

# 基于 Zernike 多项式和径向基函数的 自由曲面重构方法

叶井飞 高志山 刘晓莉 王伟 张聪扬

(南京理工大学电子工程与光电技术学院, 江苏 南京 210094)

**摘要** 对于梯度变化较大的光学自由曲面,采用模式化方法对光学面整体重构,其重构精度受到限制,无法满足要求,而且曲面局部特性无法精确表征。针对以上问题提出了基于 Zernike 多项式和径向基函数的自由曲面重构方法,提高自由曲面的重构精度。将整个自由曲面分解为多个圆形子区域,在各个圆形子域中采用 Zernike 多项式作为基函数进行曲面局部拟合,然后利用径向基函数形成整个自由曲面。通过数值实验对 5 种不同类型的曲面进行重构分析,实验结果表明,自由曲面重构精度优于纳米量级,验证了所提重构方法的适应性和高精度,在现代光学系统制造和检测中具有一定的应用前景,同时对自由曲面重构中的一些关键问题进行了讨论分析。

**关键词** 光学设计;光学自由曲面;Zernike 多项式;径向基函数;曲面重构

**中图分类号** TP302.7 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201434.0822003

## Freeform Surfaces Reconstruction Based on Zernike Polynomials and Radial Basis Function

Ye Jingfei Gao Zhishan Liu Xiaoli Wang Wei Zhang Congyang

(School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science and Technology,  
Nanjing, Jiangsu 210094, China)

**Abstract** For optical freeform surfaces with steep slopes, the accuracy of overall surface shape reconstruction by modal method is limited and cannot meet the requirements, and the local surface features cannot be characterized accurately. A method based on Zernike polynomials and radial basis function to reconstruct freeform surface is proposed to improve the freeform surface reconstruction accuracy. The entire freeform surface is decomposed into many circular subdomains. The local surface patch is fitted by Zernike polynomials acting as base functions in each subdomain and the overall surface is formed by radial basis function. Numerical experiments are carried out with reconstruction accuracy analysis for five different surfaces. According to the experiments, freeform surface reconstruction accuracy is better than nanometer level. The adaptability and high accuracy of the proposed method are verified, which has great application prospect in the manufacturing and measuring of modern optical systems. At the same time, a few key issues have been discussed and analyzed in the freeform surface reconstruction.

**Key words** optical design; optical freeform surface; Zernike polynomial; radial basis function; surface reconstruction

**OCIS codes** 220.4830; 220.1250

## 1 引 言

随着计算机技术的发展和高精度制造技术的进

步,自由曲面光学元件的加工逐渐成为现实,在现代光学系统中有着重要的应用。光学自由曲面<sup>[1]</sup>作为

收稿日期: 2014-01-27; 收到修改稿日期: 2014-03-31

基金项目: 国家自然科学基金(61377015,61308076)、教育部博士点基金(20103219110014)、中科院重点实验室开放基金(2008DP173445)

作者简介: 叶井飞(1988—),男,博士研究生,主要从事光学设计以及自由曲面光学方面的研究。

E-mail: yjfeil988@gmail.com

导师简介: 高志山(1966—),男,博士,教授,主要从事光学测试、光学设计、眼视光学等方面的研究。

E-mail: zhishgao@mail.njust.edu.cn(通信联系人)

本文电子版彩色效果请详见中国光学期刊网 www.opticsjournal.net

一种复杂的曲面面形,具有非旋转对称性,其表面局部梯度变化大,在光学设计中具有很高的设计自由度,能够更好地校正非共轴系统的像差,使得光学系统质量轻便、结构紧凑<sup>[2-3]</sup>。

曲面重构技术在自由曲面光学设计和检测中具有重要的作用。现有光学自由曲面设计方法可分为两类:参数化表示法和直接设计法。参数化表示法包含偶次多项式<sup>[4]</sup>、Zernike 多项式<sup>[5]</sup>、Q 型多项式<sup>[6]</sup>、径向基函数<sup>[7]</sup>以及样条函数<sup>[8-9]</sup>等。将此类参数化的面形数据输入到光学设计软件中,进行逐步优化设计以满足要求。另一种方法是直接设计法,即根据几何光学设计理论求解曲面点云数据,例如求解偏微分方程的 Wassermann-Wolf 方法<sup>[10-12]</sup>,基于物像等光程特性的设计方法<sup>[13]</sup>,以及由物像关系计算曲面点云的同步多重曲面设计方法<sup>[14-15]</sup>等,这类方法需要对点云数据利用解析函数进行高精度拟合,便于进一步采用光学设计软件进行优化分析。在光学自由曲面检测中,面形重构也是波面测试中的关键步骤。目前复杂面形的检测手段主要包含坐标测量机<sup>[16]</sup>、轮廓仪、计算全息零位补偿干涉检测<sup>[17-18]</sup>以及基于点源阵列的非零位干涉测试<sup>[19]</sup>等。坐标测量机对被测自由曲面进行点云采样,根据采样数据进行曲面重构,其测试精度在微米量级,难以达到纳米量级的精度要求,但在实际工程应用中可以作为检测自由曲面光学元件轮廓的有效手段。轮廓仪只能对被测元件表面一维曲线进行测量,通过许多采样点数据重构出一维轮廓曲线,其测试精度能够达到几十纳米量级,但是无法实现整体面形的测量。以上两种接触式面形测试手段相对于非接触干涉测试更为直接,对被测件的高度信息进行点云采样,根据一定算法重构出曲面,但其重构精度受到一定限制。

