

基于方形域内标准正交矢量多项式的波前重建

李萌阳¹ 李大海¹ 赵霖文¹ 章 辰¹ 王琼华^{1,2}

¹ 四川大学电子信息学院, 四川 成都 610065
² 四川大学视觉合成图形图像技术国家重点学科实验室, 四川 成都 610064

摘要 获得了一组方形域内标准正交的矢量多项式集, 可以用于方形域内图像畸变映射及波前梯度等矢量数据的拟合。这组矢量多项式是用 Gram-Schmidt 方法将泽尼克梯度多项式标准正交化后得到的。由该矢量函数拟合被测波前斜率, 拟合系数经过简单的线性变换就可以直接得到用泽尼克多项式描述的波前, 获得被测波前的相位信息。实验结果表明, 该矢量集可以对夏克哈特曼传感器测得的方形孔径内的斜率进行很好的拟合。这种矢量拟合重构方法能获得很好的被测波前, 具有与 Southwell 区域法相同的精度。

关键词 测量; 波前重建; 方形域; 矢量多项式; 泽尼克多项式; 夏克哈特曼波前传感器

中图分类号 TP247 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201434.0712007

Wavefront Reconstruction Based on Standard Orthonormal Vector Polynomials in a Square Area

Li Mengyang¹ Li Dahai¹ Zhao Jiwen¹ Zhang Chen¹ Wang Qionghua^{1,2}

¹ School of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610065, China
² State Key Laboratory of Fundamental Science on Synthetic Vision, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China

Abstract A new set of orthonormal vector polynomials in a square area, which can be used in image distortion mapping and wavefront gradient vector datum fitting, is derived. These vector polynomials are developed from the gradients of the circular Zernike polynomials orthonormalization by using Gram-Schmidt technique. When the slope is fitted by these vector polynomials, the fitting coefficients can be derived and transformed to the wavefront description of the Zernike polynomials mode by using a linear transform, and the phase information is then extracted. Experimental results show that the slope data from Shack-Hartmann wavefront sensor over a square area are well fitted by these vector polynomials. The vector polynomial wavefront reconstruction method can reconstruct the tested wavefront quite well and achieve the same accuracy as Southwell zonal method does.

Key words measurement; wavefront reconstruction; square area; vector polynomials; Zernike polynomials; Shack-Hartmann wavefront sensor

OCIS codes 120.5050; 010.1080; 220.4840

1 引 言

激光光束质量诊断^[1]、非球面的高精度干涉检测^[2]和人眼视觉检测^[3]等光学检测通常会使用如夏克哈特曼(S-H)波前传感器^[4]这样的斜率测量仪

器,并根据测量出的波前相位梯度数据来重建波前。波前重建有助于获得被测光束的相位分布、被测元件的表面面型^[5]甚至系统的装配情况,从而可以对光学元件或系统进行分析和改进。通常波前重建的

收稿日期: 2013-10-20; 收到修改稿日期: 2013-11-13

基金项目: 国家 973 计划(2013CB328802)、国家自然科学基金(61377018)

作者简介: 李萌阳(1989—),女,博士研究生,主要从事波前检测方面的研究。E-mail: limengyang200800@163.com

导师简介: 李大海(1968—),男,教授,博士生导师,主要从事光学信息处理、波前传感、三维立体显示等方面的研究。

E-mail: lidahai@scu.edu.cn(通信联系人,中国光学学会会员号: S040m632)

方法有模式法^[6]和区域法^[7-9]两种。在模式法中,被测波前相位是由一组标准正交多项式作为基函数表示的;而区域法则是通过被测区域内相邻点的测量数据来估计相位点的值。两种波前重建方法都使用了最小二乘法进行数据处理,但模式法更加快速简便^[10]。

模式法中用于拟合斜率数据的矢量多项式集有很多种,如由勒让德多项式^[10-11]或傅里叶级数^[12]构建的矢量集、泽尼克梯度矢量多项式^[13]及 Karhunen-Loève 函数梯度^[14]等。由于泽尼克多项式与像差的对应关系,为了便于进行光学分析,排除勒让德多项式和傅里叶级数,采用与泽尼克多项式相关的矢量多项式。但由于泽尼克梯度矢量多项式和 Karhunen-Loève 函数梯度多项式在被测波前轮廓内不具有正交性,这将会导致模式间的交叉耦合^[6-15]和噪声传播^[16]等问题。基于上述情况,Arizona 大学求得了一组与泽尼克多项式有线性关系的在单位圆内的正交的矢量多项式集^[17-18],并将其应用在 8.4 m 大型天文望远镜系统^[19-20]的加工检测及干涉仪补偿测试中图像畸变的校正中^[21]。由于光学系统的不同光瞳形状需要不同的正交矢量多项式,所以另外求得了一组在方形域内正交的矢

