光束高阶矩传输特性的矩阵表示

李晓庆[1,2] 季小玲[1*]

([1] 四川师范大学物理学院，四川 成都 610066
[2] 四川大学物理科学与技术学院，四川 成都 610064)

摘要 给出了用维格纳分布函数(WDF)定义的光束高阶矩传输特性的矩阵表达式，其中考虑了大气湍流和光学系统对光束高阶矩传输特性的影响。研究结果表明：光束的四阶矩阵与两个湍流参数 $T_{\rho\omega}$ 和 $T'_{\rho\omega}$ 有关，光束的三阶矩阵和二阶矩阵只与一个湍流参数 $T_{\rho\omega}$ 有关，而光束的一阶矩阵与湍流无关。该光束高阶矩传输特性的矩阵表达式具有一般性，即光束通过 Kolmogorov 湍流、非 Kolmogorov 湍流、光学系统以及自由空间中传输的光束高阶矩传输特性的矩阵表达式均可作为特例得到。这种光束高阶矩传输特性的矩阵表达式形式简洁、物理含义明确，具有重要的理论和实际应用意义。

关键词 激光光学；光束高阶矩；大气湍流；光学系统；维格纳分布函数

中图分类号 O43 **文献标识码** A **doi**：10.3788/AOS201434.s101002

Propagation Characteristics of Beam Higher-Order Moments by Using Matrix Formulae

Li Xiaoqing[1,2] Ji Xiaoling[1]

([1] *Department of Physics*，*Sichuan Normal University*，*Chengdu*，*Sichuan* 610066，*China*
[2] *College of Physical Science and Technology*，*Sichuan University*，*Chengdu*，*Sichuan* 610064，*China*)

Abstract The matrix formulae of beam higher-order moments through an optical system in atmospheric turbulence are derived by using the Wigner distribution function (WDF). It is shown that the fourth-order moment matrix depends on two turbulence parameters $T_{\rho\omega}$ and $T'_{\rho\omega}$, the third-order and the second-order moment matrixes depend on only $T_{\rho\omega}$, and the first-order moment matrix is independent of turbulence. The results obtained in this paper are general, for example, the matrix formulae of beam higher-order moments through Kolmogorov turbulence, non-Kolmogorov turbulence, optical system or free space can be given as special cases. The advantages of matrix formulation are that the expressions for higher-order moments are brief, and the physical meanings of higher-order moments are clear. The results obtained in this paper are of considerable theoretical and practical interest.

Key words laser optics; higher-order beam moment; atmospheric turbulence; optical system; Wigner distribution function

OCIS codes 010.1290; 000.4430

1 引 言

维格纳分布函数(WDF)定义的光束高阶矩可以很好地描述激光束的传输特性，如一阶矩描述了光束的重心，二阶矩描述了光束的束宽、远场发散角、等相面曲率半径和光束传输因子等，三阶矩和四阶矩分别描述了光束的偏斜度和平整度等[1-3]。1992 年，Weber[1]给出了部分相干光束通过二次折射率介质传输高阶强度矩的解析表达式。文献[4—5]研究了光束在一阶光学系统传输光束一至四阶矩的矩阵表示。

激光束的大气传输特性对遥感、跟踪和远距离光通信以及某些军事等应用都有十分重要的意

收稿日期：2013-10-20；**收到修改稿日期**：2013-11-05

基金项目：国家自然科学基金(61178070)、四川高校科研创新团队建设计划(12TD008)

作者简介：李晓庆(1984—)，女，助理研究员，主要从事激光传输方面的研究。E-mail：lixiaoqing912@163.com

* **通信联系人**。E-mail：jiXL100@163.com

义[6]。2009 年，文献[7]研究了部分相干光束在大气湍流中传输的二阶矩，并给出了二阶矩的矩阵表达式。2011 年，文献[8]研究了部分相干高斯余弦光束在大气湍流中传输的高阶矩和 K 参数。2012 年，本课题组给出了截断光束在大气湍流中传输二阶矩的矩阵表示[9]。2013 年，本课题组推导出了光束在大气湍流中通过 ABCD 光学系统传输的高阶矩的解析表达式[10]，但高阶矩传输公式未能够写成矩阵形式。最近，本课题组还推导出了部分相干光束在大气湍流中斜程传输的高阶矩的矩阵表达式[11]，但其中不含光学系统。

