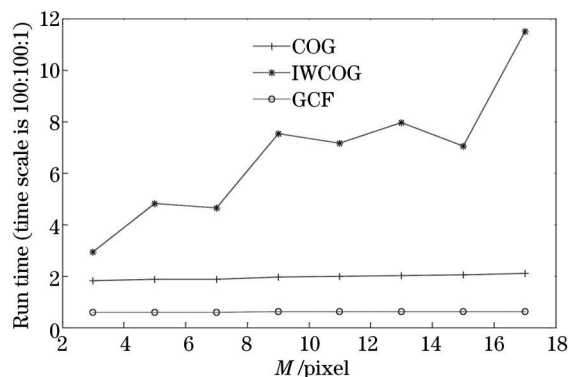


图 16 算法单次运行时间与  $M$  的关系

Fig.16 Relation between run time for single process of algorithms and  $M$

## 4 结 论

从 Meanshift 理论角度出发研究了高斯加权迭代算法, 提出了基于形貌“追踪”的权函数定位机制, 证明了算法的收敛性。通过对质心法、IWCOG 法、高斯拟合法蒙特卡罗仿真, 研究发现由 IWCOG 算法提取的误差直方图呈现 L 分布, 多星同时出现较大定位误差概率极小, 质心法的误差直方图呈现泊松形貌分布, 多星同时出现较高误差的概率极大。在  $R=40, M=5$  pixel 时, IWCOG 法提取误差低于 0.02 pixel 的样本占比分别为 44%, 低于 0.04 pixel 的样本占 72%, 远高于质心法的 0.8% 和 1.9%, 因而 IWCOG 算法适于星敏感器中的多星定位。通过研究  $R$ 、PSF 大小对精度的影响及与相位误差的关系, 得出降低噪声、适当增加计算窗口数、估计 PSF 大小并做适当补偿算法是提高星点提取误差的有效方式, 分析表明 IWCOG 算法更易做到这一点。对关键参数均采用蒙特卡罗采样达 10000 次, 所得出的结论不失一般性、可靠性和实用性。IWCOG 算法抗噪能力优异, 定位误差小, 计算简单, 易于补偿, 可用于高精度星点定位。

### 参 考 文 献

- 1 R W H van Bezooijen. SIRTf autonomous star tracker [C]. SPIE, 2003, 4850: 108-121.
- 2 R H Stanton, J W Alexander, E W Dennison, *et al.*. Optical tracking using charge-coupled devices [J]. Optical Engineering, 1987, 26(9): 2699-30.
- 3 J C Trinder. Precision of digital target location [J]. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 1989, 55(6): 883-886.
- 4 R C Stone. A comparison of digital centering algorithms [J]. Astronomical Journal, 1989, 97: 1227-1237.
- 5 Wang Haiyong, Zhou Wenrui, Zhao Yanwu. Error analysis and applicability study on simplified Gaussian diffusion mode [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(7): 0711002.
- 王海涌, 周文睿, 赵彦武. 简易高斯灰度扩散模型的误差分析及适用性研究 [J]. 光学学报, 2012, 32(7): 0711002.
- 6 A M Nightingale, S Gordeyev. Shack-Hartmann wavefront sensor image analysis: a comparison of centroiding methods and image-processing techniques [J]. Optical Engineering, 2013, 52(7): 071413.
- 7 A Vyas, M B Roopashree, B R Prasad. Optimization of existing centroiding algorithms for Shack Hartmann sensor [C]. Proceedings of the National Conference on Innovative Computational Intelligence & Security Systems, 2009. 400-405.
- 8 K L Baker, M M Moallem. Iteratively weighted centroiding for Shack-Hartmann wave-front sensors [J]. Opt Express, 2007, 15(8):

5147-5159.

- 9 S Thomas, T Fusco, A Tokovinin, *et al.*. Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2006, 371(1): 323-336.
- 10 Zhang Chunming, Xie Yongchun, Wang Li, *et al.*. A method of analyzing image distortion based on conjugate nodal plane [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(11): 1108001.  
张春明, 解永春, 王立, 等. 一种基于共轭节面的图像畸变分析方法[J]. 光学学报, 2012, 32(11): 1108001.
- 11 Zhong Hongjun, Yang Mengfei, Lu Xin. Calibration method of star sensor [J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(5): 1343-1348.  
钟红军, 杨孟飞, 卢欣. 星敏传感器标定方法研究[J]. 光学学报, 2010, 30(5): 1343-1348.
- 12 Jin Guang, Ren Bingwen, Zhong Xing. Influence of distortion on TDI-CCD space camera and its suppression method [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(10): 1022001.  
金光, 任秉文, 钟兴. 畸变对TDI-CCD空间相机的影响分析及抑制方法研究[J]. 光学学报, 2013, 33(10): 1022001.
- 13 Liu Hongyuan, Wang Hengfei, Ma Shumin, *et al.*. A calibration equipment of responsivity non-uniformity for charge coupled devices [J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(s1): s116003.  
刘红元, 王恒飞, 马书民, 等. 一种CCD器件响应度非均匀性校准装置研制[J]. 中国激光, 2014, 41(s1): s116003.
- 14 K Fukunage, L D Hostetler. The estimation of the gradient of a density function with application in pattern recognition [J]. IEEE Transactions of Information Theory, 1975, 21(1): 32-40.
- 15 Y Cheng. Mean shift, mode seeking, and clustering [J]. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, 1995, 17(8): 790-799.
- 16 D Comaniciu, V Ramesh, P Meer. Kernel-based object tracking [J]. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, 2003, 25(5): 564-577.
- 17 N Hagen, M Kupinski, E L Dereniak. Gaussian profile estimation in one dimension [J]. Appl Opt, 2007, 46(22): 5374-5383.

栏目编辑: 史敏