

# 探测器参数对太赫兹同轴数字全息单点分辨率的影响

胡佳琦 李 琦 杨永发

(哈尔滨工业大学可调谐激光技术国家级重点实验室, 黑龙江 哈尔滨 150080)

**摘要** 太赫兹数字全息成像是当前太赫兹成像技术的前沿研究方向之一, 其中分辨率问题是这一领域的关键。有关数字全息分辨率的研究大多基于经典分辨率的估计方法, 即两点分辨率问题, 很少涉及到单点分辨率。在逆问题方法的框架下, 通过对太赫兹同轴数字全息单点分辨率在不同探测器参数下的结果进行对比分析, 给出了随着探测器的占空比、像素个数等参数的变化, 物平面上各点分辨率的变化情况, 以及单点分辨率的空间分布。研究结果对于实践中探测器参数的优化, 以及评价太赫兹数字全息分辨率提高方面具有重要的意义。

**关键词** 成像系统; 太赫兹成像; 太赫兹同轴数字全息; 单点分辨率

**中图分类号** TN29 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201434.s111007

## Effects of Detector Parameters on Single Point Resolution of Terahertz On-Axis Digital Holography

Hu Jiaqi Li Qi Yang Yongfa

(National Key Laboratory of Science and Technology on Tunable Laser, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150080, China)

**Abstract** Terahertz (THz) digital holographic imaging is one of the frontier research directions of terahertz imaging technology, the resolution is the key of this field. Most studies of digital holographic resolution are based on the classical resolution estimation, namely the two-point resolution, and rarely involve the single point resolution. Within an inverse problem framework, by comparing and analyzing the results of the single point resolution of terahertz on-axis digital holography in different detector parameters, the change in the resolution of each point on the object plane and the spatial distribution of single point resolution are given intuitively with the change in duty cycle, pixel number and other detector parameters. The results are of great significance to the optimization of detector parameters in practice and evaluating the improvement of the THz digital holographic resolution.

**Key words** imaging systems; THz imaging; THz on-axis digital holography; single point resolution

**OCIS codes** 110.6795; 110.3000; 110.3010

### 1 引 言

太赫兹(THz)数字全息成像是当前太赫兹成像技术的前沿研究方向之一<sup>[1-5]</sup>, 且随着新型高分辨率探测器的出现以及数字成像技术的发展, 它得到了越来越多的关注。在太赫兹数字全息的研究中, 有关分辨率的估计和提高是这一领域的关键。通常, 分辨率可以分为单点分辨率和两点分辨率。两点分辨率是指系统确定两个点源分离的能力。而单

点分辨率被定义为系统确定一个点源位置的能力。目前, 数字全息分辨率极限的问题, 已被许多学者研究和讨论<sup>[6-10]</sup>。但有关数字全息分辨率的研究大多基于经典的分辨率估计方法, 即求解瑞利分辨率, 其基本思想是在重建平面估计数字全息系统点扩展函数的宽度。它属于两点分辨率, 表示数字全息系统对成像目标精细结构所能分辨的最小距离。经典分辨率极限忽略了噪声和实际面阵探测器探测单元

**收稿日期**: 2014-03-31; **收到修改稿日期**: 2014-05-06

**基金项目**: 国家自然科学基金(61377110)、高等学校博士学科点专项科研基金(20112302110028)

**作者简介**: 胡佳琦(1990—), 女, 硕士研究生, 主要从事太赫兹成像等方面的研究。E-mail: hujiaqi66@126.com

**导师简介**: 李 琦(1963—), 女, 博士, 教授, 主要从事激光与太赫兹成像及图像处理等方面的研究。

E-mail: liqi2013@hit.edu.cn

的不连续性。

Fournier 等<sup>[11-13]</sup>利用逆问题研究方法进行了数字全息重建,并且在此基础上,研究了同轴数字全息的单点分辨率<sup>[14]</sup>。他们提出的求解单点分辨率的基本思想是利用统计参数估计理论中 Cramer-Rao 下限与 Fisher 信息矩阵的关系,通过建立匹配全息图的模型,对点源的空间坐标位置进行估计,计算出的标准差即为理论上的分辨率极限<sup>[14]</sup>。它不仅与记录距离和探测器的尺寸有关,还随着点源的位置而变化。单点分辨率考虑了全息图中噪声水平的影响,以及采样和像素求和的影响。