量多项式集作为斜率数据拟合的基函数。

Gavrielides^[22]曾提出过一种获得与泽尼克梯度正交的矢量多项式的方法,但得到的矢量多项式之间并不正交。而本文采用 Zhao 等^[17]的方法,摒弃复杂的数学公式推导,从泽尼克梯度多项式在方形域内的内积积分入手,使用 Gram-Schmidt 正交化方法^[23],得到了一组在单位方形中标准正交的矢量多项式集。显然,它是由泽尼克梯度多项式线性变换得到的,而同时泽尼克梯度多项式与泽尼克多项式之间也是线性关系,这样就可以通过线性变换,直接将测得的波前斜率数据转换为泽尼克多项式表示的波前,得到被测波前的泽尼克多项式分解形式。

2 方形域内标准正交的矢量多项式及波前重构

泽尼克多项式有多种序数标记方法,在此使用的是 Noll 的标号法,在极坐标下定义其表达式通式为

$$Z_i(r, \theta) = R_n^m(r) \Theta_n^m(\theta), \quad (1)$$

式中

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2 - s]! [(n-m)/2 - s]!} r^{n-2s},$$

$$\Theta_n^m(\theta) = \begin{cases} \sqrt{2(n+1)} \cos m\theta, & m \neq 0 \text{ (Zernike even term)} \\ \sqrt{2(n+1)} \sin m\theta, & m \neq 0 \text{ (Zernike odd term)}, \\ \sqrt{(n+1)}, & m = 0 \end{cases}$$

下标 i 是泽尼克多项式的序数, n 代表了径向坐标 r 的幂级数, m 是方位角频率, 并且 n 和 m 之间满足 $m \leq n$ 且 $n-m$ 是偶数。

要得到方形域内的矢量多项式, 首先求得泽尼克多项式的梯度多项式(用 ∇Z 表示)。文献^[17]中已经得出 ∇Z 是泽尼克多项式的线性组合, 并且在单位圆内没有正交性。那么, 定义单位方域内的两个泽尼克梯度矢量多项式 ∇Z_i 和 ∇Z_j 的内积为

$$(\nabla Z_i, \nabla Z_j) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\nabla Z_i \cdot \nabla Z_j) dx dy. \quad (2)$$

将所有泽尼克梯度函数两两的内积计算结果写成一个内积矩阵, 其中的部分矩阵如表 1 所示(表格是关于对角线对称的, 表中只列出了下三角的数据, 且只

显示了非零元素)。由于表中所列的内积矩阵并非对角矩阵, 所以泽尼克梯度多项式在方形域内也不具有正交性。

使用 Gram-Schmidt 正交化方法, 将泽尼克梯度多项式进行正交变换, 构造一组新的在方形域内正交的矢量多项式(其如表 1 形式的内积是对角的, 文中不再列出), 作为方形域内分解矢量函数的基底函数。由于 $\nabla Z_1 = 0$, 所以在构造新基底时不予使用。为了与泽尼克多项式的序数相对应, 这组基底函数的第一个多项式下标取为 2。这组矢量多项式(用 \mathbf{R} 表示)与泽尼克梯度多项式有线性关系, 该关系的前 12 项为

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_2 &= 0.25 \nabla Z_2, & \mathbf{R}_8 &= -0.1443 \nabla Z_2 + 0.051 \nabla Z_8, \\
\mathbf{R}_3 &= 0.25 \nabla Z_3, & \mathbf{R}_9 &= 0.0442 \nabla Z_3 - 0.0156 \nabla Z_7 + 0.0781 \nabla Z_9, \\
\mathbf{R}_4 &= 0.0884 \nabla Z_4, & \mathbf{R}_{10} &= -0.0442 \nabla Z_2 + 0.0156 \nabla Z_8 + 0.0781 \nabla Z_{10}, \\
\mathbf{R}_5 &= 0.125 \nabla Z_5, & \mathbf{R}_{11} &= -0.0965 \nabla Z_4 + 0.0288 \nabla Z_{11}, \\
\mathbf{R}_6 &= 0.125 \nabla Z_6, & \mathbf{R}_{12} &= -0.1074 \nabla Z_6 + 0.0462 \nabla Z_{12}, \\
\mathbf{R}_7 &= -0.1443 \nabla Z_3 + 0.051 \nabla Z_7, & \mathbf{R}_{13} &= -0.114 \nabla Z_5 + 0.026 \nabla Z_{13}.
\end{aligned} \tag{3}$$

