

静态像差对交叉谱相位复原精度的影响及补偿方法

钟立波^{1,2,3} 田 雨^{1,2} 饶长辉^{1,2}

¹ 中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209
² 中国科学院自适应光学重点实验室, 四川 成都 610209
³ 中国科学院大学, 北京 100049

摘要 斑点图像重建方法可以有效抑制大气湍流的影响, 得到目标衍射极限像。然而系统静态像差破坏了波前的统计信息, 降低了相位重建精度。通过理论分析得出在理想情况下, 离焦、像散、彗差和球差中只有彗差会在重建结果中引入额外相位值。进一步采用分割光瞳的方式表示交叉谱传递函数与静态像差的关系时, 指出通过选择交叉谱的平移向量方向, 可以在特定方向上静态像差之间的平衡, 降低系统像差对相位重建的影响。仿真中球差与离焦像差之间的平衡及离焦像差与像散之间的平衡, 都起到了降低相位重建误差的效果。

关键词 大气光学; 图像处理; 静态像差; 斑点干涉

中图分类号 O438 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201434.0701002

Influence of Static Aberrations on the Accuracy of Cross Spectrum Phase Reconstruction and the Compensated Method

Zhong Libo^{1,2,3} Tian Yu^{1,2} Rao Changhui^{1,2}

¹ Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China
² Key Laboratory of Adaptive Optics of Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China
³ University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract Speckle image reconstruction can effectively remove the influence of the atmospheric turbulence and obtain the diffraction limited images of the object. However, the static aberrations of the system can destroy the statistical information of the wavefronts and decrease the accuracy of the Fourier phase reconstruction. It shows that among defocus, astigmatism, coma and spherical aberration, only coma has residual phase on the reconstruction in ideal case. By dividing the pupil into several sub-apertures with Fried parameter as the diameter, the influence of the static aberration on the phases of the cross spectrum transfer function is analyzed. The result shows that by choosing the direction of the shift frequency in the cross spectrum transfer function, aberration balancing can be used to reduce the influence of the static aberration and improve the accuracy of the reconstruction. The simulations show desired effects of the balancing on the spherical aberration and defocus, astigmatism and defocus.

Key words atmospheric optics; image processing; static aberration; speckle interferometry

OCIS codes 010.1330; 110.3010; 110.1080

1 引 言

大气湍流使天文目标的成像分辨力严重降低, 除了自适应光学系统可以实时补偿大气畸变相位^[1-2], 通过图像重建的方式可以将分辨力提高到

望远镜的衍射极限水平。斑点图像重建(SIR)^[3]通过对多帧短曝光图像进行统计处理来重建目标像。主要包含两个步骤: 目标傅里叶振幅的估计和目标傅里叶相位的恢复。目标傅里叶振幅的恢复一般采

收稿日期: 2014-01-15; **收到修改稿日期**: 2014-03-26

基金项目: 国家自然科学基金(11178004)

作者简介: 钟立波(1987—), 女, 博士, 研究生, 主要从事太阳图像高分辨率图像重建方面的研究。

E-mail: jane_chung2010@126.com

导师简介: 饶长辉(1971—), 男, 博士, 研究员, 主要从事自适应光学方面的研究。E-mail: chrhao@ioe.ac.cn(通信联系人)

用 Labeyrie^[3]方法。目标傅里叶相位的恢复算法主要有双频谱算法^[4]、交叉谱算法(CS)也称 Knox-Thompson 算法^[5]和扩展交叉谱算法^[6]三种。望远镜的静态像差破坏了波前的统计信息,降低了目标功率谱的复原精度和相位重建精度。静态像差对功率谱的影响可以通过事先标定得以消除。针对系统像差对相位重建的影响,文献[7]在狭缝孔径下分析了静态像差对斑点传递函数及交叉谱传递函数的影响,仿真结果表明对称像差与非对称像差在振幅和相位上的影响不同。文献[8]通过仿真详细分析了系统像差对斑点传递函数、交叉谱传递函数和双频谱传递函数的影响,并指出通过大量的统计可以降低系统像差对相位重建结果的影响,然而由于大量短曝光图像的采集受到目标的演化时间和大气湍流相干时间的限制,在应用时比较难实现。双频谱算法的相位闭合特性使其受到系统像差的影响远小于交叉谱算法,系统像差对其影响主要通过降低传递函数的幅值来增加相位误差,因此可以用于带有静态像差系统的图像复原^[9-10]。鉴于上述原因本文只讨论系统像差对交叉谱算法复原精度的影响以及降低其影响的方法。

本文通过理论分析,证明了虽然在理想情况下,离焦、像散、彗差和球差中,只有彗差会在交叉谱传递函数中引入额外相位值,导致目标傅里叶相位重

建精度的降低,但实际上由于有限统计量的影响,即使在只有大气湍流情况下,交叉谱传递函数的相位值也不为0,而像差的引入进一步放大了这种影响,降低相位复原精度。进一步通过将光瞳按照相干长度大小的子孔径进行分割,假设子孔径内只有倾斜的情况下,指出离焦、像散和球差引入后的交叉谱传递函数的相位误差,可以通过子孔径内的像差平衡得到降低。仿真中球差与离焦的平衡和离焦与5、6阶像散的平衡均达到了预期的效果,降低了交叉谱传递函数的相位误差。当系统存在多种类型像差的情况下,可以通过选取交叉谱传递函数的平移向量降低系统像差的影响。