但是,文献[14]中只对波长为  $0.532 \mu\text{m}$  的光源进行了仿真计算,并未对探测器参数的影响进行详细的对比研究。据目前所知,太赫兹同轴全息方面尚无单点分辨率仿真研究的报道,而此项研究对实践中探测器参数的优化,以及评价太赫兹数字全息分辨率提高方面具有重要的意义。因此,本文依据参考文献[14]提出的计算原理,仿真研究了占空比、像素个数等探测器参数对  $2.52 \text{ THz}$  同轴数字全息单点分辨率的影响。

## 2 基于参数估计的单点分辨率计算原理

光学系统对一个点源的响应可以由参数模型来描述,其示意图如图 1 所示。

图 1 中,  $xoy$  平面为物平面,  $x$  方向为水平方向,  $y$  方向为竖直方向,  $z$  为纵向。 $x_kO_ky_k$  平面为探测器平面,其方形区域代表探测器的大小。图中物平面内的小方形区域与探测器等大,其外围的区域为拓展域。

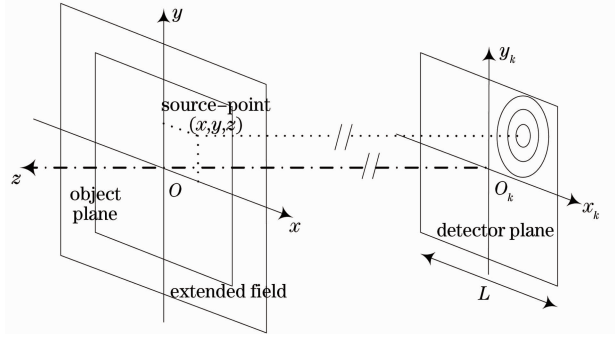


图 1 一个点源同轴数字全息的参数模型示意图  
Fig. 1 Illustration of the parametric model of an on-axis digital hologram of a point source

在不考虑取样和量化效应的影响时,考查一个点源对边长为  $L$  的理想方形探测器在记录距离为  $z$  时的全息图。对于探测器上一点  $(x_k, y_k)$ ,在菲涅耳近似下衍射强度,即参数模型  $g_\theta$  满足径向线性调频函数<sup>[14]</sup>:

$$g_\theta(x_k, y_k) = A \sin \left[ \pi \frac{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}{\lambda z} \right], \quad (1)$$

$\theta = (x, y, z)$  为矢量参数,  $\lambda$  为光的波长。这里考虑的噪声为高斯白噪声。

根据 Cramer-Rao 不等式,未知矢量参数  $\theta^* = [x, y, z]^T$  的无偏估计  $\hat{\theta} = \{\hat{\theta}_i\}_i$  的协方差矩阵以 Fisher 信息矩阵的逆为下界<sup>[14]</sup>:

$$\text{var}(\hat{\theta}_i) \geq [\mathbf{I}^{-1}(\theta^*)]_{i,i}, \quad (2)$$

式中  $\mathbf{I}(\theta^*)$  是一个  $n \times n$  的 Fisher 信息矩阵。在加性高斯白噪声(方差为  $\sigma_b^2$ )的情况下,对数似然函数为  $\ln p(\mathbf{d}; \theta)$  为<sup>[14]</sup>

$$\ln p(\mathbf{d}; \theta) = -\frac{1}{2\sigma_b^2} \sum_{x_k} \sum_{y_k} [d(x_k, y_k) - g_\theta(x_k, y_k)]^2 + C, \quad (3)$$

式中  $\mathbf{d}$  为图像,  $g_\theta$  为随参数矢量  $\theta$  变化的参数模型,  $C$  是一个常数。与对数似然函数  $\ln p(\mathbf{d}; \theta)$  的曲率相关的 Fisher 信息矩阵<sup>[14-15]</sup>:

$$[\mathbf{I}(\theta)]_{i,j} = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{d}; \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]. \quad (4)$$