近来，一些实验结果表明，实际大气湍流与通常的 Kolmogorov 功率谱描述的湍流具有较大的偏差，表现出非常明显的非 Kolmogorov 湍流特征[12-14]。然而，文献[7－10]给出的均为 Kolmogorov 湍流情况下的结果。Toselli 等[15]通过引入广义指数 α 和广义振幅因子来描述非 Kolmogorov 湍流的功率谱。文献[16]研究了非 Kolmogorov 湍流中光束的多色性和偏心性对光束扩展的影响，文献[17]研究了非 Kolmogorov 湍流中有限能量艾里光束的光束扩展。文献[18－19]分别研究了截断部分相干双曲余弦高斯光束和高阶贝塞尔高斯光束在非 Kolmogorov 湍流中的传输特性。

迄今为止，光束在大气湍流中传输并且通过光学系统的高阶矩的传输特性的矩阵表达式还未研究。本文将给出用维格纳分布函数（WDF）定义的光束高阶矩传输特性的矩阵表达式，其中光束通过 Kolmogorov 湍流、非 Kolmogorov 湍流、光学系统以及自由空间中传输的高阶矩的矩阵表达式也将可作为特例给出。

2 理论模型及矩阵公式

在源平面（$z=0$）上，光束的交叉谱密度用 $W(\boldsymbol{\rho}_1',\boldsymbol{\rho}_2',0)$ 表示，$\boldsymbol{\rho}_1'$、$\boldsymbol{\rho}_2'$ 和 $\boldsymbol{\rho}_1$、$\boldsymbol{\rho}_2$ 分别表示光束在源平面 $z=0$ 和接收面 z 上的横向坐标矢量。本文中引入新的变量

$$\boldsymbol{\rho}'=(\boldsymbol{\rho}_1'+\boldsymbol{\rho}_2')/2,\quad \boldsymbol{\rho}_\mathrm{d}'=\boldsymbol{\rho}_1'-\boldsymbol{\rho}_2',\quad \boldsymbol{\rho}=(\boldsymbol{\rho}_1+\boldsymbol{\rho}_2)/2,\quad \boldsymbol{\rho}_\mathrm{d}=\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2. \tag{1}$$

根据广义惠更斯-菲涅耳原理，在大气湍流中，光束通过 ABCD 光学系统传输到接收面 z 处的交叉谱密度可以表示为[6,20]

$$W(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d},L)=\left(\frac{k}{2\pi B}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^2\rho'\mathrm{d}^2\rho_\mathrm{d}'W(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d}',0)\times$$
$$\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{B}[A\boldsymbol{\rho}'\cdot\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d}'+D\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d}-(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d}'+\boldsymbol{\rho}'\cdot\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d})]-\frac{1}{2}D_\Psi(\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d},\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d}',L)\right\}, \tag{2}$$

式中 L 是源平面和接收面之间的距离，A、B 和 D 是源平面和接收面之间的光束传输矩阵元素，k 是波数（$k=2\pi/\lambda$，λ 是波长），D_Ψ 表示湍流波结构函数，可以表示为[20]

$$D_\Psi(\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d},\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d}',L)=8\pi^2k^2\int_0^L\int_0^\infty\kappa\Phi_n(\kappa)\left\{1-\mathrm{J}_0\left\{\kappa\left|\frac{b(z)}{B}\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d}'+\left[a(z)-\frac{Db(z)}{B}\right]\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d}\right|\right\}\right\}\mathrm{d}\kappa\mathrm{d}z, \tag{3}$$

其中，$a(z)$ 和 $b(z)$ 是通过光学系统的后向传输矩阵元素，$\mathrm{J}_0(\cdot)$ 为零阶贝塞尔函数，$\Phi_n(\kappa)$ 为湍流大气介质的折射率起伏空间谱密度函数，κ 为空间波数。为了能够推导出解析结果，将 $\mathrm{J}_0(\cdot)$ 展开成无限项求和形式，则(3)式可写为[21]

$$D_\Psi(x_\mathrm{d},y_\mathrm{d};x_\mathrm{d}',y_\mathrm{d}',L)=8\pi^2k^2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}}{(s!)^2 2^{2s}}\int_0^L\int_0^\infty\mathrm{d}\kappa\mathrm{d}z\kappa^{2s+1}\Phi_n(\kappa)\times$$
$$\left\{\left\{\frac{b(z)}{B}x_\mathrm{d}'+\left[a(z)-\frac{Db(z)}{B}\right]x_\mathrm{d}\right\}^2+\left\{\frac{b(z)}{B}y_\mathrm{d}'+\left[a(z)-\frac{Db(z)}{B}\right]y_\mathrm{d}\right\}^2\right\}^s. \tag{4}$$