2 交叉谱算法

交叉谱相位重建算法^[5]及扩展交叉谱算法^[6]是通过引入一个或多个小于相干长度对应的平移向量,在统计上消除大气湍流引入的相位差,只保留目标在各个频率上的相位差,通过迭代得到目标的傅里叶相位值^[11]。

交叉谱被定义为

$$C_i(\mathbf{f}, \Delta\mathbf{f}) = I_i(\mathbf{f})I_i^*(\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}), \quad (1)$$

式中 $I_i(\mathbf{f}) = O(\mathbf{f})S_i(\mathbf{f})$ 为第 i 帧短曝光图像的傅里叶变换。

$$C_i(\mathbf{f}, \Delta\mathbf{f}) = O(\mathbf{f})S_i(\mathbf{f})O^*(\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f})S_i^*(\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}) = |O(\mathbf{f})| |O(\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f})| |S_i(\mathbf{f})| |S_i(\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f})| \times \exp\{j[\Delta\varphi_o(\mathbf{f}, \mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}) + \Delta\varphi_{S_i}(\mathbf{f}, \mathbf{f} + \Delta\mathbf{f})]\}, \quad (2)$$

式中 $\varphi_o(\mathbf{f})$ 和 $\varphi_{S_i}(\mathbf{f})$ 分别为目标及传递函数的相位值,目标及传递函数引入的交叉谱相位值分别为

$$\Delta\varphi_{S_i}(\mathbf{f}, \mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}) = \varphi_{S_i}(\mathbf{f}) - \varphi_{S_i}(\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}),$$

$$\Delta\varphi_o(\mathbf{f}, \mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}) = \varphi_o(\mathbf{f}) - \varphi_o(\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}).$$

通过将多帧的统计引入其中,则(2)式变为

$$\langle C_i(\mathbf{f}, \Delta\mathbf{f}, \mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}) \rangle = |O(\mathbf{f})| |O(\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f})| \langle S_i(\mathbf{f})S_i^*(\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}) \rangle \exp\{j\Delta\varphi_o(\mathbf{f})\}, \quad (3)$$

$S_{i\text{TF}} = \langle S_i(\mathbf{f})S_i^*(\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}) \rangle$ 为交叉谱传递函数。影响目标傅里叶相位恢复的主要是 $S_{i\text{TF}}$ 的相位值是否为0时。只有当 $S_{i\text{TF}}$ 的相位值恒为0时,上述交叉谱函数得到的相邻频率之间的相位差反映的只有目标在相应频率的相位差,而由此恢复出的相位值才是真实的相位值。在理想情况下,没有静态像差时得到的 $S_{i\text{TF}}$ 的相位值始终为0,但是当存在静态像差时, $S_{i\text{TF}}$ 的相位值就可能不为0,影响目标的傅里叶相位重建

精度。

3 典型静态像差对相位重建的影响

常见的系统静态像差主要有离焦、像散、彗差和球差,主要分析这四种像差对交叉谱传递函数相位值的影响。由于静态像差与湍流相位畸变统计无关,交叉谱传递函数的相位值可以表示为

$$p\{S_{TF}^c\} = p\{\langle S_i(\mathbf{f})S_i^*(\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}) \rangle\} = p\left\{\iiint_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i[\Phi_T]\} \langle \exp\{i[\Phi_{S_i}]\} \rangle dx_1 dy_1 dx_2 dy_2\right\}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Phi_T &= \varphi_T(x_1, y_1) - \varphi_T(x_1 + x, y_1 + y) - \varphi_T(x_2, y_2) + \varphi_T(x_2 + x + \Delta x, y_2 + y + \Delta y), \\ \Phi_S &= \phi_{S_i}(x_1, y_1) - \phi_{S_i}(x_1 + x, y_1 + y) - \phi_{S_i}(x_2, y_2) + \phi_{S_i}(x_2 + x + \Delta x, y_2 + y + \Delta y), \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $x = \lambda f_x$, $y = \lambda f_y$, $\Delta x = \lambda \Delta f_x$, $\Delta y = \lambda \Delta f_y$, 并且 $p\{\}$ 表示对表达式求指数形式相位。由上面的分析可知, 在理想情况下上式 $\langle \rangle$ 中的值与静态像差无关, 引入相位值为 0, 可以将上式改写为

$$p\{S_{TF}^c\} = p\{\tau_{DL}(\mathbf{f})\} / p\{\tau_{DL}(\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f})\}, \quad (6)$$

$$p\{\tau_{DL}(\mathbf{f})\} = P\left\{\iint \exp\{i[\varphi_T(x_1, y_1) - \varphi_T(x_1 + x, y_1 + y)]\} dx_1 dy_1\right\}, \quad (7)$$

