

线性正则变换中的泰伯效应

孙琼阁¹ 马金鹏² 杨 瑀¹ 李 辰¹ 刘正君³ 刘树田⁴

¹ 北京空间机电研究所, 北京 100091; ² 天津航技术物理研究所, 天津 300000
³ 哈尔滨工业大学自动化测试与控制系, 黑龙江 哈尔滨 150001
⁴ 哈尔滨工业大学物理系, 黑龙江 哈尔滨 150001

摘要 提出了在一定的条件下, 周期函数经过线性正则变换, 结果仍然是周期函数, 即利用线性正则变换可以产生泰伯效应, 并从理论上给出了证明, 得出了产生泰伯效应的条件。推导了特殊形式的线性正则变换(菲涅耳衍射、分数傅里叶变换和 Gyrator 变换)产生泰伯效应的条件, 通过数值模拟验证了 Gyrator 变换的自成像条件, 证明了该理论的正确性, 从而将泰伯效应推广到了线性正则变换域。

关键词 信号处理; 线性正则变换; 泰伯效应; 自成像条件

中图分类号 O436 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS201434.0711004

Talbot Effect in Linear Canonical Transformation

Sun Qiongge¹ Ma Jinpeng² Yang Yu¹ Li Chen¹ Liu Zhengjun³ Liu Shutian⁴

¹ Beijing Institute of Space Mechanics and Electricity, Beijing 100091, China
² Tianjin Jinhang Institute of Technical Physics, Tianjin 300000, China
³ Department of Automatic Measurement and Control, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China
⁴ Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China

Abstract It demonstrates that the periodic function after the linear canonical transform (LCT) still results in a periodic function. When certain conditions are satisfied, the periodic functions are still periodic functions, which is Talbot effect in LCT. The Talbot effect in LCT is theoretically proved, and their self-image conditions are obtained. The conditions of Talbot effect in the special forms of the LCT (such as Fresnel diffraction, fractional Fourier transform and Gyrator transform) are also presented. The self-image condition of Gyrator transform is obtained and proved by numerical simulation, which suggests the Talbot effect is extended to the domain of LCT.

Key words signal processing; linear canonical transform; Talbot effect; self-image condition

OCIS codes 110.6760; 070.6760; 260.1960

1 引 言

泰伯效应, 又称为光栅自成像效应, 是指当一束单色平面光垂直照射一个周期性物体(例如透射光栅)时, 在物体后面周期性距离上会出现物体的像, 这一现象最早于 1830 年被泰伯发现。泰伯效应是衍射光学中的一种重要现象, 已经被广泛地应用于很多领域。尤其是分数泰伯效应的发现, 拓宽了泰伯效应的应用范围, 更加引起了人们对泰伯效应的

兴趣。目前, 泰伯效应以及分数泰伯效应在光学信息处理、光学测量、阵列照明、光学互联、物质波的自成像干涉、激光阵列锁相、无损检测及衍射光学元件设计等诸多方面都有重要应用。目前对泰伯效应的研究及应用主要是在光栅方面, 与此同时, 对于泰伯效应产生机理等理论方面的探讨, 也是研究的热点。这一传统的光学现象, 至今仍然是一个非常活跃的科研领域, 无论在原理上还是应用上都吸引着人们

收稿日期: 2014-01-14; 收到修改稿日期: 2014-03-10

作者简介: 孙琼阁(1983—), 女, 博士, 工程师, 主要从事物理光学、光束传输变换与调制、激光雷达等方面的研究。

E-mail: sqg8302@163.com

广泛的兴趣。

传统的泰伯效应是基于菲涅耳衍射来描述的,由于分数傅里叶变换在理论上等价于菲涅耳衍射,因而分数傅里叶变换域的泰伯效应引起了人们的关注^[1-6]。菲涅耳变换与分数傅里叶变换都是线性正则变换的特殊形式,研究对于这些特殊形式成立的性质或现象,是否可以推广到更具有普遍意义的线性正则变换领域中,对线性正则变换与其他特殊变换形式的理论研究都有重要的价值。