光束的 WDF 可以用交叉谱密度表示为[22]

$$u(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\theta},L)=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}W(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d},L)\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}_\mathrm{d}, \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_x,\theta_y)$，$k\theta_x$ 和 $k\theta_y$ 分别是波矢量沿 x 轴和 y 轴的分量。将(2)式代入(5)式可以得到

$$u(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\theta},L)=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^4\frac{1}{B^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{d}},0)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{d}}\mathrm{d}^2\rho_{\mathrm{d}}\times$$
$$\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{B}[A\boldsymbol{\rho}'\cdot\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{d}}+D\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{d}}-(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{d}}+\boldsymbol{\rho}'\cdot\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{d}})]-\mathrm{i}k\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{d}}-\frac{1}{2}D_{\Psi}(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{d}},L)\right\}.\tag{6}$$

光束的 $n_1+n_2+m_1+m_2$ 阶矩可用 WDF 定义为[2,6]

$$\langle x^{n_1}y^{n_2}\theta_x^{m_1}\theta_y^{m_2}\rangle=\frac{1}{P}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^{n_1}y^{n_2}\theta_x^{m_1}\theta_y^{m_2}u(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\theta},L)\mathrm{d}^2\rho\mathrm{d}^2\theta,\tag{7}$$

式中 $P=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\theta},L)\mathrm{d}^2\rho\mathrm{d}^2\theta$ 光束的总能量。

利用 δ 函数(狄拉克函数)公式

$$\delta(\rho''_{\mathrm{d}}-\rho'_{\mathrm{d}})=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\pm\mathrm{i}k\boldsymbol{\theta}'(\rho''_{\mathrm{d}}-\rho'_{\mathrm{d}})]\mathrm{d}^2\theta',\tag{8}$$

将(6)式代入(7)式可以得到

$$\langle x^{n_1}y^{n_2}\theta_x^{m_1}\theta_y^{m_2}\rangle=\frac{1}{P}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\theta}',L)u(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\theta}',0)\mathrm{d}^2\rho'\mathrm{d}^2\theta',\tag{9}$$

式中 $u(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\theta}',0)$ 是 $L=0$ 平面处的 WDF，并且

$$G(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\theta}',L)=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^4\frac{1}{L^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^2\rho\mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\rho'_{\mathrm{d}}\mathrm{d}^2\theta'_{\mathrm{d}}x^{n_1}y^{n_2}\theta_x^{m_1}\theta_y^{m_2}\times$$
$$\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{B}[A\boldsymbol{\rho}'\cdot\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{d}}+\boldsymbol{D\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{d}}-(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{d}}+\boldsymbol{\rho}'\cdot\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{d}})]+\mathrm{i}k\boldsymbol{\theta}'\cdot\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{d}}-\mathrm{i}k\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{d}}-\frac{1}{2}D_{\Psi}(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{d}},L)\right\}.\tag{10}$$

利用积分公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-\mathrm{i}x)^n\exp(-\mathrm{i}sx)\mathrm{d}x=\delta^{(n)}(s),\tag{11}$$

依次对(10)式中的 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 积分，经过复杂的积分运算，可以得到

$$G(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\theta}',L)=\frac{(-\mathrm{i})^{n_1+n_2+m_1+m_2}B^{n_1+n_2}}{k^{n_1+n_2+m_1+m_2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^2\rho'_{\mathrm{d}}\mathrm{d}^2\rho_{\mathrm{d}}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{B}\boldsymbol{\rho}'\cdot(A\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{d}})+\mathrm{i}k\boldsymbol{\theta}'\cdot\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{d}}-H(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{d}},L)\right\}\times$$
$$\delta^{(n_1)}(x'_{\mathrm{d}}-Dx_{\mathrm{d}})\delta^{(n_2)}(y'_{\mathrm{d}}-Dy_{\mathrm{d}})\delta^{(m_1)}(x_{\mathrm{d}})\delta^{(m_2)}(y_{\mathrm{d}}),\tag{12}$$