因此交叉谱传递函数的相位值主要由望远镜系统的传递函数的相位决定。

静态像差用 Zernike 多项式^[12]表示为

离焦:

$$W_4 = \sqrt{3}(2p^2 - 1) = \sqrt{3}[2(x^2 + y^2) - 1], \quad (8)$$

像散:

$$\begin{cases} W_5 = \sqrt{6}p^2 \sin 2\theta = 2\sqrt{6}xy \\ W_6 = \sqrt{6}p^2 \cos 2\theta = \sqrt{6}(x^2 - y^2) \end{cases}, \quad (9)$$

彗差:

$$\begin{cases} W_7 = \sqrt{8}(3p^3 - 2p) \sin \theta = \sqrt{8}[3(x^2 + y^2) - 2]y \\ W_8 = \sqrt{8}(3p^3 - 2p) \cos \theta = \sqrt{8}[3(x^2 + y^2) - 2]x \end{cases}, \quad (10)$$

球差:

$$W_{11} = \sqrt{5}(6p^4 - 6p^2 + 1) = \sqrt{5}[6(x^2 + y^2)^2 - 6(x^2 + y^2) + 1], \quad (11)$$

将上面望远镜系统传递函数的相位表达式表示成对称形式:

$$p\{\tau_{DL}(\mathbf{f})\} = P\left\{\int_{-R+|y/2|}^{R-|y/2|} \int_{-R+|x/2|}^{R-|x/2|} \exp\{i[\varphi_T(x_1 - x/2, y_1 - y/2) - \varphi_T(x_1 + x/2, y_1 + y/2)]\} dx_1 dy_1\right\}, \quad (12)$$

式中 R 是望远镜的半径, 令 $b_x = R - |\Delta x/2|$, $b_y = R - |\Delta y/2|$ 得到

$$p\{\tau_{DL}(\mathbf{f})\} = \int_{-b_y}^{b_y} \int_{-b_x}^{b_x} \exp\{i[\varphi_T(x_1 - x/2, y_1 - y/2) - \varphi_T(x_1 + x/2, y_1 + y/2)]\} dx_1 dy_1, \quad (13)$$

对于离焦像差来说:

$$\begin{aligned} p\{\tau_4(\mathbf{f})\} &= P\left\{\int_{-b}^b \int_{-b}^b \exp\{i[\sqrt{3}[2(x_1 - x/2)^2 + (y_1 - y/2)^2] - 1] - \right. \\ &\quad \left. \sqrt{3}[2(x_1 + x/2)^2 + (y_1 + y/2)^2] - 1]\} dx_1 dy_1\right\} = \\ &= P\left\{\int_{-b}^b \int_{-b}^b \exp\{i[-2\sqrt{3}(-2x_1x + 2y_1y)]\} dx_1 dy_1\right\} = P\left\{\int_{-b}^b \int_{-b}^b \cos[-2\sqrt{3}(2x_1x + 2y_1y)] + \right. \\ &\quad \left. i\sin[-2\sqrt{3}(2x_1x + 2y_1y)] dx_1 dy_1\right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

由于在对称区间奇函数的积分结果为 0, 所以上式中虚数部分为 0。即

$$p\{\tau_4(\mathbf{f})\} = 0. \quad (15)$$

以同样的方式可以求得 Zernike 像差中的第 5、6 阶像散和第 11 阶球差在望远镜系统传递函数相位值为 0 的影响, 即 $p\{\tau_5(\mathbf{f})\} = 0$, $p\{\tau_6(\mathbf{f})\} = 0$, $p\{\tau_{11}(\mathbf{f})\} = 0$ 。而引入第 7、8 阶彗差后, 望远镜系统的传递函数相位值为

$$p\{\tau_7(f)\} = \exp\left[-i\sqrt{8}\left(3x^2y/4 - 2y + \frac{3}{4}y^3\right)\right] \times p\left\{\iint_{-b}^b \exp\{-i[3\sqrt{8}(x_1^2y + 3y_1^2y)]\} dx_1 dy_1\right\}, \quad (16)$$

$$p\{\tau_8(f)\} = \exp\left[-i\sqrt{8}(3y^2x/4 - 2x + 3/4x^3)\right] \times p\left\{\iint_{-b}^b \exp\{-i[3\sqrt{8}(y_1^2x + 3x_1^2x)]\} dx_1 dy_1\right\}. \quad (17)$$

上述结果表明,在理想情况下离焦、像散和球差不影响望远镜系统的传递函数的相位值。而彗差则会使望远镜系统传递函数的相位不为0。结合(6)式,只有彗差会在交叉谱传递函数的相位中引入额外值,影响傅里叶相位重建结果。实际上由于有限统计量的影响,统计平均后,并不能完全消除湍流的影响^[8]。系统像差的引入进一步降低了交叉谱传递函数相位值的信噪比,增大了相位误差,导致相位重建精度的降低。

4 有限统计下静态像差对目标傅里叶相位恢复的影响及像差平衡方法

为了更详细地分析系统像差对波前统计信息的影响,特别是在相干长度大小尺度内的影响。将系统的光瞳看作是一个大的圆(直径为 D),上面布满了子孔径(直径为相干长度 r_0)。在不存在静态像差的情况,每个子孔径内的相位扰动在短曝光情况下是不变的,同时服从高斯统计分布。但是当系统