本文将泰伯效应推广到了线性正则变换域,即对于周期性物体,经过线性正则变换,在满足特定的条件下,都会出现自成像现象。而传统的菲涅耳衍射与分数傅里叶变换下的泰伯效应都可以认为是线性正则变换泰伯效应的特例。推导了线性正则变换泰伯效应的一般表达式与自成像现象的条件。代入特定的参数,线性正则变换可以退化为菲涅耳变换

或分数傅里叶变换,由此直接得到了相应的泰伯效应与自成像条件,这验证了线性正则变换泰伯效应这一概念的正确性。特别地,对于 Gyrator 变换,可以直接得到相应的泰伯效应表达式与自成像条件。

2 线性正则变换的一般表达式

线性正则变换是一类积分变换^[7],也称为二次相位积分^[8]、广义菲涅耳变换^[9-10]、广义分数傅里叶变换^[11],用于在数学上描述一阶无损光学系统^[12]。传统的傅里叶变换、分数傅里叶变换、菲涅耳变换都是线性正则变换的特殊形式,这些变换的快速算法已经被广泛地研究^[13-23]。

数学上,函数 $g_i(\mathbf{r}_i)$ 的线性正则变换 $g_o(\mathbf{r}_o)$ 在形式上等价于 Collins 积分,即

$$g_o(\mathbf{r}_o) = A_M \iint g_i(\mathbf{r}_i) \exp[i\pi(\mathbf{r}_i^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{r}_i - 2\mathbf{r}_i^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{r}_o + \mathbf{r}_o^T \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{r}_o)] d\mathbf{r}_i, \quad (1)$$

式中 $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)^T$, $\mathbf{r}_o = (x_o, y_o)^T$, 上标 T 表示转置, $A_M = \exp(i\phi) / \sqrt{\det(i\mathbf{B})}$ 是常数相位(ϕ 为常数, $\phi = -\frac{\pi}{4}$), $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ 是积分核中的变换因子。

因为线性正则变换等价于一阶光学系统,因此可以由传输矩阵 \mathbf{M}_L 来表示^[12],即

$$\mathbf{M}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha/\beta & 1/\beta \\ -\beta + \alpha\gamma/\beta & \gamma/\beta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中 α, β, γ 是传输矩阵系数。对于二维线性正则变换,(2) 式中 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 均为 2×2 传输子矩阵,传输矩阵为 4×4 矩阵,其中元素 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 满足

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{B}^T &= \mathbf{B}\mathbf{A}^T, & \mathbf{C}\mathbf{D}^T &= \mathbf{D}\mathbf{C}^T, & \mathbf{A}\mathbf{D}^T - \mathbf{B}\mathbf{C}^T &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{A}^T\mathbf{C} &= \mathbf{C}^T\mathbf{A}, & \mathbf{B}^T\mathbf{D} &= \mathbf{D}^T\mathbf{B}, & \mathbf{A}\mathbf{D}^T - \mathbf{B}\mathbf{C}^T &= \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (3)$$

一维线性正则变换退化为常见的三参数积分变换,函数 $g_i(x_i)$ 的线性正则变换形式为^[12]

$$g_o(x_o) = \int C_M(x_i, x_o) g_i(x_i) dx_i, \quad (4)$$

式中 $C_M(x_i, x_o)$ 是线性正则变换的积分核,表达式为

$$C_M(x_i, x_o) = A_M \exp[i\pi(\alpha x_i^2 - 2\beta x_i x_o + \gamma x_o^2)], \quad (5)$$

其中, $A_M = \sqrt{\beta} \exp(-i\pi/4)$ 。

3 线性正则变换中的泰伯效应

周期函数可以表示为平面波叠加的形式,设一维周期性物体的复振幅透射率为

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i2\pi n f_0 x), \quad (6)$$

式中 f_0 是基频,周期 $d = 1/f_0$, c_n 为各平面波分量的相对振幅和相位分布。物场分布的空间频谱为

$$G(f_x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f_x - f_0), \quad (7)$$

式中 $\delta(f_x - f_0)$ 为狄拉克函数。以周期函数作为线性正则变换的输入,则有

$$\begin{aligned} g_o(x_o) &= A_M \int g(x_i) \exp[i\pi(\alpha x_i^2 - 2\beta x_i x_o + \gamma x_o^2)] dx_i = \\ &= \frac{i}{|\alpha|} A_M \exp\left[i\pi\left(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)x_o^2\right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i2\pi \frac{\beta}{\alpha} n f_0 x_o\right) \exp\left(-i\pi n^2 \frac{f_0^2}{\alpha}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