表 1 前 13 项泽尼克梯度多项式的内积矩阵

Table 1 List of inner products of first 13 Zernike gradient polynomials

Inner product	∇Z_i												
∇Z_j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0												
2	0	4											
3	0		4										
4				32									
5					16								
6						16	←	$(\nabla Z_6, \nabla Z_6) = 16$					
7			$8\sqrt{2}$				128						
8		$8\sqrt{2}$						128					
9							$\frac{96}{5}$		$\frac{224}{5}$				
10								$-\frac{96}{5}$		$\frac{224}{5}$			
11				$\frac{416}{\sqrt{15}}$							$\frac{4640}{7}$		
12						$\frac{144}{\sqrt{15}}$	←	$(\nabla Z_6, \nabla Z_{12}) = \frac{144}{\sqrt{15}}$				$\frac{1472}{7}$	
13					$\frac{272}{\sqrt{15}}$								$\frac{4752}{7}$

可以看出, \mathbf{R} 矢量多项式的第 i 项 \mathbf{R}_i 是 ∇Z 梯度多项式的第 $2 \sim i$ 项中某几项的线性组合, 但 \mathbf{R} 与 ∇Z 之间并没有明显的递推关系, 所以用(3)式中线性方程组的形式表示它们之间的关系, 写成矩阵形式有 $\mathbf{R} = \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \nabla Z$, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1$ 是下三角方阵, \mathbf{R} 与 ∇Z 都是列向量, 将它们都变为行向量, 即将等式两边的矩阵转置, 得到

$$\mathbf{R} = \nabla Z \cdot \boldsymbol{\beta}, \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1^T$, $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1$ 的转置矩阵, 表示齐次线性方程组的系数矩阵, 它是一个上三角方阵。同时, 又由于 ∇Z 与泽尼克多项式也有线性关系, 这样 \mathbf{R} 矢量多项式就可以表示成泽尼克多项式的函数, 那么其前 12 项可以写成

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_2 &= 0.5iZ_1, & \mathbf{R}_3 &= 0.5jZ_1, & \mathbf{R}_4 &= 0.3062(iZ_2 - jZ_3), \\
\mathbf{R}_5 &= 0.3062(iZ_3 - jZ_2), & \mathbf{R}_6 &= 0.3062(iZ_2 + jZ_3), \\
\mathbf{R}_7 &= 0.1768iZ_5 + \mathbf{j}(0.1443Z_1 - 0.25Z_4 + 0.1768Z_6), \\
\mathbf{R}_8 &= \mathbf{i}(-0.1443Z_1 + 0.25Z_4 + 0.1768Z_6) - 0.1768jZ_5, \\
\mathbf{R}_9 &= 0.2165iZ_5 + \mathbf{j}(-0.0442Z_1 + 0.0765Z_4 - 0.3248Z_6), \\
\mathbf{R}_{10} &= \mathbf{i}(-0.0442Z_1 + 0.0765Z_4 + 0.3248Z_6) - 0.2165jZ_5, \\
\mathbf{R}_{11} &= \mathbf{i}(-0.2058Z_2 + 0.1819Z_8) + \mathbf{j}(0.2058Z_3 - 0.1819Z_9), \\
\mathbf{R}_{12} &= \mathbf{i}(-0.1169Z_2 + 0.2067Z_8 + 0.2067Z_{10}) + \mathbf{j}(-0.1169Z_3 + 0.2067Z_7 - 0.2067Z_9), \\
\mathbf{R}_{13} &= \mathbf{i}(-0.971Z_3 + 0.1162Z_7 + 0.1162Z_9) + \mathbf{j}(0.1971Z_2 - 0.1162Z_8 + 0.1162Z_{10}),
\end{aligned} \tag{5}$$