对于自由复杂曲面的重构技术,大部分采用模式化方法<sup>[20]</sup>,即采用解析函数对整个被测曲面进行数值最优化逼近。Ares 等<sup>[21]</sup>比较分析了采用三次 B 样条和 Zernike 多项式重构复杂波前,认为 B 样条拟合技术可作为一种复杂波前重构的手段;Kaya 等<sup>[22-23]</sup>研究了采用  $\varphi$  多项式表征光学自由曲面时在不同采样方式下对曲面重构精度的影响,同时量化分析了  $\varphi$  多项式和 Q 型多项式表示光学自由曲面的拟合精度,对未来先进光学系统的设计和制造具有指导意义;王庆丰等<sup>[24]</sup>采用双变量正交多项式描述光学自由曲面,分析了不同数据抽样方式对不同面形描述方法的拟合适应性和精度问题,然而对

于梯度变化较大的光学自由曲面,曲面重构精度仍存在的问题。

在工程应用中,对于大口径或者局部变化较大的曲面面形检测,通常采用子孔径拼接<sup>[25]</sup>的测量方法。本文提出的基于 Zernike 多项式和径向基函数的自由曲面重构方法与子孔径拼接的思想类似,将整个自由曲面分解为多个子区域,针对每个子区域进行局部拟合,再通过算法形成整个自由曲面,从而实现自由曲面的高精度重构。

## 2 自由曲面重构方法

### 2.1 数据抽样方式

在光学面形的实际检测中,曲面面形数据的采样方式通常是随机采样。Kaya 等<sup>[22-23]</sup>深入研究了数据采样方式对曲面拟合精度的影响,得到的均匀阵列采样方式具有最佳适应性。对于采样数量而言,为了实现曲面高精度重构,理论上曲面采样点越多相对越好,尤其是曲面局部变化较大处。然而过多的采样点数量会增加计算负担,影响曲面重构的效率。为方便起见,针对方形域进行均匀阵列采样,如图 1 所示。所提曲面重构方法中将方形孔径分解为多个圆形子区域,各个子区域之间有重叠区域。图 2 是实际方形口径 6 mm×6 mm 区域内数据采样点(蓝色点),拟合评价点(红色点)以及圆形子区域(黑色圆)分布情况的示意图,均采用阵列分布的形式。

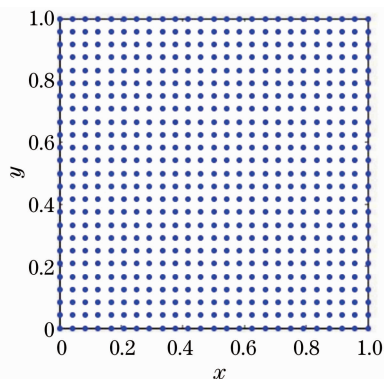


图 1 阵列采样示意图

Fig. 1 Sketch of array grid sampling

图 2(a)显示了方形域孔径范围内所有采样点和拟合评价点的分布情况,以及局部直角子区域、边缘子区域和内部子区域所包含的采样点和拟合评价点。图 2(b)为整个孔径范围内多个圆形子区域的分布示意图,各个子区域间含有重叠部分。对于自由曲面而言,将整体分解为许多子区域,整体曲面梯

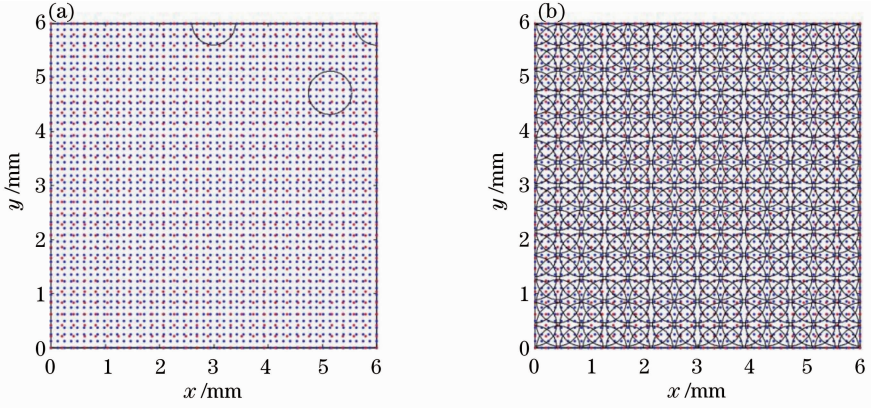


图 2 数据抽样分布示意图。(a)子区域所包含抽样点分布；(b)方形孔径数据抽样分布

Fig. 2 Distribution of sampling data. (a) Sampling points distribution in subdomains; (b) sampling data distribution in square aperture

度变化相对较大的区域在相应的子区域上变化相对平缓,因此能够对该子区域中的采样点进行高精度拟合。

## 2.2 自由曲面重构算法

从数学角度看,通常波前重构或者曲面拟合是用来解决单个、整体、大数据量的线性问题,对于上面所提的处理方法,类似于将整体分解为许多局部,即解决多个、局部、小数据量的线性问题,并能够保证整体计算精度。