将(1)式和(3)式代入(4)式,当考虑点源位于光轴的情况时,矢量参数  $\theta = (0, 0, z)$ , 则 Fisher 信息矩阵变为<sup>[14]</sup>

$$[\mathbf{I}(\theta)]_{i,j} = \frac{1}{\sigma_b^2 L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \left[ \frac{\partial g_\theta(x_k, y_k)}{\partial \theta_i} \frac{\partial g_\theta(x_k, y_k)}{\partial \theta_j} \right] \Bigg|_{x=0, y=0} dx_k dy_k. \quad (5)$$

通常情况下,点源并不位于光轴,此时矢量参数  $\theta = (x, y, z)$ , 通过对(5)式的积分限进行转换,得到<sup>[14]</sup>

$$[\mathbf{I}(\theta)]_{i,j} = \frac{1}{\sigma_b^2 L^2} \int_{-L/2-x}^{L/2-x} \int_{-L/2-y}^{L/2-y} \left[ \frac{\partial g_\theta(x_k, y_k)}{\partial \theta_i} \frac{\partial g_\theta(x_k, y_k)}{\partial \theta_j} \right] \Bigg|_{x=0, y=0} dx_k dy_k. \quad (6)$$

在考虑像素求和的情况下,全息图的参数模型  $g_\theta^b$  可由两个 sinc 函数进行调制<sup>[14]</sup>:

$$g_\theta^b(x_k, y_k) = g_\theta(x_k, y_k) \operatorname{sinc}\left[\frac{\pi\kappa_x\Delta_x(x-x_k)}{\lambda z}\right] \operatorname{sinc}\left[\frac{\pi\kappa_y\Delta_y(y-y_k)}{\lambda z}\right], \quad (7)$$

式中  $\Delta_x$  和  $\Delta_y$  为采样周期,  $\kappa_x\Delta_x$  和  $\kappa_y\Delta_y$  为像素有源区的宽度和高度。 $\kappa_x, \kappa_y$  为占空比。

根据探测器给出的采样条件,由 Fisher 信息矩阵的定义(4)式可以得到样本离散时的表达式<sup>[14]</sup>:

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{i,j} = \frac{1}{\sigma_b^2} \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left[ \frac{\partial g_\theta^b(i\Delta_x, j\Delta_y)}{\partial \theta_i} \frac{\partial g_\theta^b(i\Delta_x, j\Delta_y)}{\partial \theta_j} \right], \quad (8)$$

式中  $N$  为探测器的行数,  $M$  为列数。

由于信噪比  $R_{sn} = A/\sigma_b$ , 从而(8)式可写成

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{i,j} = \frac{R_{SN}^2}{A^2} \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left[ \frac{\partial g_\theta^b(i\Delta_x, j\Delta_y)}{\partial \theta_i} \frac{\partial g_\theta^b(i\Delta_x, j\Delta_y)}{\partial \theta_j} \right]. \quad (9)$$

(9)式可以看作是一个二进制掩模(边长  $L$  内为 1, 边长  $L$  外为 0)和模型梯度乘积做卷积。

在仿真中,将(7)式和(1)式代入(9)式得到 Fisher 信息矩阵,由于参数模型  $g_\theta^b$  中含有  $A$ , 因而可以将(9)式中的  $A$  约掉(即与  $A$  无关)。再经过(2)式求逆得到参数估计的方差,开平方根后,得到点源空间坐标估计的标准差,此即为单点分辨率。

### 3 仿真结果及分析

本文主要基于 Spiricon 公司 Pyrocam III 热像仪的参数进行研究,表 1 给出 Pyrocam III 的主要参数。仿真实验中,波长  $\lambda$  为  $118.83 \mu\text{m}$ , 信噪比  $R_{SN}$

为 4, 记录距离  $z$  为  $30 \text{ mm}$ 。研究的探测器参数有: 占空比  $\kappa$ 、像素为  $N \text{ pixel} \times M \text{ pixel}$ 。

表 1 Pyrocam III 的主要参数

Table 1 Main parameters of Pyrocam III

Detector array details	Pyrocam III
Active area	12.4 mm × 12.4 mm
Element spacing	100 $\mu\text{m}$ × 100 $\mu\text{m}$
Number of elements	124 × 124
Pixel size	85 $\mu\text{m}$ × 85 $\mu\text{m}$