式中 $\delta^{(n)}$ 表示 δ 函数的 n 次导数。

光矢量可以由一个 4×1 的矩阵表示，即 $\boldsymbol{P}=(x,\ y,\ \theta_x,\ \theta_y)^{\mathrm{T}}$，其中 T 表示矩阵的转置。本文的主要目是将光束高阶矩传输的矩阵表示从一阶光学系统[4-5]推广到含有 ABCD 光学系统的大气湍流中。光束通过大气湍流的一至四阶矩矩阵可写为

$$\begin{cases}\langle\boldsymbol{V}_1\rangle=\langle\boldsymbol{P}\rangle\\ \langle\boldsymbol{V}_2\rangle=\langle\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{P}\rangle\\ \langle\boldsymbol{V}_3\rangle=\langle\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\rangle\\ \langle\boldsymbol{V}_4\rangle=\langle\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{P}\rangle\end{cases},\tag{13}$$

式中$\otimes$表示直积，$\langle\cdot\rangle$表示 WDF 定义的高阶矩[23]。

原则上，联合(9)式和(4)，(5)，(12)式可以得到光束在大气湍流中传输的任意高阶矩传输公式。但是，从实验的观点看，只有光束的一至四阶矩才有意义，并且高于四阶矩的存在很大的测量误差[1]。利用积分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta^{(n)}(x)\mathrm{d}x=(-1)^nf^{(n)}(0),\tag{14}$$

式中 $f^{(n)}$ 表示任意函数 f 的 n 次导数，经过复杂的积分运算，并且令 $AD-BC=1$，得到了大气湍流中光束通过光学系统传输的一到四阶矩传输的矩阵表达式，即

1) 一阶矩的矩阵表示($n_1+n_2+m_1+m_2=1$)

$$\langle\boldsymbol{V}_1\rangle=\langle\boldsymbol{SV}_{10}\rangle,\tag{15}$$

式中 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{S}'=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$是传输矩阵，$\boldsymbol{E}_2$ 是 2×2的单位阵，$\boldsymbol{V}_{j0}$($j=1,\ 2,\ 3,\ 4$)是源平面上的第 j 阶矩。由(15)式可知光束的一阶矩与湍流无关。

光束的重心定义为[1,23]

$$\langle \boldsymbol{\rho} \rangle = \langle A\boldsymbol{\rho}_0 + B\boldsymbol{\theta}_0 \rangle, \tag{16}$$

下角标“0”表示 $z=0$ 平面处光束对应参量。

2）二阶矩的矩阵表示（$n_1+n_2+m_1+m_2=2$）

$$\langle \boldsymbol{V}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}_{20}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{a}} \rangle, \tag{17}$$

式中 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} T_{02} & T_{11} \\ T_{11} & T_{20} \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{E}_2$，及

$$T_{\mu\nu} = 2\pi^2 \int_0^L \int_0^\infty a^{\mu}(z) b^{\nu}(z) \kappa^3 \Phi_n(\kappa) \mathrm{d}\kappa \mathrm{d}z,$$

$$\mu,\nu = 0,1,2,\ \mu+\nu = 2. \tag{18}$$

参数 $T_{\mu\nu}$ 表征大气湍流的影响，它与 L、$\Phi_n(\kappa,z)$、$a(z)$ 和 $b(z)$ 等有关 。

根据(17)式，可以得到一些重要光束参数，例如：二阶矩束宽、远场发散角、光束传输因子和曲率半径等[1,7]：

$$\langle \rho^2 \rangle = A^2 \langle \rho_0^2 \rangle + B^2 \langle \theta_0^2 \rangle + 2AB \langle \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\theta}_0 \rangle + 2T_{02}, \tag{19a}$$

$$\langle \theta^2 \rangle = C^2 \langle \rho_0^2 \rangle + D^2 \langle \theta_0^2 \rangle + 2T_{20}, \tag{19b}$$

$$M^2 = k\sqrt{\langle \rho^2 \rangle \langle \theta^2 \rangle - \langle \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle^2}, \tag{19c}$$

$$R = \langle \rho^2 \rangle / \langle \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle. \tag{19d}$$

3）三阶矩的矩阵表示（$n_1+n_2+m_1+m_2=3$）

$$\langle \boldsymbol{V}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}_{30}(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{S})^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{a}} \otimes \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{T}_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{V}_1 \otimes \boldsymbol{T}_{\mathrm{b}} \rangle, \tag{20}$$