因此输出函数相当于原平面波分量坐标发生缩放同时引入附加相位因子,即在观察平面引入相移。若对每一平面波分量,消除附加相移的影响,即满足条件

$$\exp\left(-i\pi n^2 \frac{f_o^2}{\alpha}\right) = 1, \quad (9)$$

式中 f_o 是输出光的空间频率。则得到输出光场的复振幅分布为

$$g_o(x_o) = \frac{i}{|\alpha|} A_M \exp\left[i\pi\left(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)x_o^2\right] g\left(\frac{\beta}{\alpha}x_o\right), \quad (10)$$

强度分布为

$$I(x_o) = |g_o(x_o)|^2 = \left|\frac{A_M}{\alpha}\right|^2 \left|g\left(\frac{\beta}{\alpha}x_o\right)\right|^2. \quad (11)$$

因此,在线性正则变换的输出面得到的是原物体的坐标缩放的自成像,坐标缩放导致周期结构物体的周期间隔发生改变,变换后的周期大小为

$$d = \frac{\alpha}{\beta f_o}. \quad (12)$$

对于二维情况,可以得到相同的结论。设二维周期函数为

$$g_i(x_i, y_i) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} c_{m, n} \exp[i2\pi(mf_1 x_i + nf_2 y_i)] = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} c_{m, n} \exp[i2\pi(\mathbf{f}^T \mathbf{r}_i)], \quad (13)$$

式中 $\mathbf{f}^T = (mf_1, nf_2)$, f_1 与 f_2 为周期函数在 x 轴与 y 轴两个方向的空间频率, $c_{m, n}$ 为各平面波分量在 x 和 y 两个方向的相对振幅和相位分布。经过复杂的计算,可得二维周期函数的线性正则变换结果为

$$g_o(\mathbf{r}_o) = CA_M \exp[i\pi \mathbf{r}_o^T (\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) \mathbf{r}_o] \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} c_{m, n} \exp(i2\pi \mathbf{f}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{r}_o) \exp(-i\pi \mathbf{f}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{f}), \quad (14)$$

式中 C 是计算中引入的复常数因子。

二维情况下,相应的自成像条件为

$$\exp(-i\pi \mathbf{f}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{f}) = 1. \quad (15)$$

此时,有

$$g_o(\mathbf{r}_o) = CA_M \exp[i\pi \mathbf{r}_o^T (\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) \mathbf{r}_o] \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} c_{m, n} \exp(i2\pi \mathbf{f}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{r}_o). \quad (16)$$

由(16)式可知,在二维情形中,周期函数经过线性正则变换,在满足一定的条件下,会出现自成像现象。(15)式给出了自成像的条件,与原函数的周期大小和线性正则变换的参数均有关。

式中 k 为波数, $k = 2\pi/\lambda$ 。相应的泰伯条件为

$$\exp(-i\pi \lambda z n^2 f_o^2) = \exp\left[-i\pi \lambda z \left(\frac{n}{d}\right)^2\right] = 1, \quad (19)$$

即要求

$$z_m = \frac{2md^2}{\lambda}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (20)$$

因此在每个距离 z_m 处,可观察到周期物体的像。即周期物体经过菲涅耳衍射,可在物体后满足条件的某些距离处观察到物体的像。

4.2 分数傅里叶变换的泰伯效应

对于一维分数傅里叶变换,线性正则变换的参数变为

$$\alpha = \gamma = \cot a, \quad \beta = \sin a, \quad (21)$$

则自成像的条件为

$$\tan a = 2md^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (22)$$

从而得

$$\exp\left[i\pi\left(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)x_o^2\right] = 1, \quad (23)$$

所以有

4 例子

4.1 菲涅耳衍射的泰伯效应

对于给定的线性正则变换泰伯效应的表达式,代入相应特定的参数,可以直接得到相应特殊变换的泰伯效应的表达式和自成像的条件。菲涅耳衍射下的周期结构自成像现象称为泰伯效应,菲涅耳衍射在数学上可以由菲涅耳变换表示,而菲涅耳变换是线性正则变换的特殊形式。为了验证第3节结论的正确性,特别地,对于菲涅耳衍射,其在线性正则变换中的特定参数为