式中 i, j 分别表示 x 和 y 方向的单位方向向量。图 1 依次列出了前 12 项 \mathbf{R} 矢量多项式对应的矢量图。

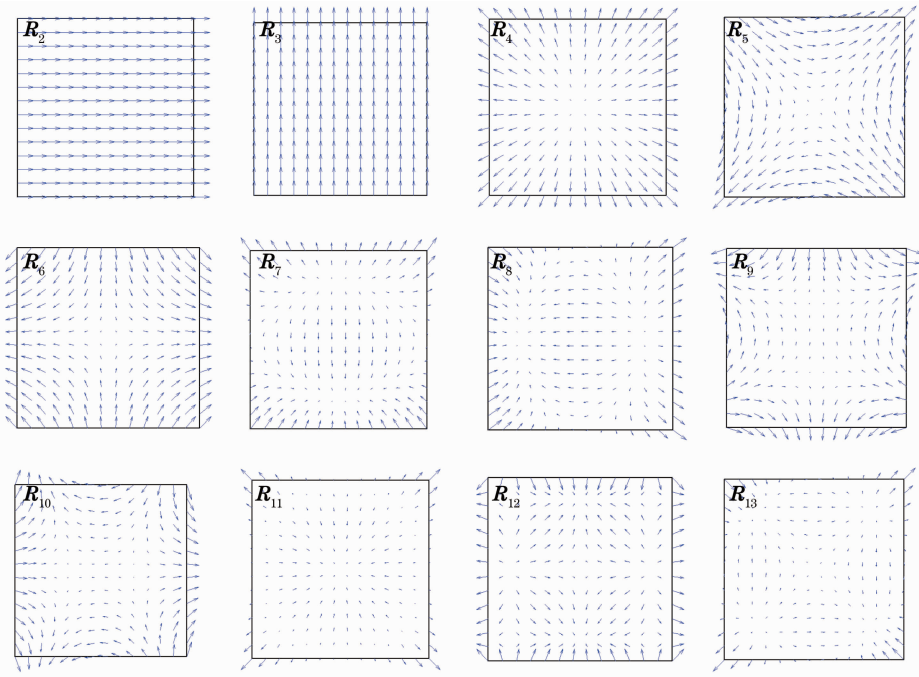


图1 单位方域内的前12项 \mathbf{R} 矢量多项式的矢量图

Fig.1 Vector maps of the first 12 \mathbf{R} polynomials in a unit square

\mathbf{R} 矢量多项式作为正交基底函数,遍布了单位方域内的矢量分布空间,所以该矢量空间中的某个矢量分布 $\mathbf{V}(x, y)$ 可以用 \mathbf{R} 矢量多项式进行分解,写成矩阵形式有

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \quad (6)$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矢量函数的拟合系数向量,可由最小二乘法得到。由于 \mathbf{R} 矢量多项式的正交性,所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 是唯一确定的,不存在模式耦合,且结果值精度更高。 \mathbf{V} 是用光学测量仪器得到的斜率数据,此外也可以是图像畸变映射。

由于光学系统的被测波前总是趋于光滑连续的,所以从数学上看,波前斜率函数 $\mathbf{V}(x, y)$ 都可以看作是某个波前函数 $\Phi(x, y)$ 的梯度函数,即 $\mathbf{V}(x, y) = \nabla\Phi(x, y)$, 或者表示为

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi. \quad (7)$$

显然地, \mathbf{R} 矢量多项式也可以看作是某个标量函数 ϕ 的梯度多项式,即 $\mathbf{R}_i = \nabla\phi_i$, 或

$$\mathbf{R} = \nabla\phi. \quad (8)$$

将(4)式代入(8)式,等号两边积分,得到标量函数 ϕ 与泽尼克多项式之间的矩阵关系为

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\beta}, \quad (9)$$

式中 $\boldsymbol{\phi}, \mathbf{Z}$ 为对应于 $\nabla\phi$ 和 $\nabla\mathbf{Z}$ 的矩阵。将(7)、(8)式代入(6)式,得到被测波前 Φ 和标量函数 ϕ 之间的关系为

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \quad (10)$$

式中 $\boldsymbol{\Phi}$ 为对应于 $\nabla\Phi$ 的矩阵。而被测波前 Φ 若用

标准泽尼克模式分解,得到

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \quad (11)$$

将(9)、(11)式代入(10)式,得

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (12)$$

一旦选定 \mathbf{R} 矢量多项式的项数,系数矩阵 $\boldsymbol{\beta}$ 也就确定了;这样,获得了波前斜率分布数据后,就可以用(6)式求得斜率拟合系数向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 。再利用(12)式就可以简单快速地得到被测波前的泽尼克模式分解系数 $\boldsymbol{\gamma}$ 。这个方法对用被测的波前斜率数据重构出波前这样的问题有很好的效果,下面分别用模拟和实际实验两方面的结果对比 Southwell 区域法波前重建结果来予以说明。