具有静态像差时,破坏了子孔径内波前的统计信息^[13]。大气相干长度为10 cm时, $D=1$ m对应的各个子孔径的可能排布方式如图1所示。

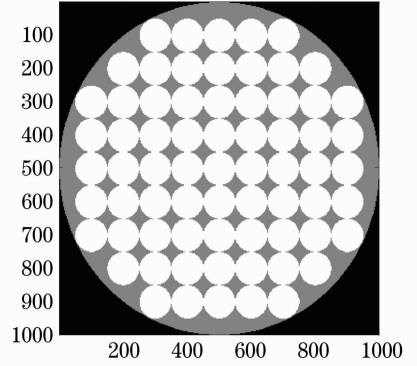


图1 口径 $D=1$ m,相干长度为10 cm时,各子孔径的排列图

Fig. 1 Possible configuration of the sub-apertures with the full aperture $D = 1$ m and the turbulence coherence length equals 10 cm
系统的短曝光传递函数可以表示为^[14]

$$\tau(f) = (\pi D^2/4)^{-1} \int U(V)U(V - \lambda Rf)W(V)W(V - \lambda Rf)dV, \quad (18)$$

当将整个孔径划分成尺寸为相干长度大小的子孔径时,(17)式可以写成:

$$\tau(f) \approx (\pi D^2/4)^{-1} (\pi r_0^2/4) \sum_{j=1}^N |a(V_j)| |a(V_j - \lambda Rf)| \exp\{i[\phi(V_j) - \phi(V_j - \lambda Rf)]\} \approx r_0^2/D \sum_{j=1}^N a(V_j)a^*(V_j - \lambda Rf) \exp\{i[\phi_T(V_j) - \phi_T(V_j - \lambda Rf)]\}, \quad (19)$$

式中 $N = D^2/r_0^2$, $\tau_0(\lambda Rf)$ 为清澈光瞳望远镜的传递函数, $a(V_j)$ 代表第 j 个子孔径内的大气湍流,振幅为 $|a(V_j)|$,相位为 $\exp\{i\phi(V_j)\} = \exp\{i[\phi_0(V_j) + \phi_T(V_j)]\}$, $\phi_0(V_j)$ 为子孔径内大气湍流引入的相位值, $\phi_T(V_j)$ 为子孔径内系统静态像差引入的相位值。

采用相同的方法交叉谱传递函数可以表示为

$$\langle \tau(f)\tau^*(f + \Delta f) \rangle \approx \left(\frac{r_0}{D}\right)^4 \sum_{j=1}^N \langle |a(V_j)|^2 a^*(V_j - \lambda Rf)a(V_j - \lambda Rf - \lambda R\Delta f) \rangle \times \exp\{i[-\phi_T(V_j - \lambda Rf) + \phi_T(V_j - \lambda Rf - \lambda R\Delta f)]\} + \left(\frac{r_0}{D}\right)^4 \sum_{j \neq k}^N \langle a(V_j)a^*(V_j - \lambda Rf) \rangle \langle a^*(V_k)a(V_k - \lambda Rf - \lambda R\Delta f) \rangle \times \exp\{i[\phi_T(V_j) - \phi_T(V_j - \lambda Rf)]\} \exp\{i[-\phi_T(V_k) + \phi_T(V_k - \lambda Rf - \lambda R\Delta f)]\}, \quad (20)$$

假设系统像差在较小的尺度内只有倾斜存在。根据微分定理可以将光瞳内两点的相位差表示为

$$\phi_T(V'_j - \lambda R\Delta f) - \phi_T(V'_j) = -\lambda R\Delta f_x \frac{\partial \phi_T(V'_j)}{\partial x} - \lambda R\Delta f_y \frac{\partial \phi_T(V'_j)}{\partial y}, \quad (21)$$

这时带有系统像差的交叉谱传递函数为

$$\begin{aligned} \langle \tau(f)\tau^*(f+\Delta f) \rangle &\approx \left(\frac{r_0}{D}\right)^4 \sum_{j=1}^N \langle |a(V_j)|^2 a^*(V_j - \lambda Rf) a(V_j - \lambda Rf - \lambda R\Delta f) \rangle \times \\ &\exp\left\{-i\lambda R\left[\Delta f_x \cdot \frac{\partial \phi_T(V_j - \lambda Rf)}{\partial x} + \Delta f_y \cdot \frac{\partial \phi_T(V_j - \lambda Rf)}{\partial y}\right]\right\} + \\ &\left(\frac{r_0}{D}\right)^4 \sum_{j \neq k}^N \langle a(V_j) a^*(V_j - \lambda Rf) \rangle \langle a^*(V_k) a(V_k - \lambda Rf - \lambda R\Delta f) \rangle \times \\ &\exp\left\{i\lambda R\left[f_x \frac{\partial \phi_T(V_j)}{\partial x} + f_y \frac{\partial \phi_T(V_j)}{\partial y}\right]\right\} \exp\left\{-i\lambda R\left[(\Delta f_x + f_x) \frac{\partial \phi_T(V_k)}{\partial x} + (\Delta f_y + f_y) \frac{\partial \phi_T(V_k)}{\partial y}\right]\right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