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{\lambda z}, \quad (17)$$

式中 λ 为光波长, z 是观察平面和菲涅耳衍射孔径之间的距离。则(10)式可以简化为

$$g_o(x_o) = i\lambda z \exp(ikz) g_i(x_i), \quad (18)$$

$$g_o(x_o) = \frac{i}{|\cot a|} A_M g\left(\frac{1}{\cos a} x_i\right). \quad (24)$$

因此,当周期函数经过分数傅里叶变换,在分数阶满足一定的条件下,可以得到原物体的坐标缩放的像。对应于分数傅里叶变换的光学实验装置,可以得到分数傅里叶变换的成像距离^[1]。对于二维分数傅里叶变换,若在两个方向满足条件的分数阶不相同,则得到的函数图像在两个方向的周期将发生不同的变化。

4.3 Gyrator 变换的泰伯效应

类似于菲涅耳变换与分数傅里叶变换,Gyrator 变换作为线性正则变换的特殊形式,代入相应的参数,可以直接得到相应的自成像现象的条件。在(14)式代入 Gyrator 变换的传输矩阵,对于周期输入函数 $g_i(x_i, y_i)$,如(13)式, x, y 方向的周期分别为

$$T_x = \frac{1}{f_1}, \quad T_y = \frac{1}{f_2}, \quad (25)$$

可得

$$g_o(x_o, y_o) = \frac{1}{|\cos a|} \exp(-i2\pi x_o y_o \tan a) \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} c_{mn} \exp[-i2\pi mn f_1 f_2 \tan a] \exp\left[i2\pi \frac{mf_1 x_o + nf_2 y_o}{\cos a}\right]. \quad (26)$$

若满足条件

$$\tan a = \frac{p}{f_1 f_2}, \quad p = 1, 2, 3, \dots, \quad (27)$$

有

$$\exp[-i2\pi mn f_1 f_2 \tan a] = 1. \quad (28)$$

因此,有

$$g_o(x_o, y_o) = \frac{1}{|\cos a|} \exp(-i2\pi x_o y_o \tan a) \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} c_{mn} \exp\left[i2\pi \frac{mf_1 x_o + nf_2 y_o}{\cos a}\right], \quad (29)$$

出射场光强分布为

$$I_G(x_o, y_o) = |g_o(x_o, y_o)|^2 = \frac{1}{|\cos a|^2} \left| \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} c_{mn} \exp\left[i2\pi \frac{mf_1 x_o + nf_2 y_o}{\cos a}\right] \right|^2. \quad (30)$$

因此,在特定的阶数下,在 Gyrator 变换的输出面,可以得到周期物体的坐标缩放后的自成像。输出函数的周期为

$$T_{x_o} = \frac{\cos a}{f_1}, \quad T_{y_o} = \frac{\cos a}{f_2}. \quad (31)$$

5 数值模拟

图 1 给出了一个简单二维周期函数不同阶次 Gyrator 变换的结果。图 1(a)是原周期结构图像,图 1(b),(c)参数分别为 $a = \pi/4, a = \arctan 2$,均满足(27)式所示的自成像条件,因此,图 1(b),(c)得

到的是原图像坐标缩放的像,具有泰伯效应,变换后周期满足(27)式。图 1(d)参数 $a = \pi/5$,不满足自成像条件,此时变换的结果虽然仍是周期结构,但完全不同不同于原图像,因此没有泰伯效应。

为了与周期结构图像比较,图 2 给出了一幅非周期结构图像的 Gyrator 变换结果,其中图 2(a)是输入原图像,图 2(b)是经过 Gyrator 变换的结果,变换阶次为 $a = \pi/4$ 。显然,非周期结构图像并不能满足线性变换的泰伯效应,不能得到原图像坐标缩放的像。