3 实 验

3.1 模拟实验

在模拟实验中,在计算机中建立了一个方形的有 11×11 个子透镜阵列的 S-H 波前传感器的工作模型。该模型中 S-H 传感器的子透镜直径 $D = 620 \mu\text{m}$, 子透镜的焦距 $f = 130 \text{ mm}$ 。将菲涅耳波带看作子透镜,利用衍射原理就可以计算出光线经过子透镜后在焦平面的焦斑分布。波前经过 S-H 传感器的透镜阵列后在 CCD 焦平面产生焦斑阵列,这些焦斑可以认为是在 CCD 平面的光线像差,光线像差与波前像差的斜率成比例关系。得到畸变波前对应的焦斑的质心坐标 $(x_{\text{dis}}, y_{\text{dis}})$ 与参考波前对应的

质心坐标 $(x_{\text{ref}}, y_{\text{ref}})$,可以求得畸变波前被阵列透镜分割的子孔径范围内波前的平均斜率,斜率在 x 和 y 方向分量 S_x 和 S_y 分别为

$$S_x = \frac{x_{\text{dis}} - x_{\text{ref}}}{f}, S_y = \frac{y_{\text{dis}} - y_{\text{ref}}}{f}. \quad (13)$$

$$W(x, y) = -7.15(x^2 + y^2) + 0.68(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) + 8.22x^2 + 0.2(x^4 + x^2y^2) + 7.94x - 4.61(x^3 + xy^2). \quad (14)$$

该畸变波前经 S-H 的微透镜阵列后在 CCD 所在的焦平面上形成焦斑阵列,即畸变焦斑图,如图 2(a)所示。同样地,将平面波前所形成的焦斑阵列作为参考焦斑图。根据焦斑图,就可以计算出各个焦斑的质心坐标,求出畸变焦斑的质心相对于参考焦斑质心的相对偏移量 $(x_{\text{dis}} - x_{\text{ref}}, y_{\text{dis}} - y_{\text{ref}})$,将其归一化到单位方形中,从而利用(13)式得到波前的平均斜率矢量如图 2(b)所示,图中斜率矢量的最大长度为 1.5×10^{-3} ,峰谷(PV)值为 1.519×10^{-3} ,均方根

这样 S_x 与 S_y 便构成了方域内矢量空间中斜率矩阵 V 。

模拟中,假设入射到 S-H 传感器子透镜阵列的畸变波前相位为

(RMS)值为 3.498×10^{-4} 。将该斜率矢量代入(6)式,用 R 矢量多项式进行拟合,得到拟合系数 α 。计算出拟合结果的残差,如图 2(c)所示,其数量级为 10^{-5} ,PV 值为 1.402×10^{-5} ,RMS 值为 3.024×10^{-6} 。

获得了拟合系数 α 后,用(12)式就可以算出泽尼克分解波前的系数 γ 。然后就可以重构出(14)式中模拟的波前 $W(x, y)$,如图 3(a)所示,PV 值为 2.885λ ,RMS 值为 0.599λ 。

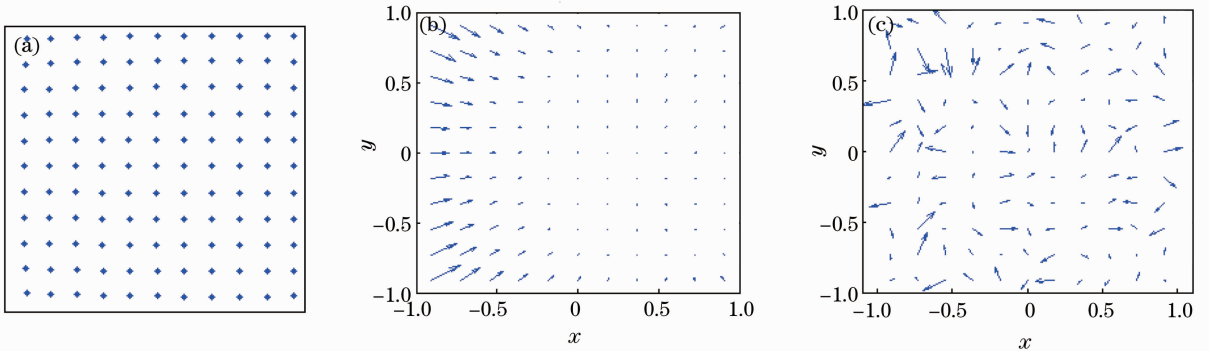


图 2 模拟结果。(a)畸变焦斑图;(b)斜率图;(c)斜率拟合残差图

Fig. 2 Simulation results. (a) Distorted focus spot map; (b) slope map; (c) residual slope map