式中 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}} = (\boldsymbol{\tau}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\tau}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\tau}_3^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\tau}_4^{\mathrm{T}})$，　$\boldsymbol{\tau}_1 = (T_{20},0,T_{11},0)^{\mathrm{T}}$，　$\boldsymbol{\tau}_2 = (0,T_{02},0,T_{11})^{\mathrm{T}}$，　$\boldsymbol{\tau}_3 = (T_{11},0,T_{02},0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\tau}_4 = (0,T_{11},0,T_{02})^{\mathrm{T}}$。(20)式表明：三阶矩与湍流参数 $T_{\mu\nu}$、光束传输矩阵 $\boldsymbol{S}'$ 和光束一阶矩有关。

光束的对称性可用 skewness 参数描述，即[1,3]

$$A = \langle \rho^3 \rangle / (\langle \rho^2 \rangle)^{3/2}. \tag{21}$$

根据(21)、(20)、(17)式就可以得到任意光束在大气湍流中通过 ABCD 光学系统传输的 skewness 参数。

4）四阶矩的矩阵表示（$n_1+n_2+m_1+m_2=4$）

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{V}_4 \rangle = \langle &(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{S})\boldsymbol{V}_{40}(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{S})^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{V}_1 \otimes \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{T}_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{a}} \otimes \boldsymbol{V}_1 \otimes \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{V}_1 \otimes \boldsymbol{T}_{\mathrm{a}} \otimes \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{T}_{\mathrm{a}} \otimes \boldsymbol{V}_1 + \\ &\boldsymbol{V}_1 \otimes \boldsymbol{V}_1 \otimes \boldsymbol{T}_{\mathrm{b}} + \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{a}} \otimes \boldsymbol{T}_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{b}} \otimes \boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{c}} + \boldsymbol{T}'/4k^2 \rangle,\end{aligned} \tag{22}$$

式中 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{c}} = (\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}\otimes\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}\otimes\boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}\otimes\boldsymbol{\tau}_3, \boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}\otimes\boldsymbol{\tau}_4)$，$\boldsymbol{T}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{T}'_{\mathrm{a}} & \boldsymbol{T}'_{\mathrm{b}} \\ \boldsymbol{T}'_{\mathrm{b}} & \boldsymbol{T}'_{\mathrm{c}} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{\mathrm{a}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{b}} \\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{b}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{c}} \end{pmatrix}$，“$\circ$”是 Tracy-Singh 符号[22]。$\boldsymbol{T}'_{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} T'_{04} & T'_{13} \\ T'_{13} & T'_{22} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{T}'_{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} T'_{13} & T'_{22} \\ T'_{22} & T'_{31} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{T}'_{\mathrm{c}} = \begin{pmatrix} T'_{22} & T'_{31} \\ T'_{31} & T'_{40} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$。

$$T'_{\mu\nu} = 2\pi^2 \int_0^L \int_0^\infty a(z)^{\mu} b(z)^{\nu} \kappa^5 \Phi_n(\kappa) \mathrm{d}\kappa \mathrm{d}z,\quad \mu,\nu = 0,1,2,3,4,\ \mu+\nu = 4, \tag{23}$$

式中 $T'_{\mu\nu}$ 是另一个表征湍流影响的参数。值得注意的是，两湍流参数 $T'_{\mu\nu}$ 与 $T_{\mu\nu}$ 不但与湍流有关，还与光学系统有关。$T_{\mu\nu}$ 的积分号内含有 κ^3，而 $T'_{\mu\nu}$ 的积分号内含有 κ^5。由(22)式可知，四阶矩与 $T_{\mu\nu}$、$T'_{\mu\nu}$、$\boldsymbol{S}'$ 以及自由空间的二阶矩有关。

光束的平整程度可由 K 参数描述，它定义为[1,24]

$$K = \langle \rho^4 \rangle / (\langle \rho^2 \rangle)^2. \tag{24}$$

根据(24)、(22)和(17)式就可以得到任意光束在大气湍流中通过 ABCD 光学系统传输的 K 参数。

(15)，(17)，(20)，(22)式是本文得到的主要解析结果。该结果与已有结果相比有如下优点：1）文献[10]给出了均匀湍流中光束高阶矩的代数表达式，但未写成矩阵形式，如四阶矩有 19 个表达式，三阶矩有 10 个表达式，本文所得结果形式更为简洁。2)文献[11] 给出了光束在大气湍流中沿斜程传输高阶矩的矩阵表达式，但其中不含光学系统，本文同时考虑了大气湍流和光学系统对光束高阶矩传输特性的影响。3)文献[7,9]分别仅给出了部分相干光束和截断光束在大气湍流中传输二阶矩的矩阵表达式，而本文给出了光束一至四阶矩的矩阵表达式。4)文献[4]虽给出了高阶矩的矩阵表达式，但没有考虑大气湍流存在的情况，本文所得光束高阶矩传输特性的矩阵表达式更具有一般性，即光束通过 Kolmogorov 湍流、非 Kolmogorov 湍流、光学系统以及自由空间中传输的光束高阶矩传输特性的矩阵表达式均可作为特例得到。现讨论如下：