在 $|f| > r_0/\lambda R$ 的高频段, 由于 $a(V_j)$ 和 $a(V_j - \lambda Rf)$ 的空间距离大于相干长度, 所以对应的相位值统计上不相关。由于大气湍流的相位值服从高斯统计分布, 不相关则统计独立, 并且平均相位值为 0, 所以上式中的第二项在高频段将不再起作用, 这时交叉谱传递函数为

$$\begin{aligned} \langle \tau(f)\tau^*(f+\Delta f) \rangle &\approx \left(\frac{r_0}{D}\right)^4 \sum_{j=1}^N \langle |a(V_j)|^2 a^*(V_j - \lambda Rf) a(V_j - \lambda Rf - \lambda R\Delta f) \rangle \times \\ &\exp\left\{-i\lambda R\left[\Delta f_x \cdot \frac{\partial \phi_T(V_j - \lambda Rf)}{\partial x} + \Delta f_y \cdot \frac{\partial \phi_T(V_j - \lambda Rf)}{\partial y}\right]\right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

由(23)式可以看出, 只要保证在交叉谱平移方向上系统像差值没有变化, 就可以去除系统像差对高频段的影响。同时如果保证光瞳内任一点处静态像差的偏导数都为 0, 则可以保证交叉谱传递函数在整个频率范围内不受影响。除了用相同大小和相同类型的静态像差来补偿, 没有任何两种像差在整个频段内满足上述要求。但是在某种近似的情况下可以得到相互补偿的静态像差组合。

对上面提到的 4 阶离焦、5、6 阶像散和 11 阶球差计算在各点的偏导数, 在峰谷(p-v)值为 1 个波长并忽略高于线性项的影响时, 得到在各个点处的斜率:

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \left[\frac{\partial W_4(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial W_4(x, y)}{\partial y} \right] = (2x, 2y), \quad (24)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{12} \left[\frac{\partial W_5(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial W_5(x, y)}{\partial y} \right] = (y, x), \quad (25)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{12} \left[\frac{\partial W_6(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial W_6(x, y)}{\partial y} \right] = (x, -y), \quad (26)$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{15} \left[\frac{\partial W_{11}(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial W_{11}(x, y)}{\partial y} \right] = (-8x, -8y). \quad (27)$$

由(24)~(27)式可以看出:

1) 对于 p-v 值相同大小的静态像差来说, 相同位置及相同方向的 Δf 来说, 偏导值越大, 对交叉谱传递函数的影响越大。球差的斜率最大, 离焦次之, 像散的斜率最小, 相同 p-v 值时像散较离焦和球差情况对传递函数的影响最小;

2) 当球差 p-v 值为离焦像差 p-v 值的 1/4 时,

离焦像差加上球差可以起到像差平衡作用, 在近似情况下其叠加后在光瞳内的任一点的任何方向上偏导数均为 0。可以在整个频率范围内降低系统像差的影响;

3) 当 5 阶像散的 p-v 值为离焦像差 p-v 值的 2 倍时, 5 阶像散减去离焦像差时结合(23)~(25)式高频处任一点在交叉谱传递函数的平移向量满足 $\Delta f_y = \Delta f_x$ 时起到像差平衡作用, 但是只有在光瞳的 $x=y$ 方向上才有在所有频率上的引入系统像差之间的平衡作用。同样的当像散加上离焦像差时, 高频处在 $\Delta f_y = -\Delta f_x$ 时具有相差平衡效果, 在光瞳的 $y=-x$ 方向具有整个频段的平衡作用;

4) 当 6 阶像散的 p-v 值为离焦像差 p-v 值的 2 倍时, 6 阶像散减去离焦像差由(23)、(24)和(26)式可以看出, 高频处任一点在 $\Delta f_y = 0$ 时具有像差平衡效果, 但只有在光瞳的 $y=0$ 的方向上才有所有频率段上的系统像差之间的平衡作用。当像散加上离焦像差, 平移向量为 $\Delta f_x = 0$ 高频处像差之间具有平衡作用, 但在 $x=0$ 方向具有整个频段的平衡作用;

5) 利用系统像差之间在特定的方向上相位差值的抵消作用, 在斜率抵消的方向上可以降低系统像差对交叉谱传递函数的影响, 提高相位重建精度。

5 仿真结果

大气湍流相位屏采用模式法得到^[12]。孔径采样点为 128×128 , 湍流强度为 $D/r_0 = 10$, 交叉谱传

递函数均采用 1000 帧短曝光图像得到。交叉谱传递函数的相位误差采用如下方法进行评价^[8,15]：

$$\theta_e(f_x, f_y) = \arctan \left[\frac{\sigma_{\perp}}{|P(f_x, f_y)| M^{1/2}} \right], \quad (28)$$