针对 Pyrocam III 的参数,进行仿真,得到物平面上探测器大小的范围内各点处的分辨率,各点在水平方向、竖直方向及纵向分辨率分布图如图 2 所示。

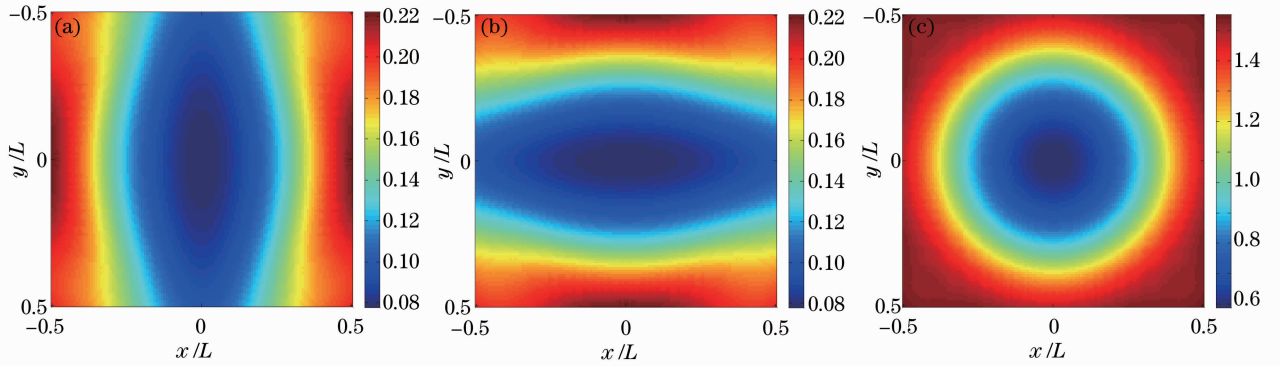


图 2 在 Pyrocam III 的条件下单点分辨率仿真结果。(a)水平方向; (b)竖直方向; (c)纵向

Fig. 2 Simulation results of a single point resolution under the Pyrocam III parameters. (a) Horizontal direction; (b) vertical direction; (c) longitudinal direction

从图 2(a)水平方向的分辨率图可以看到,光轴位置附近,单点分辨率最高,小于探测器的采样间隔  $0.1 \text{ mm}$ 。随着点源位置远离光轴,标准差变大,分辨率降低。标准差最小值是  $0.0777 \text{ mm}$ , 最大值是  $0.2223 \text{ mm}$ , 后者是前者的 2.86 倍。中心深蓝色区域的分辨率在  $(0.0777, 0.084)$  区间内, 其外围蓝色区域的分辨率在  $0.092 \text{ mm}$  左右。前两个区域的单点分辨率均小于探测器的采样间隔。浅蓝色区域标

准差区间为  $(0.120, 0.15)$ , 从此区域开始单点分辨率要大于探测器的采样间隔。黄色区域分辨率区间为  $(0.154, 0.187)$ , 红色区域为  $(0.188, 0.210)$ 。分辨率最低的深红色区域,对单点位置估计的标准差在  $0.22 \text{ mm}$  附近。从图中还可以看到,水平方向分辨率图呈对称分布,且分辨率不仅随  $x$  取值而变化,也随着  $y$  取值而变,当点源远离  $y=0$  时,中心位置水平方向分辨率变化不大,两侧则变化较大。

图 2(b)是竖直方向分辨率图,可以看出它是水平方向分辨率图的转置,最大值、最小值均没有变化,只是分布的位置发生了变化,故后面的仿真不再单独研究竖直方向的分辨率。

图 2(c)是纵向分辨率图,点源纵向分辨率的分布表现为中心对称。最小值为 0.5881 mm,最大值为 1.5527 mm,后者是前者的 2.64 倍。可以看出无论点源处在研究区域哪个位置,其纵向分辨率始