1）光束通过 Kolmogorov 湍流（含 ABCD 光学系统）的传输

在 Kolmogorov 湍流下，$\Phi_n(\kappa)$ 可采用 Von

Karman 谱或 Tatarskii 谱等，并将光束通过对应 ABCD 光学系统的后向传输矩阵元素 $a(z)$ 和 $b(z)$ 代入(18)，(23)式，积分求出 T_{μ} 和 T'_{μ}，则(15)，(17)，(20)，(22)式就简化为光束通过 Kolmogorov 湍流(含 ABCD 光学系统)传输的光束一至四阶矩的矩阵表达式。

2）光束通过非 Kolmogorov 湍流(不含 ABCD 光学系统)的传输

将 $\Phi_n(\boldsymbol{\kappa})$ 用非 Kolmogorov 功率谱函数谱 $\Phi_n(\boldsymbol{\kappa},\alpha)$[15] 代替，其中 α 为湍流广义指数。因不含光学系统，故 $\boldsymbol{S}'=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$a(z)=1$ 和 $b(z)=z$。将 $\Phi_n(\boldsymbol{\kappa},\alpha)$ 和 A、B、D、$a(z)$ 和 $b(z)$ 代入(18)，(23)式，积分求出 T_{μ} 和 T'_{μ}。此时，(15)，(17)，(20)，(22)式可简化为光束通过非 Kolmogorov 湍流(不含 ABCD 光学系统)传输的光束一至四阶矩的矩阵表达式。

3）光束通过 ABCD 光学系统(不含大气湍流)的传输

因无湍流，故 $T_{\mu}=T'_{\mu}=0$。这时，(15)，(17)，(20)，(22)式简化为光束通过 ABCD 光学系统传输的光束一至四阶矩的矩阵表达式，即

$$\begin{cases}\langle \boldsymbol{V}_1\rangle = \langle \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}_{10}\rangle \\ \langle \boldsymbol{V}_2\rangle = \langle \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}_{20}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\rangle \\ \langle \boldsymbol{V}_3\rangle = \langle \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}_{30}(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{S})^{\mathrm{T}}\rangle \\ \langle \boldsymbol{V}_4\rangle = \langle (\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{S})\boldsymbol{V}_{40}(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{S})^{\mathrm{T}}\rangle\end{cases}. \tag{25}$$

(25)式与文献[4]的(7)式一致。当光束通过自由空间的传输时，进一步有 $\boldsymbol{S}'=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$a(z)=1$ 和 $b(z)=z$。这时，(25)式简化为光束通过自由空间传输的光束一至四阶矩的矩阵表达式。

3 结　　论

基于广义惠更斯-菲涅耳原理，给出了用 WDF 定义的光束一至四阶矩传输的矩阵表达式，其中考虑了大气湍流和光学系统对光束高阶矩传输特性的影响。研究结果表明：光束的四阶矩阵与两个湍流参数 T_{μ} 和 T'_{μ} 有关，光束的三阶矩阵和二阶矩阵只与一个湍流参数 T_{μ} 有关，而光束的一阶矩阵与湍流无关。本文所得结果具有一般性，光束通过 Kolmogorov 湍流、非 Kolmogorov 湍流、光学系统以及自由空间中传输的光束一至四阶矩传输矩阵表达式均可作为特例得到。

参 考 文 献

1 H Weber. Propagation of higher-order intensity moments in quadratic-index media [J]. Optical and Quantum Electronics, 1992, 24(9): S1027－S1049.

2 P P Martinez-Herrero, P M Mejias, H Weber. On the different definitions of laser beam moments [J]. Optical and Quantum Electronics, 1993, 25(6): 423－428.

3 M Sanchez, J L H Neira, J Delgado, *et al*.. Free propagation of high order moments of laser beam intensity distribution [C]. SPIE, 1990, 1397: 635－638.