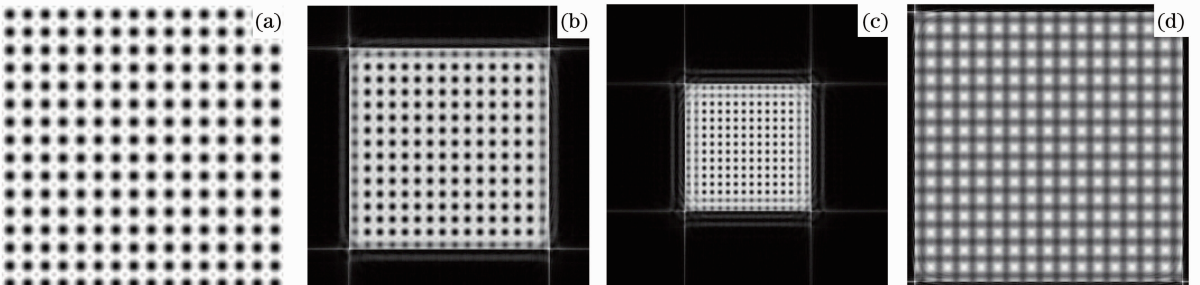
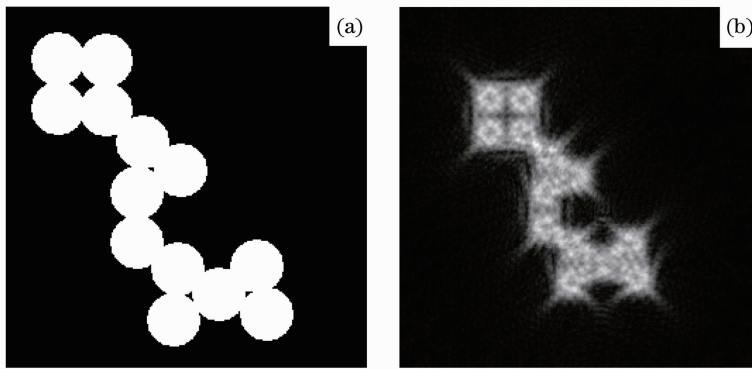


图 1 二维周期函数的 Gyrator 变换。(a) $a = 0$; (b) $a = \pi/4$; (c) $a = \arctan 2$; (d) $a = \pi/5$

Fig. 1 Gyrator transforms of two-dimension periodic function. (a) $a = 0$; (b) $a = \pi/4$; (c) $a = \arctan 2$; (d) $a = \pi/5$

图2 二维非周期函数的 Gyrator 变换。(a) $a=0$; (b) $a=\pi/4$ Fig. 2 Gyrator transform of two-dimension non-periodic function. (a) $a=0$; (b) $a=\pi/4$

6 结 论

提出了线性正则变换中的泰伯效应,证明了周期函数经过线性正则变换,在满足一定的条件下,会出现自成像现象,因而具有泰伯效应。分别选取线性正则变换的特例:菲涅耳变换、分数傅里叶变换和 Gyrator 变换进行了分析,分别得到其自成像条件,同时也验证了线性正则变换可以产生泰伯效应这一理论。而菲涅耳变换、分数傅里叶变换和 Gyrator 变换都是线性正则变换的特殊形式,因此由线性正则变换的泰伯效应可以直接得到传统的泰伯效应。以周期图像的 Gyrator 变换为例,证明了:在满足自成像条件下,周期图像的 Gyrator 变换结果是原周期图像缩放,具有泰伯效应;不满足自成像条件下,周期图像的 Gyrator 变换的结果,不再是原周期图像,不具有泰伯效应;非周期图像的 Gyrator 变换不具有泰伯效应。因 Gyrator 变换是线性正则变换的特例,因而该数值模拟结果验证了线性正则变换中的泰伯效应理论的正确性。