式中 $\sigma_{\perp}^2 = \sigma_R^2 \sin^2(\phi) + \sigma_I^2 \cos^2(\phi) - \text{cov}(R, I) \sin(2\phi)$, $P(f_x, f_y) = \langle \tau(f_x, f_y) \tau^*(f_x + \Delta f_x, f_y + \Delta f_y) \rangle$ 为交叉谱传递函数, ϕ 为 $P(f_x, f_y)$ 的相位值, M 为统计帧数。 σ_R^2 , σ_I^2 和 $\text{cov}(R, I)$ 分别为 $\tau_i(f_x, f_y) \tau_i^*(f_x + \Delta f_x, f_y + \Delta f_y)$ 实部方差、虚部的方差和实部虚部之间的协方差。

由上面的分析可知,当球差的 p-v 值为离焦像差的 p-v 值的 1/4 时,近似情况下在交叉谱的平移方向为任何值时都可以在整个频域上对离焦像差起

到相位平衡的作用,图 2 给出了采用 p-v 值为 0.5 个波长的球差对 p-v 值为 2 个波长离焦的平衡效果。在平移方向为(5,5)倍最小频率后的交叉谱传递函数的相位误差。可以看出采用像差平衡作用后,交叉谱传递函数的相位误差明显降低,特别是在低频处。高频处的略微增加主要是由于在 x, y 值较大时,利用 $(-12\sqrt{5}x, -12\sqrt{5}y)$ 来近似 $[\sqrt{5}(24x^3 + 24xy^2 - 12x), \sqrt{5}(24y^3 + 24yx^2 - 12y)]$ 引入的误差,这时球差与离焦之间的平衡作用将被削弱。但是由于交叉谱算法在进行相位重建过程中采用由低频率处向高频处进行迭代的方式,所以低频处相位误差的降低在重建结果中起着更大的作用。

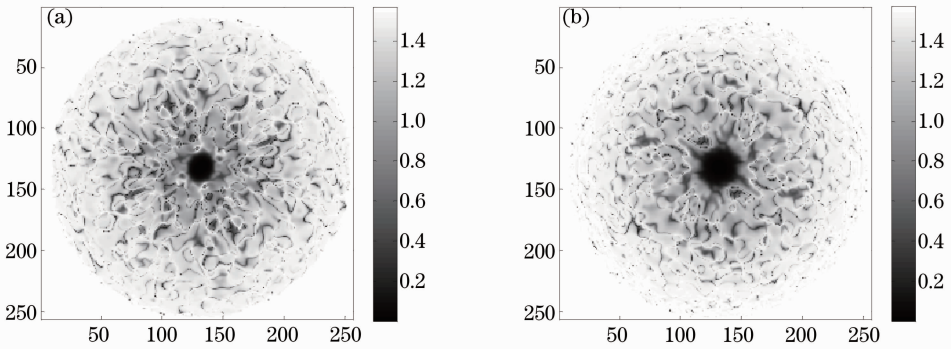


图 2 (a)仅有 p-v 值为 2 个波长的离焦像差时的相位误差; (b)采用 p-v 值为 0.5 个波长的球差对离焦像差补偿后的相位误差分布

Fig. 2 (a) Phase error of the Knox-Thompson transfer function with the defocus as the static aberration when p-v value is 2 wavelengths; (b) phase error after balanced by spherical aberration when p-v value is 0.5 wavelengths

图 3、图 4 给出了离焦像差对 5 阶像散和 6 阶像散的平衡结果,图 3(a)是引入 4 个波长的 5 阶像散时的相位误差分布,图 3(b)为 4 个波长的 5 阶像散减去 2 个波长的离焦像差的交叉谱传递函数相位误差的分布情况,交叉谱传递函数的平移量满足 $\Delta f_y = \Delta f_x$, 平移量为 (5, 5) 倍最小频率,可以看出其在 $x = y$ 的方向上明显降低了相位误差值,图 3(c)为 4 个波长的 5 阶像散加上 2 个波长的离焦像差的交叉谱传递函数相位误差的分布情况,平移量为 (5, -5) 满足 $\Delta f_x = -\Delta f_y$, 结果与符合上述结论 3。图 4(a)为引入 p-v 值为 4 个波长的 6 阶像散时的相位误差分布,图 4(b)为 4 个波长的 6 阶像散减去 2 个波长的离焦后的交叉谱传递函数相位误差的分布情况,平移量选取为 (5, 0) 以满足 $\Delta f_y = 0$ 的要求,同时图 4(b)也表现出了在 $y=0$ 方向上的相位误差值的降低,图 4(c)给出了 6 阶像散加上 2 个波长的离焦后,交叉谱平移向量为 (0, 5) 后的相位误差分布,符合上述结论 4。虽然利用离焦与像散之间

的平衡只能在特定的方向上起到降低相位误差的作用,但是如果在相位重建过程中对这部分相位值给予较大的权值而在相位误差较大区域给予较小的权值,依然会对交叉谱相位重建的结果起到提高精度的作用。

实际应用时,可以选择交叉谱的振幅,也可以选择与相位误差值成反比的函数作为权值来体现出像差平衡方法对相位精度的影响,因为交叉谱的幅值与相位误差值成反比关系且不需额外计算,所以选择交叉谱的幅值作为权重系数。在相位复原时,迭代公式为^[6]

$$p(f) = p(f) + |C(f, 0)| \left\{ \frac{C(f, \Delta f) Z(f - \Delta f)}{p(f - \Delta f)} \right\}, \quad (29)$$