图 2(b)中将整个孔径  $\Omega$  分解为  $L$  个子区域  $\Omega_i$ , 并满足  $\bigcup_{i=1}^L \Omega_i \supseteq \Omega$ , 其中任意一个子区域内含有  $n$  个采样点  $P_s(x, y), s = 1, 2, \dots, n$ ; 以及  $m$  个拟合评价点  $P_e(x, y), e = 1, 2, \dots, m$ 。在任一个子区域上, 曲面重构解析函数表示为基函数线性组合的形式:

$$f(P_s)_{\Omega_i} = \sum_{j=1}^K a_j Z_j(P_s), \quad (1)$$

式中基函数  $Z_j$  为正交多项式函数。根据子区域的形状, 可以采用 Zernike 多项式、Q 型多项式或 Chebyshev 多项式等。将整个方形孔径分解为多个圆形子域, 同时 Zernike 多项式在波前重构中具有很好的应用, 故采用正交完备的圆域 Zernike 多项式作为基函数。

$$\begin{cases} m \neq 0 & \begin{cases} Z_{\text{even } j}(\rho, \phi) = \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) \cos(m\phi) \\ Z_{\text{odd } j}(\rho, \phi) = \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) \sin(m\phi) \end{cases} \\ m = 0 & Z_j(\rho, \phi) = \sqrt{n+1} R_n^0(\rho) \end{cases}, \quad (2)$$

式中  $n, m$  为非负整数, 同时  $n - m \geq 0$  且为偶数。 $R_n^m(\rho)$  为单位圆域的径向多项式,  $\rho$  为归一化的半径。 $R_n^m(\rho)$  可表示为

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)! \left(\frac{n-m}{2} - k\right)!} \rho^{n-2k}. \quad (3)$$

将(1)式表示为矩阵形式:

$$\mathbf{Za} = \mathbf{f}, \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1(P_1) & Z_2(P_1) & \cdots & Z_K(P_1) \\ Z_1(P_2) & \cdots & \cdots & Z_K(P_2) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ Z_1(P_n) & \cdots & \cdots & Z_K(P_n) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(P_1) \\ f(P_2) \\ \vdots \\ f(P_n) \end{bmatrix},$$

通过最小二乘法获得拟合系数  $\mathbf{a}$  的最优解,

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Za} = \mathbf{Z}^T \mathbf{f}, \quad (5)$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{f}, \quad (6)$$

式中矩阵  $\mathbf{Z}^T$  为  $\mathbf{Z}$  的转置矩阵。

通常对整个曲面进行重构时, 采样数据量较大, 可能会导致矩阵  $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$  会出现奇异性, 使得采用上述最小二乘法无法得到拟合系数  $\mathbf{a}$  的最优化解。若将整个孔径分解为多个子区域时, 局部曲面梯度变化相对平缓, 子区域内采样点和拟合评价点的数量相对较少, 可以避免出现数值问题, 实现曲面高精度重构。同时子区域内采样点数量也不能少于基函数  $Z_j$  的个数, 后面会对采样点和拟合评价点数量与子区域数量之间的关系进行讨论。

对于每个子区域  $\Omega_i$ , 根据(6)式得到相应局部曲面的最佳拟合系数  $\mathbf{a}$ 。由各个子区域实现整个曲面的重构, 可对相邻子域重叠部分采用重叠平均值

法,也可对整个口径采用插值法。当子域数量较大以及子区域的重叠次数较多时,会降低计算效率,因此采用拟合评价点插值法。各个子区域 $\Omega_i$ 中拟合评价点 $P_e$ 处的拟合值 $f(P_e)$ 由(1)式计算得到,

$$f(P_e) = \sum_{j=1}^K a_j Z_j(P_e), \quad (7)$$

将所有局部评价拟合值叠加,形成整个曲面 $S_f$ <sup>[26]</sup>,

$$S_f = \sum_{e=1}^M f(P_e) \frac{\omega(P_e)}{\sum_{e=1}^M \omega(P_e)}, \quad (8)$$

式中 $\omega(P_e)$ 为权函数,表示每个子区域中拟合评价点 $f(P_e)$ 对整个曲面的贡献量,整个曲面上 $M$ 个拟合评价点的权函数和为1。

权函数 $\omega(\cdot)$ 为连续函数,具有紧支性,即在其支撑域(拟合评价点 $P_e$ 所在的圆域)范围内非负,支撑域以外区域为零。Wendland<sup>[27]</sup>紧支径向基函数可作为权函数:

$$\omega(P_e, P_o) = (1 - \epsilon \|P_o - P_e\|)_+^4 \times (4\epsilon \|P_o - P_e\| + 1), \quad (9)$$

式中 $\epsilon$ 为权函数的形因子,支撑圆域的半径为形因子的倒数, $P_o$ 为圆形子域的中心, $\|P_o - P_e\|$ 为拟合评价点 $P_e$ 到子区域中心 $P_o$ 的距离。Wendland紧支径向基函数可以根据给定数据的顺滑性来确定所采用径向基函数的顺滑性,如图3所示, $C^0$ 、 $C^2$ 、 $C^4$ 和 $C^6$ 分别表示不同紧支径向基函数的顺滑性,特别地, $C^0$ 在极值点处有突变;此外可根据实际拟合效果选择支撑域的大小,即图2(a)中圆形子域半径的大小,当所选择圆域过小时,其支撑域内的采样点和拟合评价点数量减少,拟合误差偏大,因此在自由曲面重构中要选取合适的支撑半径。