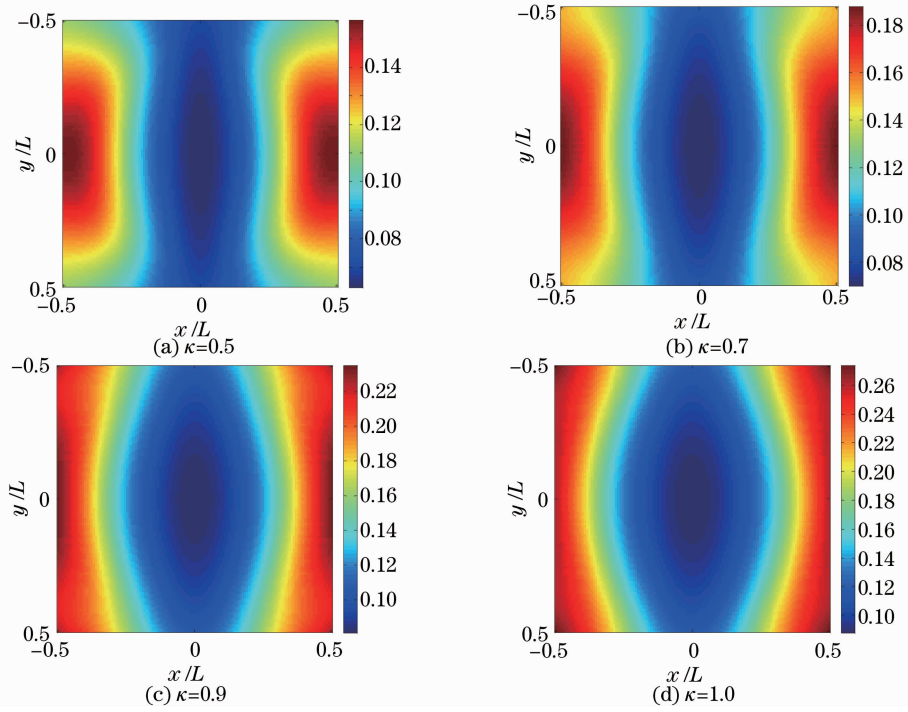


图 3 不同占空比下水平方向分辨率图

Fig. 3 Resolution maps in horizontal direction with different duty ratios

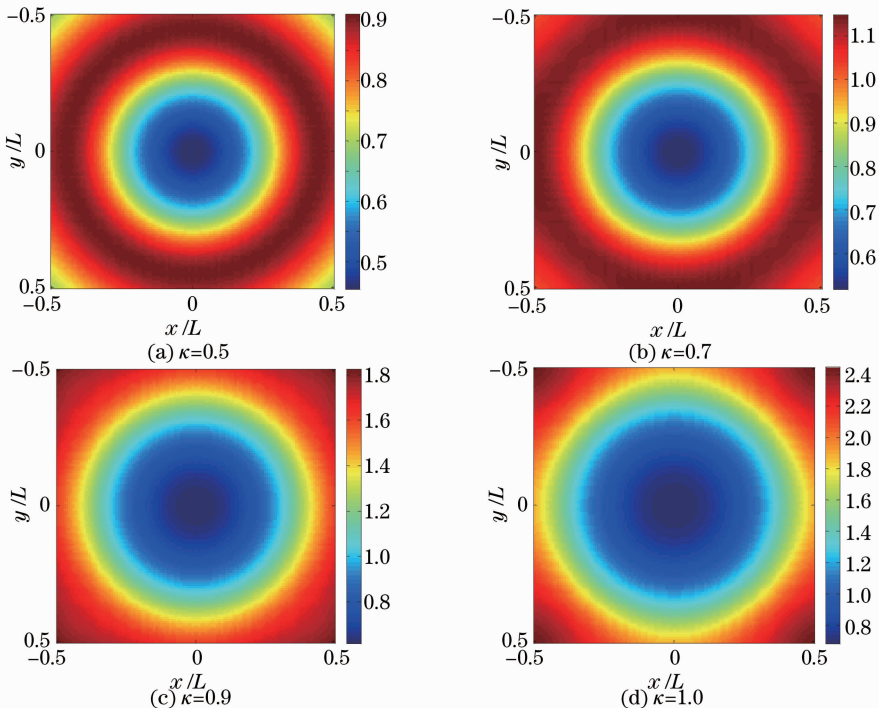


图 4 不同占空比下纵向分辨率图

Fig. 4 Resolution maps in longitudinal direction with different duty ratios



终大于探测器的采样间隔。分辨率较高的深蓝色区域的分辨率在(0.5881, 0.625)区间内,其外围蓝色区域的在(0.632, 0.796)范围内。浅蓝色区域分辨率区间为(0.813, 1.08),黄色区域分辨率区间为(1.13, 1.313),红色区域为(1.353, 1.458)。红色区域以外的位置,对单点位置估计的标准差在1.5 mm附近。