式中 $Z(f)$ 记录了 $p(f)$ 的更新次数, $C(f, \Delta f) = \sum_{i=1}^N I_i(f) I_i^*(f - \Delta f)$ 为交叉谱。最后得到的相位值为 $\frac{p(f)}{Z(f)}$ 。以离焦像差为例,只有在 p-v 值为 2 个波

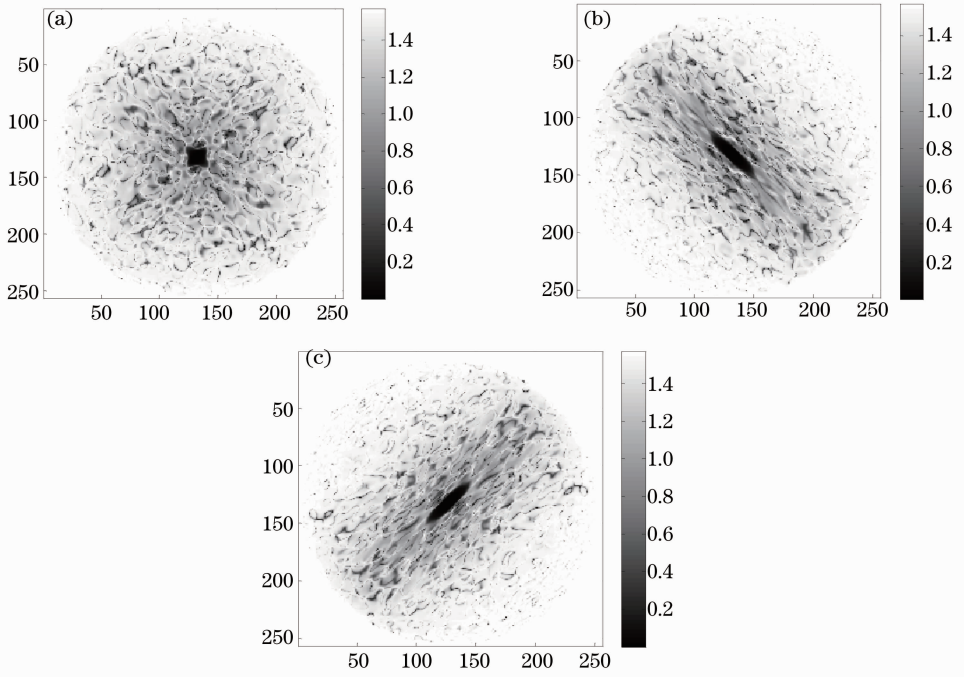


图 3 (a) $p-v$ 为 4 个波长的 5 阶像散的相位误差分布；(b) 采用离焦对像散进行平衡后相位误差的分布，像散减去离焦的情况；(c) 采用离焦对像散进行平衡后相位误差的分布，像散加上离焦的情况

Fig. 3 (a) Phase error of the Knox-Thompson transfer function with the fifth order astigmatism as the static aberration when $p-v$ value is 4 wavelengths; (b) phase error after balanced by defocus, the condition is astigmatism subtract defocus; (c) phase error after balanced by defocus, the condition is astigmatism plus defocus

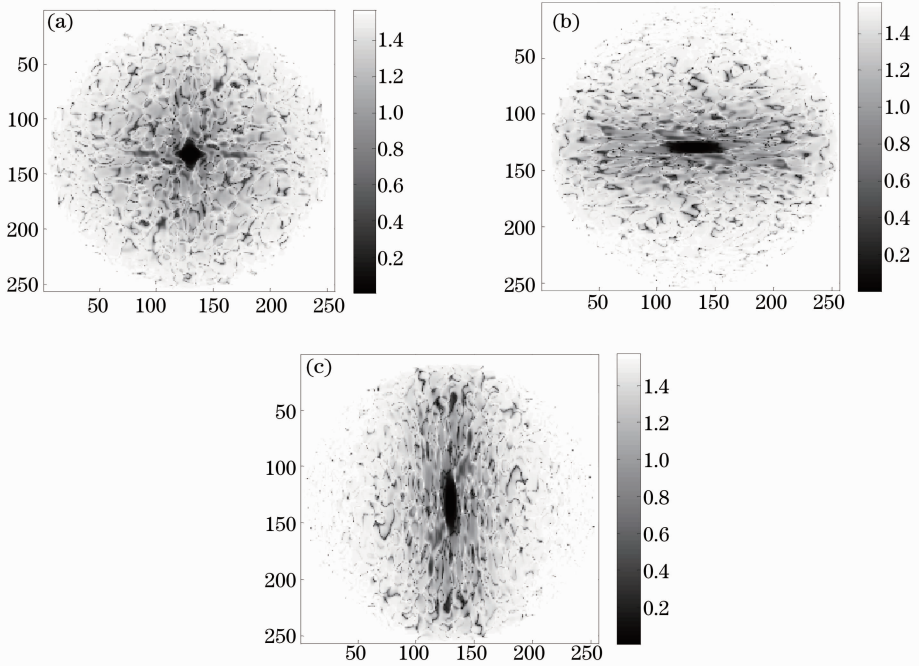


图 4 (a) $p-v$ 为 4 个波长的 6 阶像散的相位误差分布；(b) 采用离焦对像散进行平衡后相位误差的分布，像散减去离焦的情况；(c) 采用离焦对像散进行平衡后相位误差的分布，像散加上离焦的情况

