

# 非线性圆态及其非经典性质

方 旭 王中结

安徽师范大学物理与电子信息学院, 安徽 芜湖 241000

**摘要** 为了研究非线性和叠加效应对量子态的影响,采用理论分析和数值计算相结合的方法,研究了一种新的量子态,即非线性圆态。分析了该态的平均光子数分布、亚泊松分布、压缩效应等非经典性质,同时计算了它的维格纳(Wigner)函数。数值模拟结果表明:随着Lamb-Dicke参数和叠加态数目的增大,非线性圆态的平均光子数增加,而由该态描述的光场的亚泊松分布和压缩效应受到减弱。表征非线性效应的Lamb-Dicke参数和叠加态数目对该态的非经典特性有明显的影响。

**关键词** 量子光学;非线性圆态;亚泊松分布;压缩效应;Wigner函数

中图分类号 O431

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201535.0127001

## Nonlinear Circular States and Their Non-Classical Properties

Fang Xu Wang Zhongjie

College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu, Anhui 241000, China

**Abstract** In order to study the influence of nonlinearity and superposition on quantum state, by applying theoretical analysis and numerical computation, a new quantum state, namely nonlinear circular state, is studied. The nonclassical properties of the state are analyzed such as average photon number distribution, sub-Poisson distribution and squeezing effect, and its Wigner function is calculated. Through numerical analysis, the results show that with the increase of the Lamb-Dicke parameter and superposition number of quantum states, the average photon number of nonlinear circular state is increased and the sub-Poisson distribution and squeezing effect of the state are both weakened. The nonclassical properties of the state are very sensitive to nonlinear effects which are characterized by the Lamb-Dicke parameter and superposition number of quantum states.

**Key words** quantum optics; nonlinear circular states; sub-Poisson distribution; squeezing effect; Wigner function

**OCIS codes** 270.1670; 270.5290; 270.6570

## 1 引 言

光量子态的非经典特征一直是量子光学领域中令人关注的课题。利用量子力学中的态叠加原理和增减光子的方法,人们构造出各种非经典态,并研究这些态的量子特性及其制备方案,如激发相干态<sup>[1-2]</sup>,激发奇偶相干态<sup>[3-4]</sup>,激发光子纠缠相干态<sup>[5-7]</sup>,圆态与激发圆态<sup>[8-9]</sup>,三模压缩真空态<sup>[10]</sup>和奇偶对相干态<sup>[11]</sup>等。1996年,Filho等<sup>[12]</sup>引入非线性相干态的概念。与相干态不同,这种态表现出明显的振幅压缩效应和量子干涉效应。之后,研究人员利用非线性相干态构建了各种光量子态并研究了它们的非经典特性。孟祥国等<sup>[13]</sup>分析了奇偶非线性相干态的压缩和亚泊松分布等非经典特性。Wang<sup>[14]</sup>研究了二模非线性相干态的非经典特性。Yang等<sup>[15]</sup>研究了非线性相干态和压缩态的几何相位。Bagheria等<sup>[16]</sup>引入非线性热态,这种态在零温度时退化为二模非线性压缩相干态,并研究了它的非经典性质。Miry等<sup>[17]</sup>研究了非线性椭圆态的振幅压缩效应

收稿日期: 2014-06-10; 收到修改稿日期: 2014-07-15

基金项目: 安徽省自然科学基金(090412060)

作者简介: 方 旭(1991—),男,硕士研究生,主要从事量子光学方面的研究。E-mail: 1069561157@qq.com

导师简介: 王中结(1962—),男,教授,硕士生导师,主要从事量子光学与量子信息等方面的研究。

E-mail: wuliwzj@mail.ahnu.edu.cn(通信联系人)

等非经典效应。

本文通过非线性相干态构成了一种非线性圆态,分析了这种态的振幅压缩效应、亚泊松分布等非经典特性并且计算了这种态的维格纳(Wigner)函数。

## 2 非线性圆态

定义非线性圆态为

$$|\alpha, N\rangle = \lambda_N \sum_{k=1}^N C_k |\alpha_k, f\rangle, \quad (1)$$