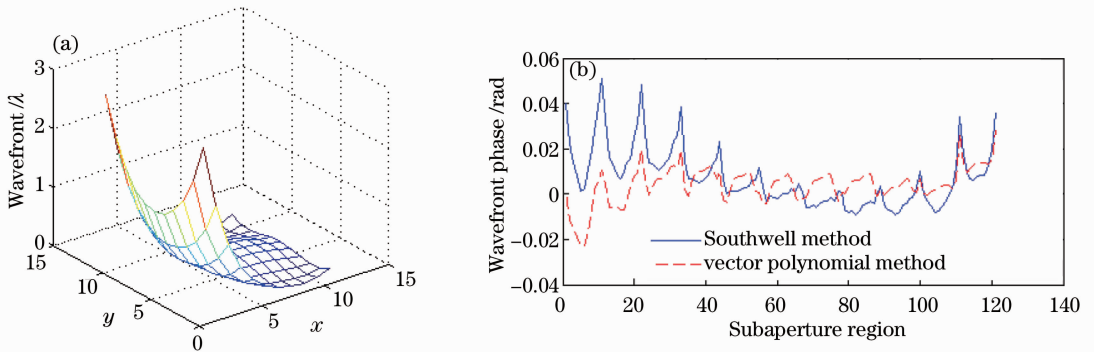


图 3 模拟结果。(a)矢量多项式法重构的波前;(b)重构波前的残差

Fig. 3 Simulation results. (a) Reconstructed wavefront by vector polynomial method; (b) residual errors of the reconstructed wavefronts

为了说明这种矢量多项式方法重构波前的精度,用 Swallow 区域法进行对比。图 3(b)中的虚线和实线分别表示矢量多项式法和 Swallow 法重构出的

波前在 121 个子孔径区域上的残差,其 RMS 值分别为 0.008λ 和 0.013λ ,其中波长 λ 为 632.8 nm 。从图 3(b)可以看出,两种方法的误差精度都达到 0.01λ ,而

且矢量多项式法的重构结果略优于 Southwell 法。

3.2 实际实验

图 4 是根据 S-H 传感器的工作原理搭建的实验装置的示意图。其中菲涅耳波带板相当于 S-H 传感器的透镜阵列,每个子孔径区域直径 $D=825\ \mu\text{m}$,焦

距 $f=11.45\ \text{mm}$,焦平面位于 CCD 靶面上。CCD 像素为 $576\ \text{pixel}\times 768\ \text{pixel}$,共拍摄有 9×12 个子孔径,易知每个子孔径区域在 CCD 上对应的成像区域为 $64\ \text{pixel}\times 64\ \text{pixel}$ 。激光器产生的激光波长 $\lambda=632.8\ \text{nm}$ 。

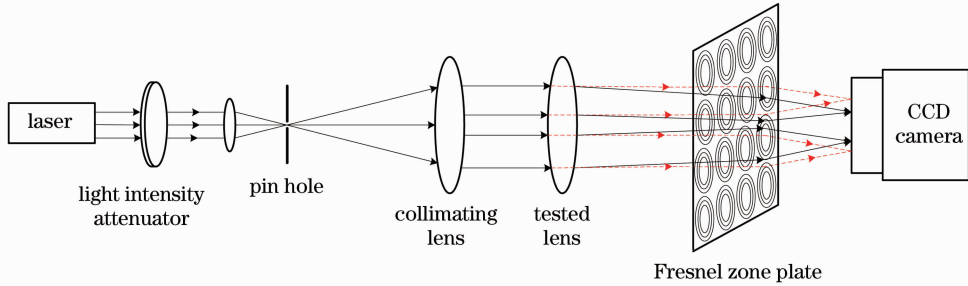


图 4 实验装置示意图

Fig. 4 Schematic of experimental setup

实验时,激光的光强被一个光强衰减片衰减到适当的强度,经过一个针孔滤波器后,滤去杂光,然后通过准直透镜,变成准直光束,即平面波前。当准直光束经过菲涅耳波带后,就在 CCD 靶面上产生焦斑,该过程如图 4 中的虚线所示。平面光波所形成的焦斑被作为参考光斑图。随后,在准直透镜和菲涅耳波带中间的适当位置加入一个被测正透镜,准直光束就变成了有较小光焦度的会聚光束,即畸变波前,该过程如图 4 中被测透镜后的实线所示。此时所形成的焦斑为畸变光斑,如图 5(a)所示。

根据参考光斑图、畸变光斑图、实验装置的结构参数及(13)式,就可以求得畸变波前斜率数据,如图 5(b)所示,可以看出斜率长度的 PV 值为 0.037,

RMS 值约为 0.008。用 37 项 R 矢量多项式对该斜率值进行拟合,得到拟合系数 α ,并求出斜率拟合结果与被拟合的斜率之差,如图 5(c)所示,它的长度 PV 值为 0.0066,RMS 值约为 0.0015。