以上仿真结果说明对点源位置估计的精度,即分辨率,随着点源横向位置( $x, y$ )而变化,且表现为对称分布。

在不改变探测器其他参数的条件下,对不同占空比下单点分辨率进行仿真,分别使占空比 $\kappa = 0.5, 0.7, 0.9, 1.0$ ,得到结果如图3和图4所示。

从图3和图4中可以看出,随着占空比 $\kappa$ 的增大,对各点源 $x$ 坐标估计的标准差和对 $z$ 坐标估计

的标准差都增大了,这也就意味着,系统分辨率随着占空比的增大而降低。并且,随着占空比的变化,水平方向分辨率图和纵向分辨率图的形状也发生了改变。可以看到,水平方向分辨率图的中心蓝色区域在向两侧扩大,但依然表现为中心对称分布。 $\kappa \leq 0.9$ 时,纵向分辨率图呈圆对称分布,但当 $\kappa = 1.0$ 时,图像不再是圆对称分布。从两组分辨率图中可以看到,在4个拐角附近的分辨率分布发生了明显的变化,相比于其他位置,这些位置的标准差增加的要更快,从小于其邻近区域的标准差到大于其邻近区域的标准差。

在Pyrocam III的基础上,不改变探测器的尺寸 $L$ 和占空比 $\kappa$ ,使像素个数增加为 $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$ ,得到的仿真结果如图5所示。

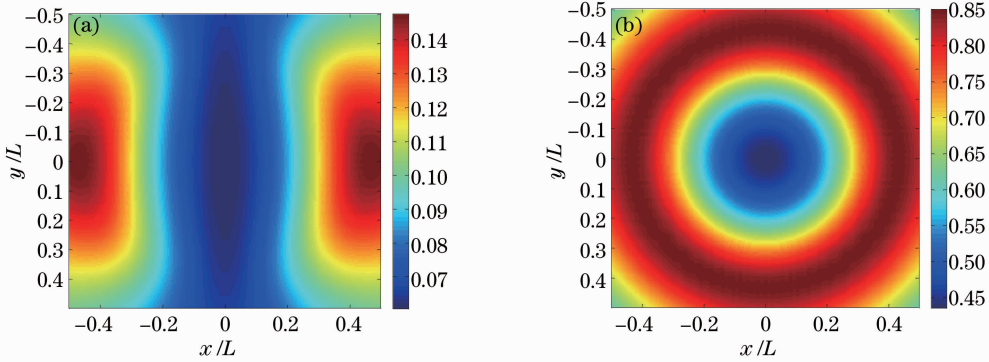


图5  $N=M=256$ 时的单点分辨率图。(a) 水平方向;(b) 纵向

Fig. 5 Single point resolution maps when  $N=M=256$ . (a) Horizontal direction; (b) longitudinal direction

图5(a)中,最小值为0.0606 mm,最大值为0.1478 mm。图5(b)中,最小值为0.4354 mm,最大值为0.8513 mm。与图2(a)和2(c)进行对比分析可知,像素个数增加后,各点的分辨率均有所升高,且随着点源位置的不同,各点分辨率升高的幅度不同。对于水平方向分辨率,点源离中心位置越远,离 $y=0$ 越远,分辨率升高的幅度越大。对于纵向分辨率,点源越远离中心位置,其分辨率升高的幅度越大,特别是在4个棱角附近,分辨率有明显的升高。

## 4 结 论

研究了探测器参数对太赫兹同轴数字全息单点分辨率的影响。在记录距离为30 mm,信噪比为4的情况下,仿真得出如下结论:

1) 在热像仪Pyrocam III的参数条件下,横向的标准差约介于0.08~0.23 mm之间,纵向的标准

差约介于0.59~1.55 mm之间;