式中  $C_k = 1$ ,  $\alpha_k = \alpha \exp(i2\pi k/N)$ , 其中  $\alpha = r \exp(i\theta)$ ,  $r$  为振幅,  $\theta$  为相角,  $\lambda_N$  为归一化因子,  $N$  为非线性相干态的叠加数,  $f$  指示  $|\alpha_k, f\rangle$  为非线性相干态。根据非线性相干态的定义,  $|\alpha_k, f\rangle$  在粒子数表象中的展开式可以写成

$$|\alpha_k, f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} D_0 \frac{\alpha_k^n}{\sqrt{n!}} \frac{1}{f(n)!} |n\rangle, \quad (2)$$

式中  $D_0$  是一个求和项,  $D_0 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_k^{2n}}{n! [f(n)!]^2} \right)^{-1/2}$ ,  $f(n)! = f(0)f(1)f(2)\cdots f(n)$ 。在后面的计算中,单独求解这个  $D_0$ , 将它当作一个常数代入式子中进行计算。利用归一化条件  $\langle \alpha, N | \alpha, N \rangle = 1$ , 可得  $\lambda_N = 1/\sqrt{N}$ 。若选取不同的函数  $f(n)$ , 非线性相干态将会有不同的表现形式, 通常取  $f(n)$  为描述囚禁离子运动的函数形式

$$f(n) = L_n^1(\eta^2) [(n+1)L_n^0(\eta^2)]^{-1}, \quad (3)$$

式中  $\eta$  为 Lamb-Dike 参数,  $L_n^m(x)$  为缔合拉盖尔多项式。至此, 得出非线性圆态的归一化的表达式为

$$|\alpha, N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} D_0 \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{1}{[f(n)!]} \exp(i2\pi kn/N) |n\rangle. \quad (4)$$

需要指出的是本文给出的非线性圆态与文献[17]中给出的非线性椭圆态不同。尽管后者更具有普遍性, 但是, 由于分析的复杂性, 作者仅取非线性函数  $f(n) = \sqrt{n}$  来进行研究。显然, 这种非线性函数不足以全面反映非线性对量子态特性的影响。本文主要讨论非线性和叠加态数目对量子态特性的影响, 故取非线性函数为更加一般的形式[参见(3)式和下面的内容]。

## 3 非经典特性

### 3.1 平均光子数分布

首先研究非线性圆态的平均光子数分布。利用(4)式, 容易求得非线性圆态的平均光子数分布  $A$  为

$$A = \langle a^+ a \rangle = N \sum_{k=0}^{\infty} D_0^2 N k \frac{\alpha^{2Nk}}{(Nk)! [f(Nk)!]^2}, \quad (5)$$

式中  $a^+$  和  $a$  分别为光子的产生算符和湮灭算符。平均光子数  $A$  随着参量  $\alpha$  变化的曲线如图 1 所示。图 1(a)

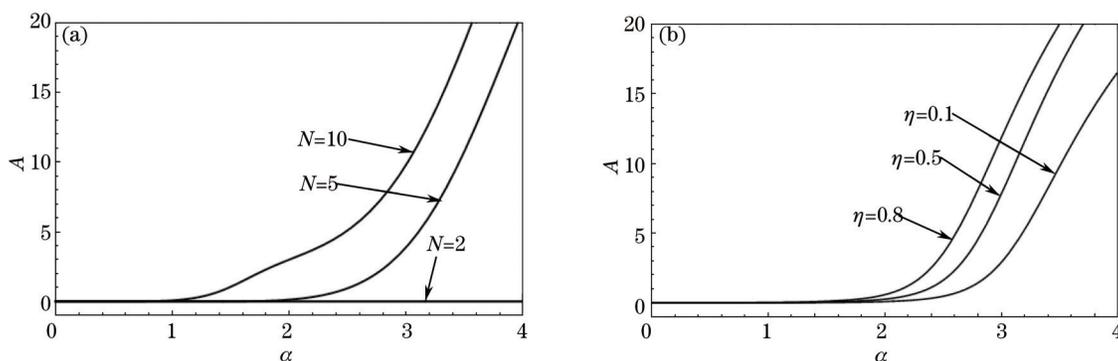


图 1 平均光子数  $A$  和参量  $\alpha$  间的关系曲线。(a)  $\eta = 0.5$ ; (b)  $N = 5$

Fig.1 Relation curves between mean photon number  $A$  and parameter  $\alpha$ . (a)  $\eta = 0.5$ ; (b)  $N = 5$