利用(12)式重构出畸变波前,如图 6(a)所示,PV 值为 60.59λ ,RMS 值为 14.67λ 。同样将畸变波前斜率数据代入 Southwell 区域法迭代计算,也得到重构的畸变波前,如图 6(b)所示,PV 值为 60.99λ ,RMS 值为 14.71λ 。将两种方法得到的重构结果相减,得到的结果如图 6(c)所示,图中差值的 PV 值为 1.34λ ,RMS 值为 0.26λ 。因此可以得出矢量多项式波前重构法与 Southwell 波前重构有相同的精度。

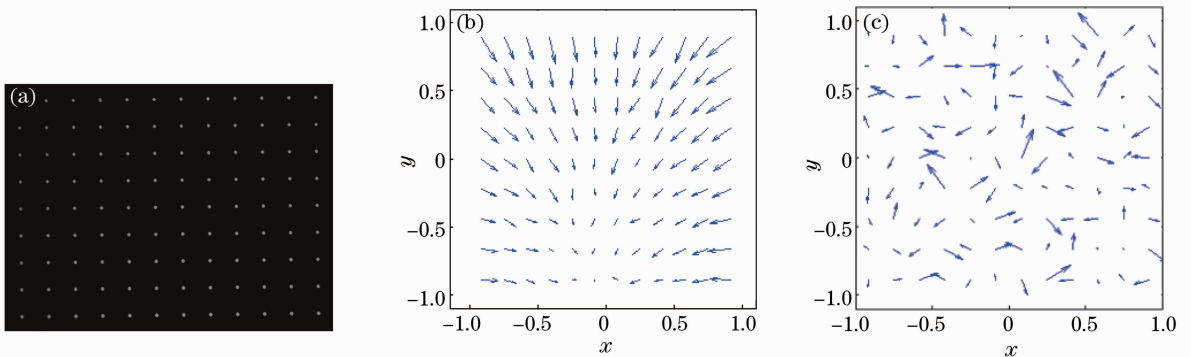


图 5 实验结果。(a)畸变焦斑图;(b)斜率图;(c)斜率拟合残差图

Fig. 5 Experimental results. (a) Distorted focus spot map; (b) slope map; (c) residual slope map

4 结 论

获得了一组在方形域内标准正交的矢量多项式,它是泽尼克梯度多项式的线性组合,可以作为方

域内的矢量基底函数,拟合 S-H 波前传感器中的斜率数据,并通过各种线性变换关系,直接把斜率拟合系数转换为用标准泽尼克模式分解的波前。这种矢

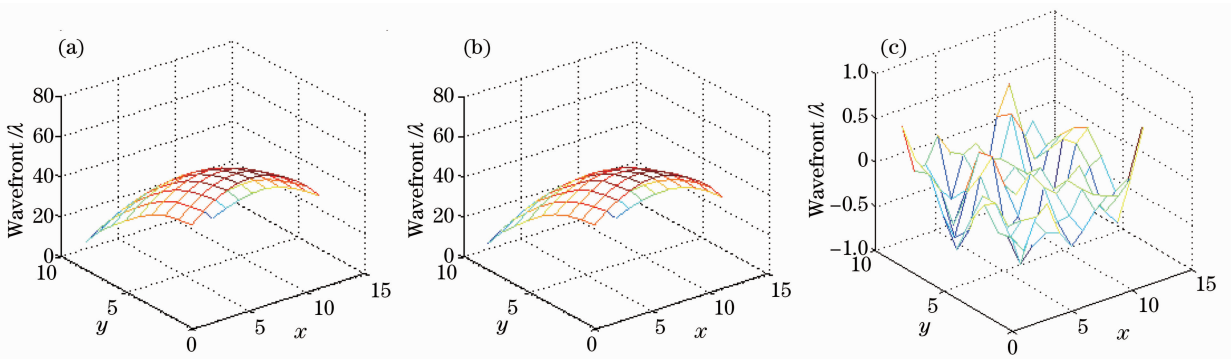


图6 波前重构结果。(a)矢量多项式法;(b)Southwell法;(c)两种方法重构结果之差

Fig. 6 Wavefront reconstruction results. (a) Vector polynomial method; (b) Southwell method; (c) difference of the two reconstruction results

量多项式重构波前的方法同 Southwell 波前重构方法有相同的拟合精度,拟合效果略优于 Southwell 方法,有更小的波前估计误差。该方法在处理斜率数据或映射畸变的光学检测中有很好的应用。