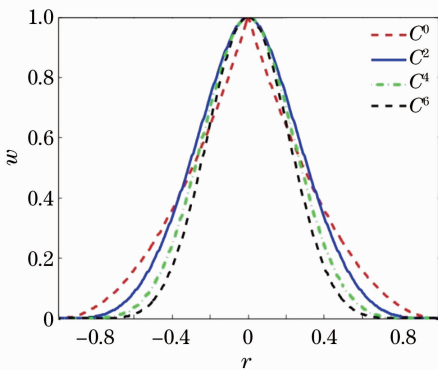


图3 不同顺滑性的Wendland紧支径向基函数  
Fig. 3 Wendland's compact supported radial basis functions with different smoothnesses

### 2.3 自由曲面重构流程

根据以上研究的自由曲面数据抽样方式和重构

算法,使得自由曲面局部特性和整体精度能够得到有效表征,自由曲面重构步骤如流程图4所示,具体为:

- 1) 将有效整体方形孔径区域分解为多个圆形子区域,在整个方形孔径中进行数据抽样,其中包含采样点、拟合评价点以及子区域的中心;
- 2) 计算每个子区域内的拟合评价点在整个区域内的权重,即每个拟合评价点的权函数值;
- 3) 对每个圆形子区域进行局部曲面重构,计算子区域内拟合评价点的最佳拟合值。其中采用kdtree数据结构的方式确定每个子区域内的采样点和用于整体曲面重构的拟合评价点,以提高计算效率;
- 4) 结合子区域的拟合评价值及其权重,高精度重构出整个自由曲面。

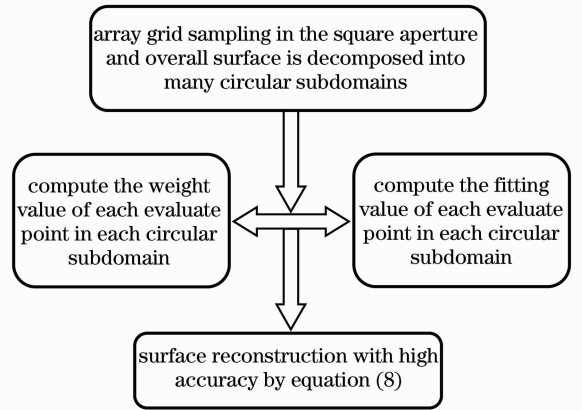


图4 自由曲面重构算法流程图

Fig. 4 Flow diagram of reconstruction algorithm of freeform surfaces

### 3 数值实验与结果分析

Kaya等<sup>[22-23]</sup>分别采用不同的数据抽样方式和不同的光学自由曲面数学描述方法进行了大量的数值实验,能够定量地分析各种数据抽样方式的适应性和不同数学描述方法的精度。根据所提曲面重构方法分别对球面、含有一个凸起的非球面、自由曲面1、自由曲面2和Franke<sup>[28]</sup>自由曲面进行重构分析,相应曲面的解析表达式分别为

$$f_{\text{sphere}}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)/200}{1 + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)/200^2}}, \quad (10)$$

$$f_{\text{asphere}}(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{80} +$$

$$0.6 \exp\{-0.49[(x+3)^2 + (y-2)^2]\}, \quad (11)$$



$$f_{\text{freeform1}}(x, y) = 10^{-2} \sin[\pi(x+1)] \sin \frac{3\pi(y+1)}{2}, \quad (12)$$

$$f_{\text{freeform2}}(x, y) = 3(1-x)^2 \exp[-x^2 - (y+1)^2] - 10 \left( \frac{x}{5} - x^3 - y^5 \right) \exp(-x^2 - y^2) - \frac{1}{3} \exp[-(x+1)^2 - y^2], \quad (13)$$

$$f_{\text{Franke}}(x, y) = 0.75 \exp\{-0.25[(9x-2)^2 + (9y-2)^2]\} + 0.75 \exp\{-[(9x+1)^2/49 + (9y+1)^2/10]\} + 0.5 \exp\{-0.25[(9x-7)^2 + (9y-3)^2]\} - 0.2 \exp\{-[(9x-4)^2 + (9y-7)^2]\}. \quad (14)$$

为了验证所提曲面重构方法的适应性和高精度,上述曲面重构对象包含轴对称曲面,局部变化的非球面以及非对称曲面。第一个重构对象是顶点曲率半径为 200 mm、相对孔径为 0.5 的球面;第二个重构对象为含有一个凸起、相对孔径为 1 的抛物面;

第三、四个重构对象为自由曲面,其解析函数分别为正弦函数和高斯函数;第五个重构对象为 Franke 自由曲面,在数值插值拟合中应用广泛。这 5 种不同类型的曲面如图 5 所示。