Fig. 4 (a) Phase error of the Knox-Thompson transfer function with the sixth order astigmatism as the static aberration when $p-v$ value is 4 wavelengths; (b) phase error after balanced by defocus, the condition is astigmatism subtract defocus; (c) phase error after balanced by defocus, the condition is astigmatism plus defocus

长的离焦像差的情况下,重建结果的斯特列尔比为 0.5596,引入 0.5 个波长的球差并进一步引入权重系数进行相位复原时,峰值斯特列尔比提高到 0.8823。当系统存在 4 个波长的像散情况下,通过引入 2 个波长的离焦并且在重建过程中引入权重系数可以将重建结果的峰值斯特列尔比从 0.5413 提高到 0.8005。

5 结 论

主要分析了静态像差对斑点图像重建过程中相位重建精度的影响,以交叉谱算法为例分析了 Zernike 像差中的离焦、像散、彗差和球差对相位重建的影响,指出在理论上只有彗差会引入额外的相位差。由于静态像差的引入,有限统计引起的相位误差被放大,降低了目标相位重建的精度。虽然通过增加原始图像的数量可以降低影响,但是目标的演化在实际中并不容易获得。为了分析系统像差在相干长度大小的子孔径内对重建结果的影响,通过将光瞳按照相干长度大小的子孔径进行划分,并且考虑子孔径内只有倾斜量,进一步将交叉谱传递函数改写为各个子孔径的函数,在此基础上通过像差平衡方法,指出当系统存在多种类型静态像差的情况下,除了采取定量的同种类型像差进行补偿的方法外,还可以在交叉谱方式复原相位时通过选取特定方向的平移量来降低系统像差在相干长度大小的子孔径内的影响,提高斑点图像相位重建精度。

参 考 文 献

1 Jie Mu, Wenjia Zheng, Mei Li, *et al.*. Real-time measurement of atmospheric parameters for the 127-element adaptive optics

- system of 1.8-m telescope [J]. *Chin Opt Lett*, 2012, 10(12): 120101.
- 2 Ying Liang, Changhui Rao, Mei Li, *et al.*. Iterative blind deconvolution of adaptive optics images [J]. *Chin Opt Lett*, 2006, 4(4): 187-188.
- 3 A Labeyrie. Attainment of diffraction limited resolution in large telescopes by Fourier analysing speckle patterns in star images [J]. *Astron Astrophys*, 1970, 6(1): 85-87.
- 4 G P Weigelt. Modified astronomical speckle interferometry "speckle masking" [J]. *Opt Commun*, 1977, 21(1): 55-59.
- 5 K T Knox, B J Thompson. Recovery of images from atmospherically degraded short-exposure photographs [J]. *Astrophysical Journal*, 1974, 193: L45-L48.
- 6 K Mikurda, O Von Der Lühе. High resolution solar speckle imaging with the extended Knox-Thompson algorithm [J]. *Solar Physics*, 2006, 235(1-2): 31-53.
- 7 R Barakat, P Nisenson. Influence of the wave-front correlation function and deterministic wave-front aberrations on the speckle image-reconstruction problem in the high-light-level regime [J]. *J Opt Soc Am*, 1981, 71(11): 1390-1402.
- 8 J-Y Zhang, J Dainty. Effects of aberrations on transfer functions used in high angular resolution astronomical imaging [J]. *Journal of Modern Optics*, 1992, 39(12): 2383-2404.
- 9 D T Miller, D J Cho, G M Morris, *et al.*. Bispectral imaging through unknown deterministic aberrations [J]. *Journal of Modern Optics*, 1995, 42(7): 1523-1546.
- 10 D J Cho, E A Watson, G M Morris. Application of bispectral speckle imaging to near-diffraction-limited imaging in the presence of unknown aberrations [J]. *Appl Opt*, 1995, 34(5): 854-864.
- 11 O Von der Lühе. Speckle imaging of solar small scale structure. I-Methods [J]. *Astronomy and Astrophysics*, 1993, 268: 374-390.
- 12 R J Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence [J]. *J Opt Soc Am*, 1976, 66(3): 207-211.
- 13 J W Goodman. *Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications* [M]. USA: Roberts and Company Publishers, 2007. 253-262.
- 14 D Korff, G Dryden, M G Miller. Information retrieval from atmospheric induced speckle patterns [J]. *Opt Commun*, 1972, 5(3): 187-192.
- 15 G R Ayers, M J Northcott, J C Dainty. Knox-Thompson and triple-correlation imaging through atmospheric turbulence [J]. *J Opt Soc Am A*, 1988, 5(7): 963-985.

栏目编辑: 张浩佳