中对应  $\eta=0.5$  时非线性圆态的情况,可以看出随着态的叠加数  $N$  的增加,曲线向左上移动。这表明随着  $N$  的增加,平均光子数是增加的,并且光强的增加使得平均光子数增加的幅度变大;图 1(b)描绘了  $N=5$  时非线性参数对于平均光子数的影响,可以看出随着参数  $\eta$  的增加,平均光子数同样呈现增加的趋势。总体来说,平均光子数随着光强的增大而增加。

### 3.2 亚泊松统计

为了描述光子数分布偏离泊松分布的程度,可引入如下  $Q$  函数:

$$Q = \frac{\langle a^+ a^2 \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2} - \langle a^+ a \rangle. \quad (6)$$

若  $Q>1$ ,则光场呈现超泊松分布;若  $Q=1$ ,则为泊松分布;若  $Q<1$ ,则为亚泊松分布,此时光场呈现非经典效应。利用产生算符与湮灭算符的对易关系,再利用(4)式,可算得  $Q$  函数的表达式为

$$Q = \frac{N \sum_{k=0}^{\infty} D_0^2 Nk(Nk-1) \frac{\alpha^{2Nk}}{(Nk)! [f(Nk)!]^2}}{N \sum_{k=0}^{\infty} D_0^2 Nk \frac{\alpha^{2Nk}}{(Nk)! [f(Nk)!]^2}} - N \sum_{k=0}^{\infty} D_0^2 Nk \frac{\alpha^{2Nk}}{(Nk)! [f(Nk)!]^2}. \quad (7)$$

选取不同的  $N$  值和非线性参数  $\eta$  作出函数  $Q$  随  $\alpha$  的变化曲线,如图 2 所示。图 2(a)对应的是  $\eta=0.5$  时  $Q$  函数随  $\alpha$  的演化图像。可以看出,由于量子态的叠加效应,随着叠加数的增加,亚泊松分布逐渐减弱,出现了一个陡坡,但当  $\alpha$  较大时曲线又趋于平缓,最终呈现出稳定的亚泊松分布。图 2(b)对应于  $N=5$  时  $Q$  函数随  $\alpha$  的变化图像。从图中可以看出, $Q$  函数的演化曲线在  $\alpha$  较小时较为平缓,但当  $\alpha$  接近 4 的时候,出现了坡度。同样,还可以看出随着非线性参数  $\eta$  的增加, $Q$  函数值增加,亚泊松分布受到抑制。所以,非线性参数的增加减弱了光场的亚泊松分布,量子态的叠加同样会使亚泊松分布减弱。

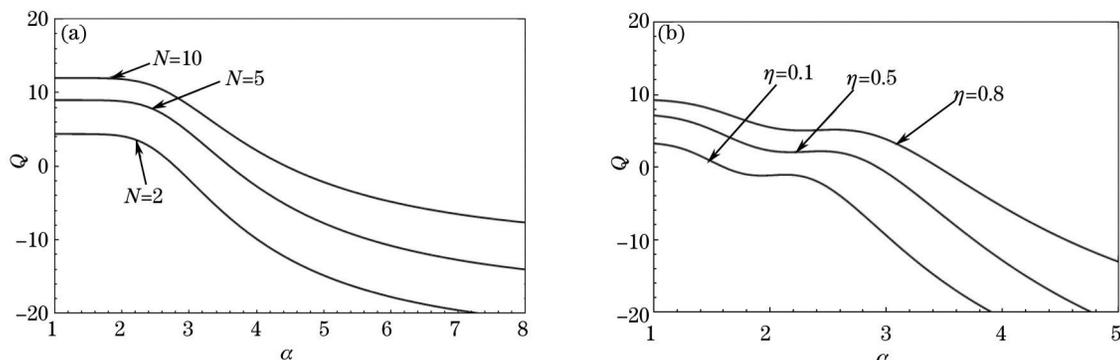


图 2  $Q$  函数与参量  $\alpha$  间的关系曲线。(a)  $\eta=0.5$ ; (b)  $N=5$

Fig.2 Relation curves between  $Q$  function and parameter  $\alpha$ . (a)  $\eta=0.5$ ; (b)  $N=5$