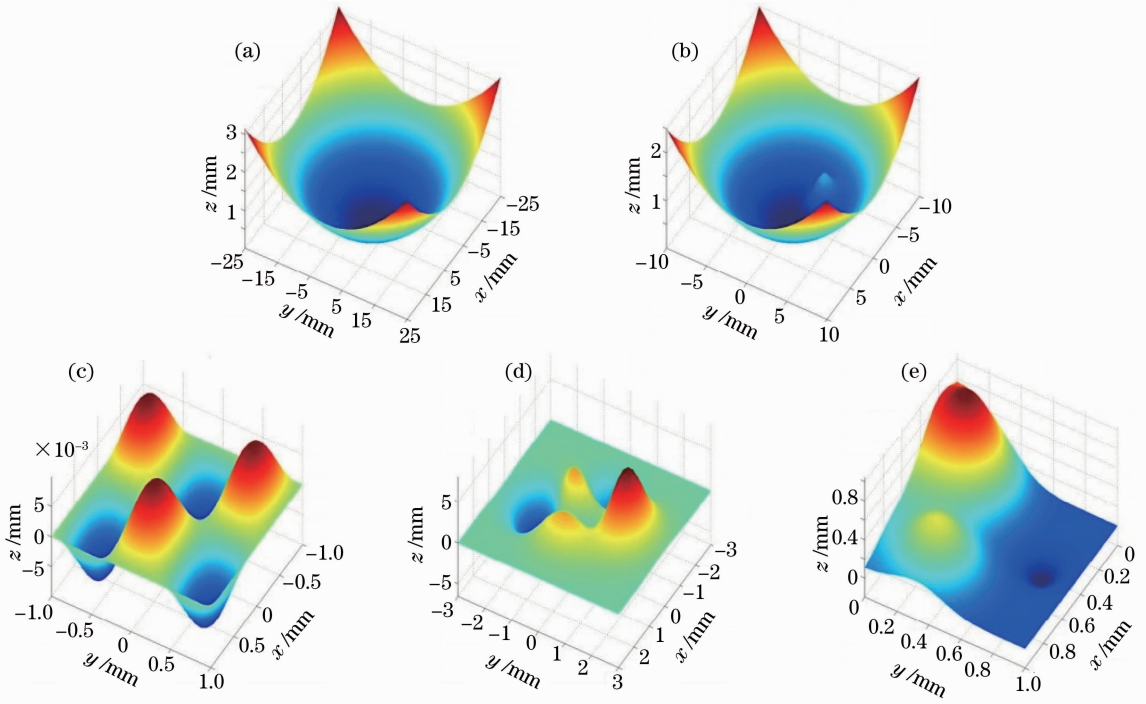


图 5 5 种不同类型的曲面。(a)球面;(b)含有一个凸起的非球面;(c)自由曲面 1;  
(d)自由曲面 2;(e) Franke 自由曲面

Fig. 5 Five different kinds of surface. (a) Sphere; (b) asphere with a bump; (c) freeform surface 1;  
(d) freeform surface 2; (e) Franke's freeform surface

在方域内进行均匀网格采样,采样点数量为  $200 \times 200$ ,拟合评价点数量为  $50 \times 50$ ,同时将整个区域分解为  $25 \times 25$  个具有部分重叠的圆形子区域。在圆形子区域中,局部曲面变化相对平缓,采用 37 项 Zernike 多项式作为子区域的拟合基底;在整个方形域上,采用具有  $C^2$  连续性的紧支径向基函数作为权函数,其形因子与支撑域的半径成反比关系,用以高精度重构整个自由曲面。分别采用均方根值