参 考 文 献

- Liu Minshi, Wang Xiaoman, Jing Wenbo, *et al.*. Design of parameters of Shack-Hartmann wave-front sensor for laser-beam quality measurement [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(3): 0328002.
- 刘敏时, 王晓曼, 景文博, 等. 用于激光光束检测的夏克哈特曼传感器参量设计[J]. *光学学报*, 2013, 33(3): 0328002.
- Guo Chunfeng, Su Xianyu, Chen Wenjing, *et al.*. A new null Ronchi test for aspheric surfaces [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(8): 0812002.
- 郭春风, 苏显渝, 陈文静, 等. 一种新的非球面零朗奇检测法[J]. *光学学报*, 2012, 32(8): 0812002.
- J Nam, L N Thibos, D R Iskander. Zernike radial slope polynomials for wavefront reconstruction and refraction [J]. *J Opt Soc Am A*, 2009, 26(4): 1035–1048.
- Zhang Jinping, Zhang Zhongyu, Zhang Xuejun, *et al.*. Algorithm for extending dynamic range of Shack-Hartmann wavefront sensor [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, 31(8): 0812006.
- 张金平, 张忠玉, 张学军, 等. 增大夏克哈特曼波前传感器动态范围的算法研究[J]. *光学学报*, 2011, 31(8): 0812006.
- P D Pulaski, J P Roller, D R Neal, *et al.*. Measurement of aberrations in microlenses using a Shack-Hartmann wavefront sensor [C]. *SPIE*, 2002, 4767: 44–52.
- R Cubalchini. Modal wavefront estimation from phase derivation measurements [J]. *J Opt Soc Am*, 1979, 69(7): 972–977.
- D L Fried. Least-square fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase difference measurements [J]. *J Opt Soc Am*, 1977, 67(3): 370–375.
- R H Hudgin. Wave-front reconstruction for compensated imaging [J]. *J Opt Soc Am*, 1978, 67(3): 375–378.
- J R Noll. Phase estimates from slope-type wave-front sensors [J]. *J Opt Soc Am*, 1977, 68(1): 139–140.

- W Southwell. Wavefront estimation from wavefront slope measurements [J]. *J Opt Soc Am*, 1980, 70(8): 998–1006.
- R L Rayces. Least-squares fitting of orthogonal polynomials to the wave aberration function [J]. *Appl Opt*, 1992, 31(13): 2223–2228.
- G M Dai. Wavefront reconstruction from slope data within pupils of arbitrary shapes using iterative Fourier transform [J]. *The Open Optics Journal*, 2007, 1: 1–3.
- R J Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence [J]. *J Opt Soc Am*, 1976, 66(3): 207–211.
- G M Dai. Modal wave-front reconstruction with Zernike polynomials and Karhunen-Loève functions [J]. *J Opt Soc Am A*, 1996, 13(6): 1218–1225.
- Jan Herrmann. Cross coupling and aliasing in modal wavefront estimation [J]. *J Opt Soc Am*, 1981, 71(8): 989–992.
- K R Freischlad, C L Koliopoulos. Modal estimation of a wave front from difference measurements using the discrete Fourier transform [J]. *J Opt Soc Am*, 1986, 3(11): 1852–1861.
- C Zhao, J H Burge. Orthonormal vector polynomials in a unit circle, part I: basis set derived from gradients of Zernike polynomials [J]. *Opt Express*, 2007, 15: 18014–18024.
- C Zhao, J H Burge. Orthonormal vector polynomials in a unit circle, part II: completing the basis set [J]. *Opt Express*, 2008, 16(9): 6586–6591.
- H M Martin, J H Burge, S M Miler, *et al.*. Fabrication and testing of 8.4 m off-axis segments for the giant Magellan telescope [C]. *OSA*, 2008: OWD6.
- P Zhou, H M Martin, C Zhao, *et al.*. Mapping distortion correction for GMT interferometric test [C]. *OSA*, 2012: OW3D.
- Chunyu Zhao, James H Burge. Orthonormal vector polynomials in a unit circle, application: fitting mapping distortions in a null test [C]. *SPIE*, 2010, 7426: 7426V.
- A Gavrilidis. Vector polynomials orthogonal to the gradient of Zernike polynomials [J]. *Opt Lett*, 1982, 7(11): 526–528.
- R Upton, B Ellerbroek. Gram-Schmidt orthogonalization of the Zernike polynomials on apertures of arbitrary shape [J]. *Opt Lett*, 2004, 29(24): 2840–2842.

栏目编辑: 史敏