### 3.3 压缩效应

定义单模光场振幅的两个正交分量算符为

$$u_1 = \frac{1}{2}(a + a^+), u_2 = \frac{1}{2i}(a - a^+), \quad (8)$$

对于给定的状态,若光场  $u_i(i=1,2)$  分量的涨落函数  $S_i(i=1,2)$  满足

$$S_i = 4\langle u_i^2 \rangle - 4\langle u_i \rangle^2 < 1, \quad (9)$$

则称光场  $u_i(i=1,2)$  分量的涨落被压缩。以  $S_1$  为例来讨论非线性圆态的正交压缩。通过计算可得

$$S_1 = \langle \alpha, N | u_1^2 | \alpha, N \rangle - \langle \alpha, N | u_1 | \alpha, N \rangle^2 = 2N \sum_{k=0}^{\infty} D_0^2 \frac{\alpha^{2Nk+2}}{(Nk)! [f(Nk)!] [f(Nk+2)!]} + 2N \sum_{k=0}^{\infty} D_0^2 \frac{\alpha^{2Nk} Nk}{(Nk)! [f(Nk)!]} - \left\{ 2N \sum_{k=0}^{\infty} D_0^2 \frac{\alpha^{2Nk+1}}{(Nk)! [f(Nk)!] [f(Nk+1)!]} \right\}^2. \quad (10)$$

选取一定的  $N$  和  $\alpha$ ,画出  $S_1$  随  $\alpha$  的变化曲线。图 3 给出的是不同  $N$  和  $\eta$  值时压缩参量  $S_1$  随  $\alpha$  的变化规

律。图3(a)是当  $\eta=0.5$  时的情况,可以看出,当  $N=2$  时出现了  $S_1 < 1$ ,即光场被压缩,而当  $N=5$ 和 $N=10$  时,没有出现  $S_1$  值小于1的情况,并且随着  $\alpha$  的增大,  $S_1$  值远大于1,即多个量子态的叠加明显抑制了光场的压缩特性。图3(b)是当  $N=1$  的情况,可以看出,曲线的大部分都在  $S_1=1$  以下,说明光场被压缩,并且随着  $\eta$  值的增大,  $S_1$  值在增大,但都还处在  $S_1=1$  以下。这说明非线性会减弱光场的压缩特性,但是不会抑制压缩特性的产生,这和量子态的叠加是不一样的。

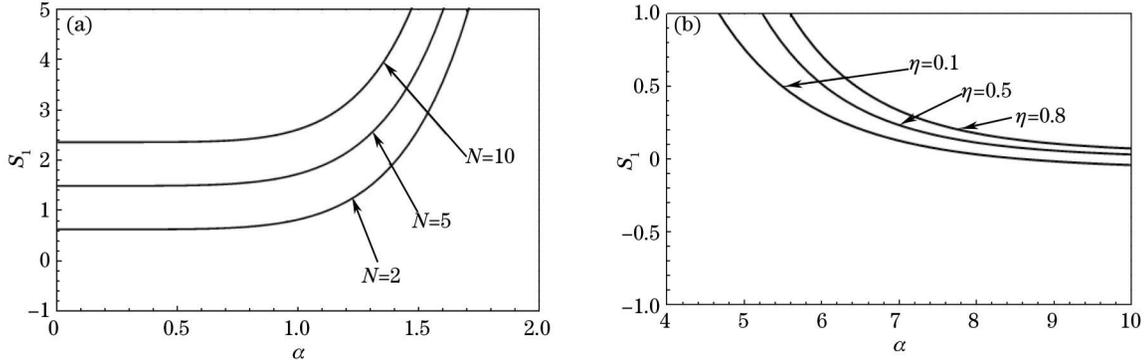


图3 压缩量  $S_1$  与参量  $\alpha$  间的关系曲线。(a)  $\eta=0.5$ ; (b)  $N=1$

Fig.3 Relation curves between squeezed quantity  $S_1$  and parameter  $\alpha$ . (a)  $\eta=0.5$ ; (b)  $N=1$