(RMS)和相对拟合误差值表示曲面重构精度。根据所提自由曲面重构算法对 5 个曲面重构对象分别进行拟合分析,如图 6~图 10 所示。

为了对比分析,采用 37 项 Zernike 多项式分别对球面和含有一个凸起的非球面进行曲面整体重构,即采用模式化方法。两种曲面整体重构误差如图 11 所示。

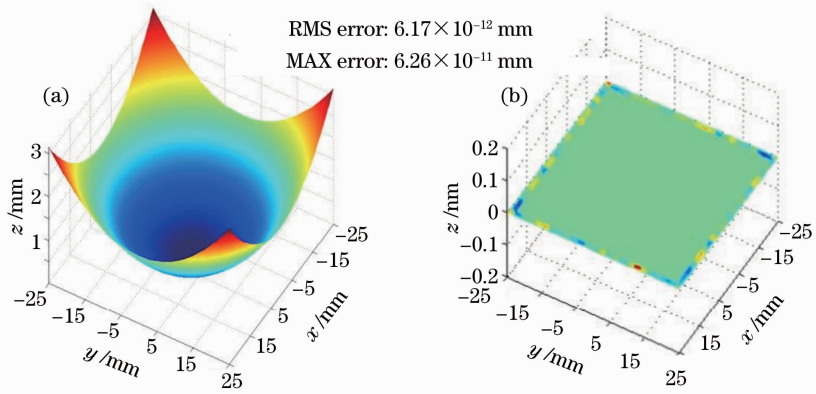


图 6 (a) 重构的球面及 (b) 其重构误差

Fig. 6 (a) Reconstructed sphere and (b) its reconstruction error

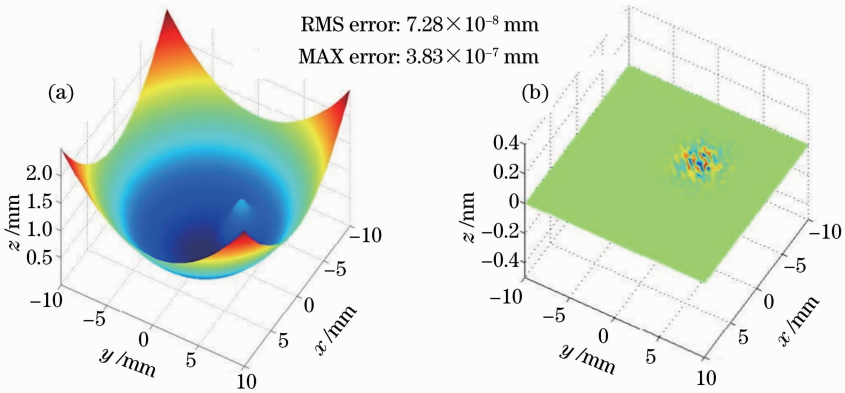


图 7 (a) 重构的含有一个凸起的非球面及 (b) 其重构误差

Fig. 7 (a) Reconstructed asphere with a bump and (b) its reconstruction error

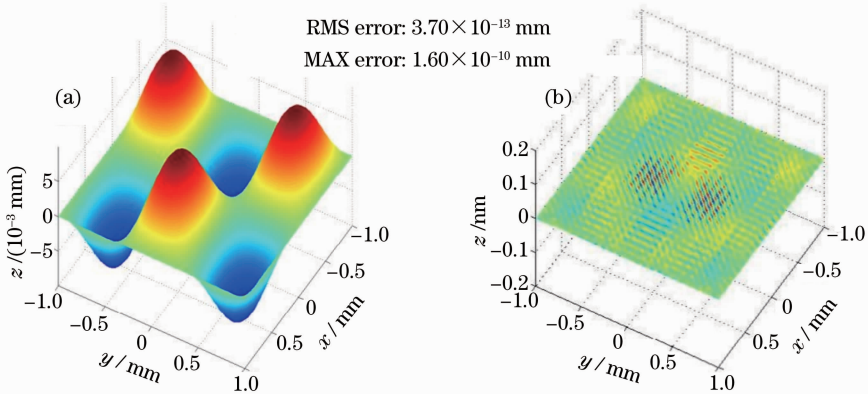


图 8 (a) 重构的自由曲面 1 及 (b) 其重构误差

Fig. 8 (a) Reconstructed freeform surface 1 and (b) its reconstruction error

由图 6(b)和图 11(a)对比分析得到,基于 Zernike 多项式和径向基函数的曲面重构方法(RMS 误差为  $6.17 \times 10^{-12}$  mm)对于常规旋转对称光学面具有很好的适应性,并且曲面重构精度相比于传统模式方法(RMS 误差为  $1.00 \times 10^{-10}$  mm)提高了两个数量级。图 11(b)针对含一个凸起的非球面,采用模式化的方法进行整体重构,重构误差较大(RMS 误差为

$0.0368$  mm),无法表征曲面的局部特性;图 7(b)和图 11(b)比较显示所提曲面重构方法(RMS 误差为  $7.28 \times 10^{-8}$  mm)能够很好地表征曲面局部特性,而且整个曲面的重构精度在纳米量级。图 6~图 10 中对于 5 种不同类型曲面,从常规旋转对称球面到不规则自由曲面,所提方法的重构误差 RMS 值优于纳米量级,验证了该曲面重构方法的适应性和高

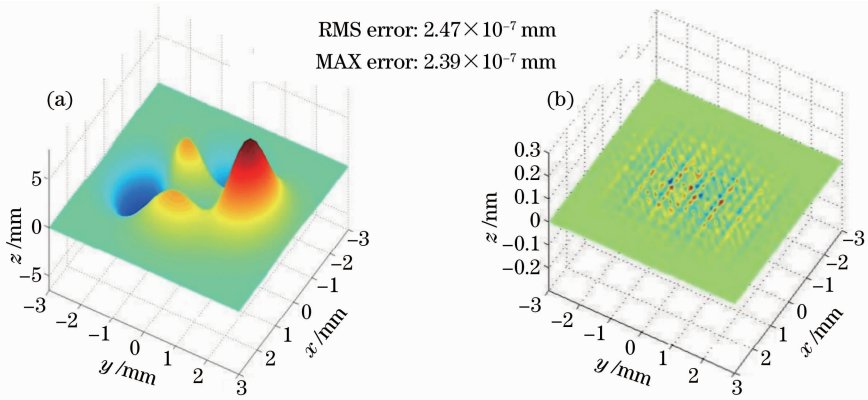


图 9 (a) 重构的自由曲面 2 及 (b) 其重构误差

Fig. 9 (a) Reconstructed freeform surface 2 and (b) its reconstruction error

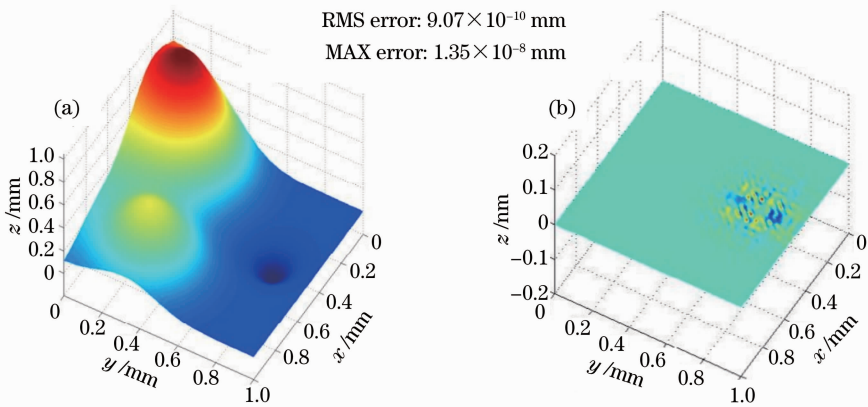


图 10 (a) 重构的 Franke 自由曲面及 (b) 其重构误差

Fig. 10 (a) Reconstructed Franke's freeform surface and (b) its reconstruction error