2) 当不改变其他条件时,随着探测器的占空比增大,即 $\kappa$ 由0.5增大到1.0,横向分辨率图的最小值由0.06 mm变为0.09 mm,最大值由0.16 mm变到0.27 mm;纵向分辨率图的最小值由0.45 mm变为0.68 mm,最大值由0.91 mm变到2.45 mm,可以看出系统分辨率随着 $\kappa$ 的增大而降低;

3) 随着占空比的变化,横向分辨率图和纵向分辨率图的形状也发生了改变。其他条件不变,当使像素个数增加时,点源空间坐标估计的标准差会降低,即各点的分辨率均有所升高,且随着点源位置的不同,各点分辨率升高的幅度不同。

## 参 考 文 献

- Li Qi, Ding Shenghui, Li Yunda, *et al.*. Advances in research of THz digital holography imaging [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2012, 49(5): 050006.  
李 琦, 丁胜晖, 李运达, 等. 太赫兹数字全息成像的研究进展 [J]. 激光与光电子学进展, 2012, 49(5): 050006.

- 2 Kai Xue, Qi Li, Yunda Li, *et al.*. Continuous-wave terahertz in-line digital holography [J]. *Opt Lett*, 2012, 37(15): 3228—3230.
- 3 Li Qi, Ding Shenghui, Li Yunda, *et al.*. Comparison between 2.52 THz off-axis digital holography and focal-plane imaging [J]. *Chinese J Lasers*, 2012, 39(9): 0909003.  
李 琦, 丁胜晖, 李运达, 等. 2.52 THz 离轴数字全息成像和焦平面成像特性比较[J]. *中国激光*, 2012, 39(9): 0909003.
- 4 Li Qi, Hu Jiaqi. Experimental investigation on recording distance of terahertz Gabor in-line digital holography [J]. *Chinese J Lasers*, 2014, 41(2): 0209020.  
李 琦, 胡佳琦. 太赫兹 Gabor 同轴数字全息记录距离实验研究[J]. *中国激光*, 2014, 41(2): 0209020.
- 5 M S Heimbeck, M K Kim, D A Gregory, *et al.*. Terahertz digital holography using angular spectrum and dual wavelength reconstruction methods [J]. *Opt Express*, 2011, 19(10): 9192—9200.
- 6 J Garcia-Sucerquia, W Xu, S K Jericho, *et al.*. Digital in-line holographic microscopy [J]. *Appl Opt*, 2006, 45(5): 836—850.
- 7 D P Kelly, B M Hennelly. Resolution limits in practical digital holographic systems [J]. *Opt Eng*, 2009, 48(9): 5801.
- 8 T Latychevskaia, H W Fink. Resolution enhancement in digital holography by self-extrapolation of holograms [J]. *Opt Express*, 2013, 21(6): 7726.
- 9 K Khare, P T Ali, J Joseph. Single shot high resolution digital holography [J]. *Opt Express*, 2013, 21(3): 2581—2591.
- 10 A Stern, B Javidi. Space-bandwidth conditions for efficient phase-shifting digital holographic microscopy [J]. *J Opt Soc Am A*, 2008, 25(3): 736—741.
- 11 C Fournier, L Denis, E Thiebaud, *et al.*. Inverse problem approaches for digital hologram reconstruction [C]. *SPIE*, 2011, 8043: 80430S.
- 12 F Soulez, L Denis, C Fournier, *et al.*. Inverse-problem approach for particle digital holography: accurate location based on local optimization [J]. *J Opt Soc Am A*, 2007, 24(4): 1164—1171.
- 13 F Soulez, L Denis, É Thiébaud, *et al.*. Inverse problem approach in particle digital holography: out-of-field particle detection made possible [J]. *J Opt Soc Am A*, 2007, 24(12): 3708—3716.
- 14 C Fournier, L Denis, T Fournel. On the single point resolution of on-axis digital holography [J]. *J Opt Soc Am A*, 2010, 27(8): 1856—1862.
- 15 S K Sengijpta. Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory [J]. *Technometrics*, 1995, 37(4): 465—466.

栏目编辑: 何卓铭