#### 4 维格纳函数

取粒子数表象下的维格纳函数的形式

$$W(z, z^*) = \frac{2}{\pi^2} \exp(2|z|^2) \int \langle -\beta | \sum_n |n\rangle \langle n | \rho | \sum_m |m\rangle \langle m | \beta \rangle \exp[-2(\beta z^* - \beta^* z)] d^2\beta, \quad (11)$$

式中  $z, z^*$  为参数,  $\beta$  为复变量,  $m$  为正整数,

$$\rho = |\alpha, N\rangle \langle \alpha, N|. \quad (12)$$

利用(4)式和(12)式,可得

$$W(z, z^*) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{2}{\pi^2} \exp(2|z|^2) \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \int \exp(-|\beta|^2) \beta^m (-\beta^*)^n \exp[-2(\beta z^* - \beta^* z)] \times \frac{1}{N} D_0^2 \sum_{k=1}^N \sum_{h=1}^N \frac{\alpha^n (\alpha^*)^m}{\sqrt{m!n!} f(n)! f(m)!} \times \exp(i2\pi kn/N) \exp(i2\pi hn/N) d^2\beta = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{2}{\pi^2} \exp(2|z|^2) \frac{1}{m!n!} \frac{1}{N} D_0^2 \sum_{k,h=1}^N \frac{\alpha^n (\alpha^*)^m}{f(n)! f(m)!} \exp(i2\pi kn/N) \exp(i2\pi hn/N) \times \int \exp(-|\beta|^2) \beta^m (-\beta^*)^n \exp[-2(\beta z^* - \beta^* z)] d^2\beta, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^2} \int \exp(-|\beta|^2) \beta^m (-\beta^*)^n \exp[-2(\beta z^* - \beta^* z)] d^2\beta &= \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^{m+n}}{\partial \tau^m \partial (\tau')^n} \int \exp(-|\beta|^2) \exp(\beta \tau - \beta^* \tau' - 2z^* \beta + 2z \beta^*) d^2\beta \Big|_{\tau, \tau'=0} = \\ \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^{m+n}}{\partial \tau^m \partial (\tau')^n} \int \exp[\beta(\tau - 2z^*) + \beta^*(2z - \tau')] d^2\beta \Big|_{\tau, \tau'=0} &= \frac{\partial^{m+n}}{\partial \tau^m \partial (\tau')^n} \exp[(\tau - 2z^*)(2z - \tau')] \Big|_{\tau, \tau'=0} = \\ \exp(-4|z|^2) \frac{\partial^{m+n}}{\partial \tau^m \partial (\tau')^n} \exp(-\tau \tau' + 2z \tau + 2z^* \tau') \Big|_{\tau, \tau'=0} &= H_{m,n}(2z, 2z^*) \exp(-4|z|^2). \end{aligned} \quad (14)$$

式中  $H_{m,n}(2z, 2z^*)$  是一个双模厄米多项式。将(14)式代入(13)式中,可得

$$W(z, z^*) = \sum_{n,m=0}^{\infty} 2 \exp(-2|z|^2) \frac{1}{(hN)!(kN)!} N D_0^2 \frac{\alpha^{kN} (\alpha^*)^{hN}}{f(kN)! f(hN)!} H_{hN,kN}(2z, 2z^*), \quad (15)$$

式中

$$H_{kN,hN}(2z, 2z^*) = \sum_{l=0}^{\min(kN,hN)} \frac{(kN)!(hN)!}{l!(kN-l)!(hN-l)!} (-1)^l (2z)^{hN-l} (2z^*)^{kN-l}.$$

## 5 结 论

引入了非线性圆态,研究了它的非经典特性,并且计算出了它的维格纳函数。讨论了非线性圆态平均光子数,  $Q$  函数和压缩效应等量在各种不同的量子态叠加数和非线性参数的影响下随着光强的变化规律。结果表明,非线性圆态的平均光子数随光强的变化总体来说呈增加的趋势;叠加态之间的干涉和非线性效应使得亚泊松分布被减弱或者抑制;量子态的叠加抑制了压缩效应,而非线性参数仅仅是减弱了压缩效应的产生。