参 考 文 献

- 1 L M Bernardo. Talbot self-imaging in fractional Fourier planes of real and complex orders [J]. *Opt Commun*, 1997, 140(4-6): 195-198.
- 2 R S Romaniuk, S Simrock, V M Lutkovski. Photonics applications in industry and research IV [C]. *SPIE*, 2005, 5948: 59482Q.
- 3 M V Shovgenyuk, Y M Kozlovskii. Self-image of periodic phase elements in the fractional Fourier transform domain [C]. *SPIE*, 2006, 6027: 60270E.
- 4 Hua Wenqiang, Bian Fenggang, Song Li, *et al.*. Fractional Talbot effect of phase gratings illuminated by partially coherent synchrotron radiation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(1): 0134001.
滑文强, 边风刚, 宋 丽, 等. 部分相干同步辐射照射下光栅分数塔尔伯特效应[J]. *光学学报*, 2013, 33(1): 0134001.
- 5 Hua Jianwen, Liu Liren. Fractional Talbot effect under fractional Fourier transform [J]. *Chinese J Lasers*, 1997, 24(2): 163-168.
华建文, 刘立人. 分数傅里叶变换产生分数泰伯效应[J]. *中国激光*, 1997, 24(2): 163-168.
- 6 Qu Weijuan, Yan Aimin, Liu Liren, *et al.*. Fractional Talbot effect of 2D skewed periodic array [J]. *Chinese J Lasers*, 2006,

33(3): 356-360.

- 曲伟娟, 闫爱民, 刘立人, 等. 二维斜周期阵列的分数泰伯效应 [J]. *中国激光*, 2006, 33(3): 356-360.
- 7 T Alieva, M Bastiaans. Alternative representation of the linear canonical integral transform [J]. *Opt Lett*, 2005, 30(24): 3302-3304.
- 8 M J Bastiaans. The wigner distribution function applied to optical signals and systems [J]. *Opt Commun*, 1978, 25(1): 26-30.
- 9 D F V James, G S Agarwal. The generalized Fresnel transform and its applications to optics [J]. *Opt Commun*, 1996, 126(4-6): 207-212.
- 10 C Palma, V Bagini. Extension of the Fresnel transform to ABCD systems [J]. *J Opt Soc Am A*, 1997, 14(8): 1774-1779.
- 11 S Abe, J T Sheridan. Generalization of the fractional Fourier transformation to an arbitrary linear lossless transformation: an operator approach [J]. *J Phys A Math Gen*, 1994, 27(12): 4179-4187.
- 12 H M Ozaktas, Z Zalevsky, M A Kutay. *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing* [M]. New York: Wiley, 2001. 63-183.
- 13 H M Ozaktas, O Arikan, M A Kutay, *et al.*. Digital computation of the fractional Fourier transform [J]. *IEEE Trans Signal Process*, 1996, 44(9): 2141-2150.
- 14 J Garcia, D Mas, R G Dorsch. Fractional Fourier transform calculation through the fast Fourier transform algorithm [J]. *Appl Opt*, 1996 35(35): 7013-7018.
- 15 S C Pei, M H Yeh. Improved discrete fractional Fourier transform [J]. *Opt Lett*, 1997, 22(14): 1047-1049.
- 16 X G Deng, Y P Li, D Y Fan. A fast algorithm for fractional Fourier transform [J]. *Opt Commun*, 1997, 138(4-6): 270-274.
- 17 F J Marinho, L M Bernardo. Numerical calculation of fractional Fourier transforms with a single fast Fourier transform algorithm [J]. *J Opt Soc Am A*, 1998, 15(8): 2111-2116.
- 18 M H Yeh, S C Pei. A method for the discrete fractional Fourier transform computation [J]. *IEEE Trans Signal Processing*, 2003, 51(3): 889-891.
- 19 X Yang, Q Tan, X Wei, *et al.*. Improved fast fractional-Fourier-transform algorithm [J]. *J Opt Soc Am A*, 2004, 21(9): 1677-1681.
- 20 D Mas, J Garcia, C Ferreira, *et al.*. Fast algorithms for free-space diffraction patterns calculation [J]. *Opt Commun*, 1999, 164(4-6): 233-245.
- 21 M Sypek. Light propagation in the Fresnel region. New numerical approach [J]. *Opt Commun*, 1995, 116(1-3): 43-48.
- 22 D Mas, J Perez, C Hernandez, *et al.*. Fast numerical calculation of Fresnel patterns in convergent systems [J]. *Opt Commun*, 2003, 227(4-6): 245-258.
- 23 D Mendlovic, Z Zalevsky, N Konforti. Computation considerations and fast algorithms for calculating the diffraction integral [J]. *J Mod Opt*, 1997, 44(22): 407-414.

栏目编辑: 史 敏