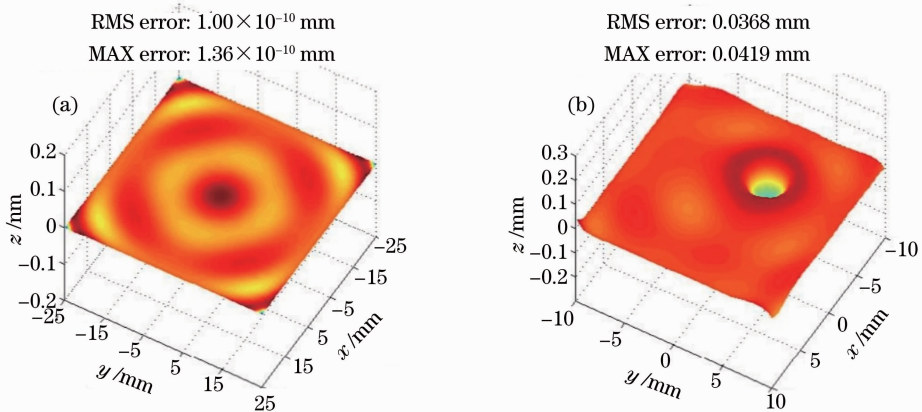


图 11 (a) 球面和 (b) 含有一个凸起的非球面的模式化法重构误差值

Fig. 11 Reconstructed error for (a) sphere and (b) asphere with a bump by modal method

精度, 可以应用于现代高精度光学制造和检测领域。

## 4 讨 论

根据所提及方形孔径中采样点数量和拟合评价点数量与子区域数量之间的关系对自由曲面重构精度的影响, 以 Franke 自由曲面为例, 在整个孔径范

围内采样点数量和拟合评价点数量保持不变, 改变子区域的数量, 曲面重构精度 RMS 值变化如图 12 所示。当子区域数量增加时, 即径向基函数支撑域半径减小, 导致子区域内的采样点减少, 无法得到局部曲面的最优拟合系数, 降低了曲面重构精度; 另一方面, 子区域数量相对较少时, 即支撑域半径过大,

局部子区域内形成过采样,也会导致重构精度的降低,因此在进行曲面分解时要能够保证拟合评价点和子区域数量相匹配。采用  $25 \times 25$  个子区域可达

到相对较好的重构效果,既没有数值问题,又能够保证很高的曲面重构精度。

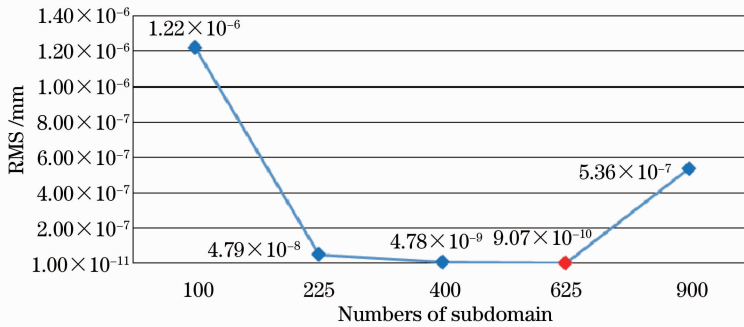


图 12 子区域数量与曲面重构精度的关系图

Fig. 12 Relationship of the number of subdomain and surface reconstruction accuracy

在数值实验中,注意到对于自由曲面而言,基于 Zernike 多项式和径向基函数的曲面重构方法在边缘区域重构较好,主要重构误差集中在内部梯度变化区域;对于轴对称光学面,虽然所提重构方法具有很高的重构精度,但是在方形域边缘区域重构效果相对一般,在内部区域重构效果很好。对于不同类型曲面比较分析可得:1)与曲面本征特性有关,含有一个凸起的抛物面相对于球面而言,曲面表面含有一个扰动,扰动区域的重构误差量级( $10^{-7}$  mm)要远大于边缘区域的误差量级( $10^{-11}$  mm),而在球面边缘孔径区域重构误差量级( $10^{-11}$  mm)要远大于球面内部区域的误差量级( $10^{-16}$  mm);2)曲面子区域重构基函数 Zernike 多项式起决定性作用,在方形孔径边缘子区域和直角子区域都不是完整的圆域,然而基函数 Zernike 多项式的函数变量是定义在单位圆形域上,所以球面边缘区域相对于内部区域而言重构效果一般。

## 5 结 论

针对光学自由曲面高精度重构问题,提出了基于 Zernike 多项式和径向基函数的自由曲面重构方法。在有效方形孔径内将整个曲面分解为多个含重叠区域的圆形子区域,在每个圆形子域中采用 Zernike 多项式作为基函数进行曲面局部拟合,然后利用径向基函数重构出整个曲面。该方法既能够有效表征自由曲面的局部变化情况,又保证了自由曲面的重构精度。通过对 5 种不同类型的曲面进行数值实验分析,所提重构方法的重构精度达到纳米量级,验证了该曲面重构方法的适应性和高精度,可以进一步应用于现代光学系统的制造和检测中。