4 D Dragoman. Higher-order moments of the Wigner distribution function in first-order optical systems [J]. J Opt Soc Am A, 1994, 11(10): 2643－2646.

5 D Onciul. Invariance properties of general astigmatic beams through first-order optical systems [J]. J Opt Soc Am A, 1993, 10(2): 295－299.

6 L C Andrews, R L Phillips. Laser Beam Propagation through Random Media (2nd edtion) [M]. Bellingham: SPIE Press, 2005.

7 Y Dan, B Zhang. Second moments of partially coherent beams in atmospheric turbulence [J]. Opt Lett, 2009, 34(5): 563－565.

8 X Chu. Moment and kurtosis parameter of partially coherent cosh-Gaussian beam in turbulent atmosphere [J]. Appl Phys B, 2011, 103(4): 1013－1019.

9 Li Xiaoqing, Ji Xiaoling. Beam matrix in terms of second-order moments of truncated beams [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(7): 0701003.
李晓庆，季小玲. 截断光束的二阶矩矩阵[J]. 光学学报，2012，32(7)：0701003.

10 X Q Li, X L Ji. Propagation of higher-order intensity moments through an optical system in atmospheric turbulence [J]. Opt Commun, 2013, 298: 1－7.

11 X Q Li, X L Ji, T Wang, *et al*.. Matrix formulation of higher-order moments of partially coherent beams propagating through atmospheric turbulence along a slanted path [J]. J Opt, 2013, 15(12): 125720.

12 A N Kolmogorov. The local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers [C]. Dokl Nauk SSSR, 1941, 30(4): 301－305.

13 C H Rao, W H Jiang, N Ling. Spatial and temporal characterization of phase fluctuations in non-Kolmogorov atmospheric turbulence [J]. J Mod Opt, 2000, 47(6): 1111－1126.

14 A Zilberman, E Golbraikh, N S Kopeika. Lidar studies of aerosols and non Kolmogorov turbulence in the Mediterranean troposphere [J]. SPIE, 2005, 5987: 598702.

15 I Toselli, L C Andrews, R L Phillips, *et al*.. Angle of arrival fluctuations for free space laser beam propagation through non-Kolmogorov turbulence [C]. SPIE, 2007, 6551: 65510E.

16 J Deng, X Ji, Z Pu, *et al*.. Influence of polychroism and decentration on spreading of laser beams and propagating in non-Kolmogorov turbulence [J]. Opt Commun, 2013, 301-302: 19－28.

17 R Tao, L Si, Y Ma, *et al*.. Average spreading of finite energy Airy beams in non-Kolmogorov turbulence [J]. Opt Lasers Eng, 2013, 51(4): 488－492.

18 Tao Rumao, Si Lei, Ma Yanxing, *et al*.. Propagation of truncated partially coherent cosh-Gaussian beam in non-Kolmogorov turbulence [J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(5): 0502008.
陶汝茂，司　磊，马阎星，等. 截断部分相干双曲余弦高斯光束在非 Kolmogorov 湍流中的传输[J]. 中国激光，2013，40(5)：0502008.

19 Chen Feinan, Chen Jingjing, Zhao Qi, *et al*.. Properties of high order Bessel Gaussian beam propagation in non-Kolmogorov

atmosphere turbulence [J]. Chinese J Lasers, 2012, 39(9): 0913001.
陈斐楠，陈晶晶，赵　琦，等. 高阶贝塞尔高斯光束在非柯尔莫哥诺夫大气中的传输特性[J]. 中国激光，2012，39(9)：0913001.

20 H T Yura, S G Hanson. Optical beam wave propagation through complex optical systems [J]. J Opt Soc Am A, 1987, 4(10): 1931－1948.

21 I S Gradshteyn, I M Ryzhik. Table of Integrals, Series, and Products (7th edition) [M]. New York: Academic Press, 2007.

22 H M Ozaktas, M A Kutay, Z Zalevsky. The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing [M]. New York: John Wiley & Sons, 2000.

23 J Serna, R Martinez-Herrero, P M Mejias. Parametric characterization of general partially coherent beams propagating through ABCD optical systems [J]. J Opt Soc Am A, 1991, 8(7): 1094－1098.

24 R Martinez-Herrero, G Piquero, P M Mejias. On the propagation of the kurtosis parameter of general beams [J]. Opt Commun, 1995, 115(3-4): 225－232.

栏目编辑： 史　敏