## 参 考 文 献

- 1 G S Agarwal, K Tara. Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state [J]. *Phys Rev A*, 1991, 43(1): 492-497.
- 2 Xin Zongzheng, Duan Yunbo, Zhang Huimin, *et al.*. Excited two-photon coherent state of the radiation field [J]. *J Phys B: At Mol Opt Phys*, 1996, 29: 4493-4506.
- 3 V V Dodonov, A Korennoy Ya, V I Man'ko, *et al.*. Non-classical properties of states generated by the excitations of even/odd coherent states of light [J]. *Quantum and Semiclass Opt*, 1996, 8: 413-427.
- 4 Yang Qingyi, Sun Jingwen, Wei Lianfu, *et al.*. Wigner functions for the photon-added and photon-depleted even and odd coherent states [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, 54(6): 2704-2711.  
杨庆怡, 孙敬文, 韦联福, 等. 增、减光子奇偶相干态的 Wigner 函数[J]. *物理学报*, 2006, 54(6): 2704-2711.
- 5 Tao Mengxian, Lu Hong, She Weilong. Statistical properties of photon-added entangled coherent states [J]. *Acta Physica Sinica*, 2002, 51(9): 1996-2001.  
陶孟仙, 路洪, 余卫龙. 增加光子纠缠相干态的统计性质 [J]. *物理学报*, 2002, 51(9): 1996-2001.
- 6 Q Dai, H Jing. Photon-added entangled coherent state [J]. *Int J Theor Phys*, 2008, 47(10): 2716-2721.
- 7 Zhang Kefu, Wang Zhongjie. Statistical properties of excited entangled coherent states [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, 38(2): 425-431.  
张克福, 王中结. 激发纠缠相干态的统计性质 [J]. *光子学报*, 2009, 38(2): 425-431.
- 8 Zhang Kefu, Wang Zhongjie. Photon-added circular states and their properties [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, 28(5): 992-996.  
张克福, 王中结. 增光子圆态及其性质 [J]. *光学学报*, 2008, 28(5): 992-996.
- 9 Zhang Kefu, Wang Zhongjie. Generation and properties of two-mode circular states [J]. *Commun Theor Phys*, 2008, 50(15): 1101-1104.
- 10 Lu Daoming. Quantum properties of a new three-mode squeezed vacuum state [J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(8): 0827001.  
卢道明. 一种新的三模压缩真空态的量子特性[J]. *光学学报*, 2014, 34(8): 0827001.
- 11 Meng Xiangguo, Wang Jisuo, Liang Baolong. Wigner functions and tomogram functions of even and odd pair coherent states [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, 28(3): 549-555.  
孟祥国, 王继锁, 梁宝龙. 奇偶对相干态的维格纳函数和层析图函数[J]. *光学学报*, 2008, 28(3): 549-555.
- 12 R L de Matos Filho, W Vogel. Nonlinear coherent states [J]. *Phys Rev A*, 1996, 54(5): 4560.
- 13 Meng Xiangguo, Wang Jisuo. New even and odd nonlinear coherent states and their non-classical properties [J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, 56(4): 2154-2159.  
孟祥国, 王继锁. 新的奇偶非线性相干态及其非经典性质 [J]. *物理学报*, 2007, 56(4): 2154-2159.
- 14 Wang Xiaoguang. Two-mode nonlinear coherent states [J]. *Opt Commun*, 2000, 178(4-6): 365-369.
- 15 Dabao Yang, Ying Chen, Fulin Zhang, *et al.*. Geometric phase for nonlinear coherent and squeezed state [J]. *J Phys B: At Mol Opt Phys*, 2011, 44(7): 075502.
- 16 H Bagheria, A Mahdifarb. Thermal nonlinear coherent states on a flat space and on a sphere [J]. *J Math Phys*, 2013, 54(5): 052104.
- 17 S R Miry, M Shahpari, M K Tavassoly. Nonlinear elliptical states: Generation and nonclassical properties [J]. *Opt Commun*, 2013, 306(1): 49-56.

栏目编辑: 史敏