## 参 考 文 献

- 1 K P Thompson, J P Rolland. Freeform optical surfaces: a revolution in imaging optical design [J]. *Opt Pho News*, 2012, 23(6): 30–35.
- 2 D Cheng, Y Wang, H Hua, *et al.*. Design of an optical see-through head-mounted display with a low  $F$ -number and large field of view using a freeform prism [J]. *Appl Opt*, 2009, 48(14): 2655–2668.
- 3 K Fuerschbach, J P Rolland, K P Thompson. A new family of optical systems employing  $\varphi$ -polynomial surfaces [J]. *Opt Express*, 2011, 19(22): 21919–21928.
- 4 R R Shannon, J C Wyant. *Applied Optics and Optical Engineering VIII* [M]. San Diego: Academic Press, 1980.
- 5 R J Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence [J]. *J Opt Soc Am*, 1976, 66(3): 207–211.
- 6 G W Forbes. Characterizing the shape of freeform optics [J]. *Opt Express*, 2012, 20(3): 2483–2499.
- 7 O Cakmakci, Sophie Vo, H Foroosh, *et al.*. Application of radial basis functions to shape description in a dual-element off-axis magnifier [J]. *Opt Lett*, 2008, 33(11): 1237–1239.
- 8 J E Stacy. Asymmetric spline surfaces: characteristics and applications [J]. *Appl Opt*, 1984, 23(16): 2710–2714.
- 9 Li Yun, Xing Yanwen. Surface error of optical components extended with non-uniform rational B-spline surface [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(7): 0722001.  
李 云, 邢廷文. 采用非均匀有理 B 样条曲面延展光学元件面形误差[J]. *光学学报*, 2012, 32(7): 0722001.
- 10 G D Wassermann, E Wolf. On the theory of aplanatic aspheric systems [J]. *Proc Phys Soc B*, 1949, 62(1): 2–8.
- 11 Wang Chao, Zhang Xin, Qu Hemeng, *et al.*. Design of novel catadioptric elliptical dome optical system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(8): 0822002.  
王 超, 张 新, 曲贺盟, 等. 新型折反射式椭球形整流罩光学系统的设计[J]. *光学学报*, 2012, 32(8): 0822002.
- 12 D Cheng, Y Wang, H Hua. Free form optical system design with differential equations [C]. *SPIE*, 2010, 7849: 78490Q.
- 13 R Winstling, W Zhang. Novel aplanatic designs [J]. *Opt Lett*, 2009, 34(19): 3018–3019.
- 14 J C Miñano, P Benitez, L Wang, *et al.*. An application of the SMS method for imaging designs [J]. *Opt Express*, 2009, 17(26): 24036–24044.
- 15 Zhang Hang, Liang Xue, Yan Jinhua, *et al.*. Compound parabolic concentrator-simultaneous multiple surfaces design



- methods for LED collimators [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(9): 0922004.
- 张航, 梁雪, 严金华, 等. LED 准直器设计中复合抛物面同步多曲面方法 [J]. *光学学报*, 2012, 32(9): 0922004.
- 16 V N Chekal, Y I Chudakov, S E Shevtsov. The use of coordinate-measurement machines to optimize the technology of automatic shaping of optical surfaces [J]. *J Opt Tech*, 2008, 25(11): 755—759.
- 17 J E Greivenkamp, R O Gappinger. Design of a nonnull interferometer for aspheric wave fronts [J]. *Appl Opt*, 2004, 43(27): 5143—5151.
- 18 H Shen, R Zhu, Z Gao, *et al.*. Design and fabrication of computer-generated holograms for testing optical freeform surfaces [J]. *Chin Opt Lett*, 2013, 11(3): 032201.
- 19 Shen Hua, Li Jia, Zhu Rihong, *et al.*. Design of non-null interferometer based on point source array for testing freeform surface [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(12): 1222003.
- 沈华, 李嘉, 朱日红, 等. 基于点源阵列的自由曲面非零位干涉检测系统设计方法 [J]. *光学学报*, 2013, 33(12): 1222003.
- 20 W H Southwell. Wave-front estimation from wave-front slope measurements [J]. *J Opt Soc Am*, 1980, 70(8): 998—1006.
- 21 M Ares, S Royo. Comparison of cubic B-spline and Zernike-fitting techniques in complex wavefront reconstruction [J]. *Appl Opt*, 2006, 45(27): 6954—6964.
- 22 I Kaya, K P Thompson, J P Rolland. Edge clustered fitting grids for  $\varphi$ -polynomial characterization of freeform optical surfaces [J]. *Opt Express*, 2011, 19(27): 26962—26974.
- 23 I Kaya, K P Thompson, J P Rolland. Comparative assessment of freeform polynomials as optical surface descriptions [J]. *Opt Express*, 2012, 20(20): 22683—22691.
- 24 Wang Qingfeng, Cheng Dewen, Wang Yongtian. Description of free-form optical curved surface using two-variable orthogonal polynomials [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(9): 0922002.
- 王庆丰, 程德文, 王涌天. 双变量正交多项式描述光学自由曲面 [J]. *光学学报*, 2012, 32(9): 0922002.
- 25 W Cheng, M Chen. Transformation and connection of subapertures in the multiaperture overlap-scanning technique for large optics tests [J]. *Opt Eng*, 1993, 32(8): 1947—1950.
- 26 H Wendland. Fast evaluation of radial basis functions; methods based on partition of unity [C]. *Approximation Theory X: Wavelets, Splines, and Applications*, 2002. 473—483.
- 27 H Wendland. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree [J]. *Advances in computational Mathematics*, 1995, 4(1): 389—396.
- 28 R Franke. *A Critical Comparison of Some Methods for Interpolation of Scattered Data [R]*. Naval Postgraduate School, Monterey, California, 1979.

栏目编辑：韩峰